ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.518.832

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ВСПЛЕСКИ В КОЛЬЦЕ[1]

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

В дополнение к ранее опубликованным совместным работам авторов, применявших ортогональные всплески для представления решения задач Дирихле с оператором Лапласа и его степенями в круге и кольце, а интерполяционные всплески — только в круге, в настоящей статье развита техника применения интерполяционных периодических всплесков в кольце для краевой задачи Дирихле. Причем упор сделан не на проблеме точного представления решения в виде рядов (двойных) по системе всплесков, а на приближении решений с любой наперед заданной точностью конечными построенными с помощью интерполяционных всплесков линейными комбинациями двоично-рациональных сдвижек специальных гармонических полиномов. Полученные приближенные формулы просты для численной реализации, особенно если квадрат преобразования Фурье мейеровской масштабирующей функции с описанными в работе свойствами явно определить через подходящие элементарные функции.

Ключевые слова: интерполяционные всплески, кратномасштабный анализ (КМА), задача Дирихле, оператор Лапласа, наилучшее приближение, модуль непрерывности.

Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. Harmonic interpolating wavelets in a ring.

Complementing the authors' earlier joint papers on the application of orthogonal wavelets to represent solutions of Dirichlet problems with the Laplace operator and its powers in a disk and a ring and of interpolating wavelets for the same problem in a disk, we develop a technique of applying interpolating periodic wavelets in a ring for the Dirichlet boundary value problem. The emphasis is not on the exact representation of the solution in the form of (double) series in a wavelet system but on the approximation of solutions with any given accuracy by finite linear combinations of dyadic rational translations of special harmonic polynomials; these combinations are constructed with the use of interpolating wavelets. The obtained approximation formulas are simply calculated, especially if the squared Fourier transform of the Meyer scaling function with the properties described in the paper is explicitly defined in terms of the corresponding elementary functions.

Keywords: interpolating wavelets, multiresolution analysis (MRA), Dirichlet problem, Laplace operator, best approximation, modulus of continuity.

MSC: 42A10, 41A17, 41A25, 41A27

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-225-234

75-летию профессора В. В. Арестова посвящается

Для решения краевых задач с дифференциальным оператором Лапласа удобными оказались периодические всплески на основе всплесков Мейера. Масштабирующие функции и всплески Мейера на оси после периодизации превращаются в ортогональные системы специальных тригонометрических полиномов, эффективные для представления и конечномерной аппроксимации функций в любых пространствах L^p $(1 \le p \le \infty)$. Пересаженные на окружность, они легко продолжаются внутрь и во вне круга до гармонических систем кратномасштабной аппроксимации относительно скалярного произведения в L^2 на границе круга. На основе таких систем в ряде совместных работ авторами данной статьи (см., например, [1] вместе с помещенным там списком литературы) разработаны эффективные для численной реализации методы решения краевых задач для гармонических, бигармонических и аналитических функций в круге и кольце, а в работах Г. А. Дубосарского эти методы распространены на многосвязные области с круговыми границами.

Почти одновременно с ортонормированными системами всплесков появились (если не считать давно известных интерполяционно-ортогональных систем Хаара (1909) и Котельникова

[1]Работа второго автора выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 2.A03.21.0006 от 27.08.2013).

(1933) — Шеннона (1960)) интерполяционные всплески на оси (см. статью D. L. Donoho [2] с обзором и собственными новыми результатами), которые, как показано в [2], имеют большое преимущество перед ортогональными всплесками при обработке, сжатии и очистке от шумов непрерывных и даже дискретных сигналов. Распространенным способом построения интерполяционных на оси всплесков является переход от ортонормированных масштабирующих функций к их автокорреляционным функциям, что равносильно замене в ортогональном кратномасштабном анализе (КМА) масштабирующей функции $\varphi(x)$ на функцию $\varphi^{\text{int}}(x)$, преобразование Фурье которой совпадает с $|\widehat{\varphi}(\omega)|^2$.

После 1-периодизации таких систем и замены x на $x/(2\pi)$ естественно получаются 2π-периодические КМА с интерполяционными базисами

$$\Phi^{j,k}(x) = \Phi^{j,0}\Big(x - \frac{2\pi k}{2^j}\Big), \quad k = \overline{0, 2^j - 1}, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

подпространств $\widetilde{V}_j$ периодических КМА, где

$$\Phi^{j,0}(2\pi x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi^{\text{int}}(2^j(x+l)).$$

Для аппроксимации решений краевых задач Дирихле и Неймана с оператором Лапласа в круге более удобные, чем ортогональные, оказываются интерполяционные периодические всплески, построенные на базе всплесков Мейера, у которых функция $\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ $(0 < \varepsilon \le 1/3)$ имеет компактный носитель. Как отмечалось, $\Phi^{j,k}(x)$ являются тригонометрическими полиномами, порождающими гармонические полиномы в круге $|z| < R$

$$\Phi^{j,k}\Big(\frac{r}{R}, x\Big) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}^{\text{int}}\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\Big(\frac{r}{R}\Big)^{|\nu|} e^{i\nu(x - 2\pi k/2^j)}, \tag{1}$$

и вне его

$$\Phi^{j,k}\Big(\frac{R}{r}, x\Big) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}^{\text{int}}\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\Big(\frac{R}{r}\Big)^{|\nu|} e^{i\nu(x - 2\pi k/2^j)}, \tag{2}$$

где суммирование по ν осуществляется по тем ν, для которых $\nu/2^j \in \operatorname{supp}\widehat{\varphi}^{\text{int}}$. А в общем случае соответствующие бесконечные ряды будут сходиться при дополнительных ограничениях на $\widehat{\varphi}(\omega)$. В статье [1] и цитированной там работе [6] на базе $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ определены и исследованы два КМА с интерполяционно-ортогональными масштабирующими функциями $\varphi_s(x) = \varphi_s(x,\varepsilon)$ $(s = 1, 2)$ и с интерполяционными масштабирующими функциями $\varphi_3(x) = \varphi_3(x,\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon \le 1/3)$. Для полноты изложения и облегчения применения рассмотренного ниже метода без обращения к другим работам вначале введем необходимые определения и соглашения, начиная с функции $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$. Эту функцию Мейер получил сглаживанием функции Котельникова — Шеннона $\widehat{\varphi}_0(\omega) \equiv \chi_{[-1/2,1/2]}(\omega)$. А именно, для любого $\varepsilon \in (0, 1/3]$ $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega) \equiv 1$ при $|\omega| \le (1-\varepsilon)/2$, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| > (1+\varepsilon)/2$, а на промежутках $(1-\varepsilon)/2 < |\omega| < (1+\varepsilon)/2$ определена так, чтобы $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ была непрерывна на вещественной оси $\mathbb{R}$ и $|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|^2 + |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1)|^2 \equiv 1$ при $(1-\varepsilon)/2 < |\omega| < (1+\varepsilon)/2$. Отсюда вытекает, что $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|^2\,d\omega = 1$ и $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+n)|^2 \equiv 1$ на $\mathbb{R}$. Функция $\varphi_3(x)$ определяется условием $\widehat{\varphi}^{\text{int}}(\omega) = \widehat{\varphi}_3(\omega) = |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|^2$, а последнее тождество, как известно, обеспечивает интерполяционность $\varphi_3(x) : \varphi_3(n) = \delta_{n,0}$. Для вещественности и обеспечения процесса 1-периодизации функции $\varphi_3(x)$ достаточно дополнительно потребовать ее четности, вещественности, непрерывности и ограниченности вариации производной $(d/d\omega)\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$. Двукратное интегрирование по частям интеграла обратного преобразования Фурье $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega))^2 e^{2\pi i x\omega}\,d\omega = \varphi_3(x)$ влечет оценку

$$|\varphi_3(x)| \le \min\Big\{1, \frac{1}{4\pi^2} V_R |\widehat{\varphi}_3'(\omega)| \frac{1}{|x|^2}\Big\},$$

что гарантирует сходимость рядов

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi_3(2^j(x+l)) =: \Phi_3^{j,0}(2\pi x), \quad k=\overline{0,2^j-1}, \quad j\in\mathbb{Z}_+.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_3^{j,k}(x) = 2^{-j}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_\varepsilon^2\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big) e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}, \tag{3}$$

а по формулам (1), (2) определяются гармонические всплески (папы) $\Phi_3^{jk}(r,x)$ и $\Phi_3^{jk}(\rho/r,x)$. При каждом j система (3) определяет пространства $\widetilde{V}_j^3$ интерполяционного КМА, а прямые дополнения $\widetilde{V}_j^3$ до $\widetilde{V}_{j+1}^3$ определяют базисы пространства $C_{2\pi}$, которыми в данной статье мы пользоваться не будем, поскольку представление функций рядами вряд ли полезно для практики.

Интерполяционно-ортогональные системы функций на $\mathbb{R}$ и на периоде строятся по этой же схеме с предварительной простой модернизацией функций $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ Мейера, а именно

$$\widehat{\varphi}_2(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega) + i(\operatorname{sign}\omega)\beta(\omega), \quad \beta(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\big(\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1)+\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1)\big), \tag{4}$$

$$\widehat{\varphi}_1(\omega) = \frac{1}{2}\begin{cases} (1+\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)-\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1)) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1)) + i(\operatorname{sign}\omega)\sqrt{2\beta(\omega)} & \text{при } |\omega|<(1+\varepsilon)/2,\\ 0 & \text{при } |\omega|\ge(1+\varepsilon)/2. \end{cases} \tag{5}$$

В цитированной работе [6] из [1] показано, что подходящей заменой некоторой другой функции $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ можно функцию (5) свести к (4). Поэтому в дальнейшем обосновывать будем только случам, связанные с $\widehat{\varphi}_3(\omega)$ и $\widehat{\varphi}_2(\omega)$.

В итоге в дополнение к выписанным системам (3) используем далее также интерполяционно-ортогональные (при $\alpha=1$ — интерполяционные, при $\alpha=1/2$ — ортонормированные) периодические системы

$$\Phi_2^{j,k} = 2^{-j\alpha}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_2\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big) e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}, \quad k=\overline{0,2^j-1}, \quad j\in\mathbb{Z}_+. \tag{6}$$

В соответствии с (1) и (2) для гармонического продолжения этих тригонометрических полиномов в круг $|z|\le 1$ нужно в каждом слагаемом этих сумм добавить множитель $r^{|\nu|}$, а для продолжения в область $|z|>\rho$ — множитель $(\rho/r)^{|\nu|}$. На практике бывает полезным представление вещественных масштабирующих (при вещественных и четных функциях $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$) функций в вещественной форме. Они следующие:

$$\Phi_3^{j,k}(r,x) = 2^{-j+1}\bigg(\frac{1}{2} + \sum_{0<\nu<(1+\varepsilon)2^{j-1}} \widehat{\varphi}_\varepsilon^2\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big) r^\nu \cos\nu\Big(x-\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\bigg),$$

$$\Phi_2^{j,k}(r,x) = \Phi_3^{j,k}(r,x) - 2^{-j+1}\sum_{(1-\varepsilon)2^{j-1}<\nu<(1+\varepsilon)2^{j-1}} \widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}-1\Big)\sin\nu\Big(x-\frac{2\pi k}{2^j}\Big).$$

Последняя формула выписана при условии, что на промежутке $((1-\varepsilon)/2,(1+\varepsilon)/2)$ график функции $\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$ имеет центр симметрии в точке $(1/2,1/2)$.

В отличие от ортогональных всплесков интерполяционные гармонические всплески ранее не удавалось применить для решения краевых задач в кольце. Далее предлагается метод приближенного решения с любой заданной точностью краевых задач для гармонических функций в центрально-симметричном кольце $\mathbb{R}_\rho = \{z=re^{ix}\colon \rho<r<1\}$ с помощью систем $\Phi_s^{j,k}(r,x)$ и $\Phi_s^{j,k}(\rho/r,x)$ $(s=1,2,3)$.

Постановка задачи Дирихле в $\mathbb{R}_\rho$:

$$\begin{cases} \Delta U(r,x) = U''_{rr} + \dfrac{1}{r}U'_r + \dfrac{1}{r^2}U''_{xx} = 0, \\ U(1,x) = f_1(x),\ U(\rho,x) = f_\rho(x), \end{cases} \tag{7}$$

где $\rho \le r < 1,\ x \in (0,2\pi),\ f_1, f_\rho \in C_{2\pi}$. Из известных результатов Г. М. Галузина [3] следует, что решение этой задачи существует, единственно и представимо в форме

$$U(r,x) = U_1(r,x) + U_\rho(r,x) + A\ln r, \tag{8}$$

где $U_1(r,x)$ — гармоническая при $r < 1$ и непрерывная при $r \le 1$ функция, $U_\rho(r,x)$ также гармоническая и непрерывная функция, но при $r \ge \rho$, причем $U_\rho(r,x)$ регулярна в окрестности точки $z = \infty$ и имеет конечный предел при $r \to \infty$. Фактически вследствие граничных условий имеем только равенства

$$\begin{cases} U_1(1,x) + U_\rho(1,x) = f_1(x) \\ U_1(\rho,x) + U_\rho(\rho,x) + A\ln\rho = f_\rho(x), \end{cases} \tag{9}$$

а необходимые для определения $U(r,x)$ граничные значения $U_1(1,x)$ и $U_\rho(\rho,x)$ явно не заданы. При решении задачи Дирихле в кольце R_ρ с помощью ортогональных всплесков в работе [4] была построена биортогональная в $L^2(\partial R_\rho)$ система к ортогональным на каждой границе R_ρ системам всплесков. В рассматриваемом здесь подходе к решению задачи (7) в кольце R_ρ такой вариант не проходит из-за отсутствия понятия “биинтерполяционные системы”.

Для упрощения рассуждения будем вначале предполагать, что функции $f_1(x)$ и $f_\rho(x)$ при достаточно большом $2^j \in \mathbb{N}$ принадлежат подпространству

$$\widetilde{V}_j^s = \left\{ \sum_{k=0}^{2^j-1} C_k \Phi_s^{jk}(1,x)\colon (C_0, C_1, \dots C_{2^j-1}) \subset \mathbb{R}^{2^j} \right\} \quad (s = 1, 2 \text{ или } 3)$$

— части пространства тригонометрических полиномов порядка $[2^{j-1}(1+\varepsilon)]$, содержащей все полиномы порядка $[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$. Легко проверить, что тогда и функции $U_1(1,x),\ U_\rho(1,x),\ U_1(\rho,x),$ $U_\rho(\rho,x)$ лежат в $\widetilde{V}_j^s$, что и осуществлено в доказательстве следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $s = 1$ или 2 или 3. Если функции $f_1(x)$ и $f_\rho(x)$, связанные с функциями $U_1(r,x),\ U_\rho(r,x)$ (8) соотношениями (9), принадлежат подпространству $\widetilde{V}_j^s$, то и функции $U_1(1,x),\ U_\rho(1,x),\ U_1(\rho,x),\ U_\rho(\rho,x)$ все принадлежат подпространству $\widetilde{V}_j^s$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условиям $f_1(x)$ и $f_\rho(x)$ — тригонометрические полиномы порядка $[2^{j-1}(1+\varepsilon)]$, коэффициенты которых при $e^{i\nu x}$ четко связаны со значениями функций на сетке $2\pi k/2^j$ $(k = 0, 1, \dots, 2^j - 1)$. Поэтому если, например, $U_1(1,x) \notin V_j^s$, то и $U_\rho(1,x) = f_1(x) - U_1(1,x) \notin V_j^s$. Но так как в сумме эти функции дают $f_1(x) \in V_j^s$, то недостаток (избыток) $a_\nu e^{i\nu x}$ какого-либо члена в разложении $U_1(1,x)$ по степени e^{ix} должен компенсироваться избытком (соответственно, недостатком) $-a_\nu e^{i\nu x}$ в разложении $U_\rho(1,x)$. Но тогда дисбаланс обязательно возникнет между членами $\rho^\nu a e^{i\nu}$ и $-1/\rho^\nu a e^{i\nu x}$ в разложениях функций $U_1(\rho,x)$ и $U_\rho(\rho,x)$, являющихся гармоническим продолжением внутри кольца R_ρ пары $(U_1(1,x), U_\rho(1,x))$: компоненты $U_1(\rho,x)$ с окружностью $r = 1$ на окружность $r = \rho$, а компоненты $U_\rho(1,x)$ — наоборот, с окружности $r = \rho$ на окружность $r = 1$. В итоге нарушится второе равенство в (9). Другие нарушения заключения леммы опровергаются таким же образом. Лемму можно считать доказанной. □

С учетом формул (1), (2) и $\Phi_s^{jk}((2\pi l)/2^j) = \delta_{k,l}$ $(k, l = \overline{1, 2^j - 1})$ тогда имеем

$$U_1(r,x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} U_1\Big(1, \frac{2\pi k}{2^j}\Big) \Phi_s^{jk}(r,x) \quad (r \le 1), \tag{10}$$

$$U_\rho(r,x)=\sum_{k=0}^{2^j-1}U_\rho\Big(\rho,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{jk}\Big(\frac{\rho}{r},x\Big)\quad (r\ge 1), \tag{11}$$

и, следовательно,

$$f_1(x)=\sum_{k=0}^{2^j-1}\bigg(U_1\Big(1,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{jk}(1,x)+U_\rho\Big(\rho,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{jk}(\rho,x)\bigg),$$

$$f_\rho(x)=\sum_{k=0}^{2^j-1}\bigg(U_1\Big(1,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{jk}(\rho,x)+U_\rho\Big(\rho,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{jk}(1,x)\bigg)+A\ln\rho.$$

Подставим сюда выражение Φ_s^{jk} через $\widehat{\varphi}_s(\nu/2^j)$, заодно поменяв еще порядки суммирования. Получим, что при каждом фиксированном $\varepsilon\in(0,1/3]$ и $s=1,2,3$

$$f_1(x)=\sum_\nu e^{i\nu x}2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sum_{k=0}^{2^j-1}\bigg(U_1\Big(1,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)+\rho^{|\nu|}U_\rho\Big(\rho,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\bigg)e^{-2\pi i\nu k/2^j},$$

$$f_\rho(x)=\sum_\nu e^{i\nu x}2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sum_{k=0}^{2^j-1}\bigg(U_1\Big(1,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\rho^{|\nu|}+U_\rho\Big(\rho,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\bigg)e^{-2\pi i\nu k/2^j}+\delta_{\nu,0}A\ln\rho.$$

Видно, что здесь громоздкие множители при $e^{i\nu x}$ — это коэффициенты соответствующих тригонометрических полиномов $f_1(x)$ и $f_\rho(x)$ из $\widetilde{V}_{j,0}$. Таким образом,

$$2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sum_{k=0}^{2^j-1}\bigg(U_1\Big(1,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)+\rho^{|\nu|}U_\rho\Big(\rho,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\bigg)e^{-2\pi i\nu k/2^j}=(f_1)_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_1(x)e^{-i\nu x}\,dx,$$

$$2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sum_{k=0}^{2^j-1}\bigg(U_1\Big(1,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\rho^{|\nu|}+U_\rho\Big(\rho,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\bigg)e^{-2\pi i\nu k/2^j}+\delta_{\nu,0}A\ln\rho$$
$$=(f_\rho)_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_\rho(x)e^{-i\nu x}\,dx.$$

Умножая второе из последних равенств на $\rho^{|\nu|}$ и вычитая его из первого и, наоборот, умножая первое на $\rho^{|\nu|}$ и вычитая его из второго, получим при каждом $\nu\in\Delta_{j\varepsilon}=(-2^{j-1}(1+\varepsilon),2^{j-1}(1+\varepsilon))$ формулы

$$\bigg(2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sum_{k=0}^{2^j-1}U_1\Big(1,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)e^{-2\pi i\nu k/2^j}\bigg)(1-\rho^{2|\nu|})=(f_1)_\nu+\rho^{|\nu|}\delta_{\nu,0}A\ln\rho-\rho^{|\nu|}(f_\rho)_\nu, \tag{12}$$

$$\bigg(2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sum_{k=0}^{2^j-1}U_\rho\Big(1,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)e^{-2\pi i\nu k/2^j}\bigg)(1-\rho^{2|\nu|})=(f_\rho)_\nu-\rho^{|\nu|}(f_\rho)_\nu-\delta_{\nu,0}A\ln\rho. \tag{13}$$

Эти равенства при $\nu=0$ не противоречивы (превращаясь в “$0=0$”), если только

$$A\ln\rho=(f_\rho)_0-(f_1)_0, \tag{14}$$

так что число A в формуле (8) для решения $U(r,x)$ задачи (7) стало уже известным. С учетом этого перепишем формулы (12) и (13) при $\nu\ne0$ в виде

$$\begin{cases}2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\dfrac{\nu}{2^j}\Big)\displaystyle\sum_{k=0}^{2^j-1}U_1\Big(1,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)e^{-2\pi i\nu k/2^j}=\dfrac{(f_1)_\nu-\rho^{|\nu|}(f_\rho)_\nu}{1-\rho^{2|\nu|}}, & \nu\ne0\\ 2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\dfrac{\nu}{2^j}\Big)\displaystyle\sum_{k=0}^{2^j-1}U_\rho\Big(1,\frac{2\pi k}{2^j}\Big)e^{-2\pi i\nu k/2^j}=\dfrac{(f_\rho)_\nu-\rho^{|\nu|}(f_1)_\nu}{1-\rho^{2|\nu|}}, & \nu\ne0,\end{cases} \tag{15}$$

а части формул (12) и (13), соответствующие значениям $\nu = 0$, будем рассматривать (с учетом (14) и тождества $\widehat{\varphi}_s(\omega) \equiv 1$ при $|\omega| < (1-\varepsilon)/2$) как предельные при $\nu' \to 0$ для равенств

$$2^{-j}\sum_{k=0}^{2^j-1} U_1\Big(1, \frac{2\pi k}{2^j}\Big) = \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} [f_1(x)(e^{i\nu' x} - \rho^{\nu'}) + f_\rho(x)\rho^{\nu'}(1 - e^{i\nu x})]\,dx}{1-\rho^{2\nu'}},$$

$$2^{-j}\sum_{k=0}^{2^j-1} U_\rho\Big(\rho, \frac{2\pi k}{2^j}\Big) = \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} [f_\rho(x)(e^{i\nu' x} - 1) + f_1(x)(1 - \rho^{\nu} e^{i\nu' x}]\,dx}{1-\rho^{2\nu'}}.$$

Применяя правило Лопиталя для раскрытия неопределенности типа 0/0 при $\nu' \to 0$, выводим формулы

$$2^{-j}\sum_{k=0}^{2^j-1} U_1\Big(1, \frac{2\pi k}{2^j}\Big) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\,dx = \frac{1}{2}(f_1)_0,$$

$$2^{-j}\sum_{k=0}^{2^j-1} U_\rho\Big(\rho, \frac{2\pi k}{2^j}\Big) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\,dx = \frac{1}{2}(f_1)_0.$$

Левые части этих равенств совпадают с левыми частями (15), если там положить $\nu = 0$. Поэтому, умножая (15) на $e^{i\nu x}$ и суммируя по $\nu \in \Delta_{i\varepsilon}$, учитывая последние два равенства, снова переставив суммы по ν и по k, находим, что

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} U_1\Big(1, \frac{2\pi k}{2^j}\Big)\sum_\nu 2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)} = \frac{1}{2}(f_1)_0 + \sum_{\nu\neq 0}\frac{(f_1)_\nu - \rho^{|\nu|}(f_\rho)_\nu}{1-\rho^{2|\nu|}}e^{i\nu x},$$

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} U_\rho\Big(\rho, \frac{2\pi k}{2^j}\Big)\sum_\nu 2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)} = \frac{1}{2}(f_1)_0 + \sum_{\nu\neq 0}\frac{(f_\rho)_\nu - \rho^{|\nu|}(f_1)_\nu}{1-\rho^{2|\nu|}}e^{i\nu x}.$$

Отсюда легко вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Граничные значения функций* $U_1(r,x)$ *и* $U_\rho(r,x)$ *из* (8) *выражаются через граничные значения* $f_1(x),\ f_\rho(x) \in \widetilde{V}_j^s$ *решение задачи* (7) $U(r,x)$ *следующим образом*:

$$U_1(1,x) = \frac{1}{2}(f_1)_0 + \sum_{\nu\neq 0}\frac{(f_1)_\nu - \rho^{|\nu|}(f_\rho)_\nu}{1-\rho^{2|\nu|}}e^{i\nu x}, \tag{16}$$

$$U_\rho(\rho,x) = \frac{1}{2}(f_1)_0 + \sum_{\nu\neq 0}\frac{(f_\rho)_\nu - \rho^{|\nu|}(f_1)_\nu}{1-\rho^{2|\nu|}}e^{i\nu x}. \tag{17}$$

Доказательство. Из определения функций $\Phi_s^{jk}(r,x)$ и $\Phi_s^{jk}(\rho/r,x)$ следует, что суммы по $\nu \in \Delta_{i\varepsilon}$ в левых частях предшествующих лемме 2 двух равенств — это $\Phi_s^{jk}(1,x)$. А так как по лемме 1 функции $U_1(1,x)$ и $U_\rho(\rho,x)$ при выбранном j принадлежат $\widetilde{V}_j^s$, то в этом частном случае они совпадают с правыми частями формул (16) и (17), т. е. с $U_1(1,x)$ и $U_\rho(\rho,x)$. Лемма доказана. □

С помощью формул типа (12), (13), если их обосновать в общем случае, можно по непрерывным функциям $f_1(x)$ и $f_\rho(x)$ построить и само решение $U(r,x)$ задачи (7) в R_ρ. Однако в практическом применении придется вычислять интегралы, определяющие $(f_1)_\nu$ и $(f_\rho)_\nu$ при $\nu \in \Delta_{j\varepsilon}$. Но для достижения объявленной в начале статьи цели нужно все свести к выборкам

$f_1(l/2^j)$ и $f_\rho(l/2^j)$ при $l=0,1,\dots,2^j-1$. При $f_1(x),\ f_\rho(x)\in\widetilde{V}_j$ это сделать просто. Имеем для $f(x)\in V_j^s$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2^j-1} f\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{jk}(x)=\sum_{\nu\in\Delta_{i\varepsilon}} 2^{-j}e^{i\nu x}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sum_{k=0}^{2^j-1} f\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)e^{-2\pi i\nu k/2^j},\quad f=f_1,\quad f=f_\rho. \tag{18}$$

Отсюда имеем

$$(f_1)_0=2^{-j}\sum_{k=0}^{2^j-1} f_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big),\quad (f_\rho)_0=2^{-j}\sum_{k=0}^{2^j-1} f_\rho\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big),$$

$$(f_1)_\nu=2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sum_{k=0}^{2^j-1} f_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)e^{-2\pi i\nu k/2^j},\quad (f_\rho)_\nu=2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sum_{k=0}^{2^j-1} f_\rho\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)e^{-2\pi i\nu k/2^j},$$

где $\widehat{\varphi}_\rho(\nu/2^j)\equiv 1$ при $|\nu|\le 2^{j-1}(1-\varepsilon)$, а при $2^{j-1}(1-\varepsilon)<|\nu|<2^{j-1}(1+\varepsilon)$ эти значения зависят от выбранной функции Мейера $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$.

Подставляя найденные значения коэффициентов Фурье в (16) и (17), получаем искомые представления изначально не заданных функций $U_1(1,x)$ и $U_\rho(\rho,x)$ через задаваемые функции $f(x)$ и $f_\rho(x)$:

$$\begin{aligned}U_1(1,x)&=\sum_{k=0}^{2^j-1} f_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)2^{-j}\bigg(\frac12+\sum_{\nu\ne0}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\frac{1}{1-\rho^{2\nu}}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}\bigg)\\&-\sum_{k=0}^{2^j-1} f_\rho\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)2^{-j}\sum_{\nu\ne0}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\frac{\rho^{|\nu|}}{1-\rho^{2|\nu|}}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)};\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}U_\rho(\rho,x)&=\sum_{k=0}^{2^j-1} f_\rho\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)2^{-j}\sum_{\nu\ne0}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\frac{1}{1-\rho^{2|\nu|}}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}\\&-\sum_{k=0}^{2^j-1} f_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)2^{-j}\bigg(\frac12-\sum_{\nu\ne0}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\frac{\rho^{|\nu|}}{1-\rho^{2|\nu|}}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}\bigg),\end{aligned}\tag{20}$$

правда, в рассматриваемом частном случае, когда $f_1,f_\rho\in\widetilde{V}_j^s$. Как будет показано чуть позже, правые части последних двух формул будут совпадать с интерполяционными проекциями функций $U_1(1,x)$ и $U_\rho(\rho,x)$ на подпространство $\widetilde{V}_j^s$ пространства $C_{2\pi}$. Продолжая $U_1(1,x)$ до функции, гармонической в единичном круге, а $U_\rho(\rho,x)$ — до гармонической вне круга радиуса ρ, получим следующее утверждение.

Лемма 3. *Если граничные значения $f_1(x)$ и $f_\rho(x)$ решения $U(r,x)$ задачи (7) лежат в подпространстве V_j^s, то функции $U_1(r,x)$ и $U_{\rho(r,x)}$, определяющие $U(r,x)$ в R_ρ, выражаются через f_1 и f_ρ следующим образом:*

$$\begin{aligned}U_1(r,x)&=\sum_{k=0}^{2^j-1} f_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)2^{-j}\bigg(\frac12+\sum_{\nu\ne0}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\frac{1}{1-\rho^{2|\nu|}}r^{|\nu|}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}\bigg)\\&-\sum_{k=0}^{2^j-1} f_\rho\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)2^{-j}\sum_{\nu\ne0}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\frac{\rho^{|\nu|}}{2^j}r^{|\nu|}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)},\end{aligned}$$

$$U_\rho(r,x)=\sum_{k=0}^{2^j-1} f_\rho\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)2^{-j}\sum_{\nu\ne0}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\frac{1}{1-\rho^{2|\nu|}}\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{|\nu|}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}$$

$$+\sum_{k=0}^{2^j-1} f_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)2^{-j}\bigg(\frac{1}{2}-\sum_{\nu\neq 0}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\frac{\rho^{|\nu|}}{1-\rho^{2|\nu|}}\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{|\nu|}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}\bigg).$$

Поскольку формулы (16), (17) получены для U_1 и U_ρ с помощью выполненных преобразований как представления правых частей формул (10) и (11) через задаваемые функции из $\widetilde{V}_j^s$, то они эквивалентны этим формулам. Просто они представлены в другом базисе. Поэтому функции $U_1(r,x)$ и $U_\rho(r,x)$ можно выразить и в интерполяционном базисе $\{\Phi_s^{jk}(r,x),\ \Phi_s^{jk}(\rho/r,x)\colon k=0,1,\dots,2^j-1\}$, для чего достаточно с помощью (19), (20) выписать значения $U_1(1,2\pi k/2^j)$ и $U_\rho(\rho,2\pi k/2^j)$ и подставить в (10) и (11). Это имеет смысл делать в конкретных случаях численно, когда нужно поправить исходные “зашумленные” данные $\{f_1(2\pi k/2^j), f_\rho(2\pi k/2^j)\colon x=0,1,\dots,2^j-1\}$, применяя процедуры дискретного всплеск-преобразования и известные методы борьбы с “шумами”.

С помощью формул для $U_1(r,x)$, $U_\rho(r,x)$, формулы (14) для $A\ln\rho$ и (8) после простых преобразований получаем следующую теорему.

Теорема. *Если граничные функции $f_1(x)$ и $f_\rho(x)$ задачи* (7) *принадлежат подпространству $\widetilde{V}_j^s$ пространства $C_{2\pi}$, то решение задачи* (7) *определяется формулой*

$$U(r,x)=U_j(r,x)=\sum_{k=0}^{2^j-1} f_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)2^{-j}\bigg(1+\sum_{\nu\neq 0}2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\frac{1}{r^{|\nu|}}\frac{r^{2|\nu|}-\rho^{2|\nu|}}{1-\rho^{2|\nu|}}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}\bigg)$$

$$+\sum_{k=0}^{2^j-1} f_\rho\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\sum_{\nu\neq 0}2^{-j}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\frac{\rho^{|\nu|}}{r^{|\nu|}}\cdot\frac{1-r^{2|\nu|}}{1-\rho^{2|\nu|}}e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}$$

$$+\frac{\ln r}{\ln\rho}\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big(f_\rho\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)-f_1\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Big)\quad (s=1,2,3).$$

Предыдущие три формулы определяют точное решение задачи (7) при довольно жестких ограничениях, согласно которым граничные функции $f_1(x)$ и $f_\rho(x)$ заданы в виде тригонометрических полиномов (если порядка n, то они обязательно вложены в подпространстве $\widetilde{V}_j^s$ при $j\geq\log_2(2n/(1-\varepsilon))$ с выбранным ε из $(0,1/3]$). Однако с помощью этих формул нетрудно выписать приближенное решение задачи для любых непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_\rho(x)$. При этом требуемую точность аппроксимации решения $U(r,x)$ можно заранее гарантировать, выбрав подходящее для этого значение параметра j, что легко сделать, если известна какая-либо характеристика гладкости граничных функций (оценка для модуля непрерывности $\omega(\delta,f)$, существование и норма в $C_{2\pi}$ какой-нибудь производной функции f, принадлежность f классу Гельдера CH^α с конкретными C и α: для $f=f_1$ и $f=f_\rho$).

Действительно, обозначив через $P_{s,j}f$ интерполяционную проекцию $f(x)\in C_{2\pi}$ на подпространство $\widetilde{V}_j^s$ кратномасштабного анализа, соответствующего параметру $s=1,2$ или 3, имеем

$$P_{s,j}f(x)=\sum_{k=0}^{2^j-1} f\Big(\frac{2\pi k}{2^j}\Big)\Phi_s^{jk}(x),$$

что в общем случае произвольных $f(x)$ из $C_{2\pi}$ совпадает при $f=f_1$ и $f=f_\rho$ с левыми частями формулы (18). С другой стороны, проекциям f_1 и f_ρ из (9) на $\widetilde{V}_j^s$ в силу леммы 1 соответствуют проекции на $\widetilde{V}_j$ функций $U_1(1,x)$ и $U_\rho(\rho,x)+A\ln\rho$ (которые по ранее упомянутой теореме Г. И. Голузина однозначно определяются постановкой задачи (7)). Поэтому

$$P_{s,j}f_1(x)=P_{s,j}U_1(1,x)+P_{s,j}U_\rho(1,x),$$

$$P_{s,j}f_\rho(x)=P_{s,j}U_1(\rho,x)+P_{s,j}U_\rho(\rho,x).$$

Поскольку до предыдущего абзаца все рассуждения, кроме предположения о структуре граничных функций, и выводы опирались только на указанный результат Г. М. Голузина и на однозначное, ограниченное в бесконечности продолжение тригонометрических полиномов с границ круга $|z| < 1$ и области $|z| > \rho$ до гармонических полиномов в обеих этих областях, и к тому же константа A по (14) не зависит от j, то эти рассуждения и выводы остаются справедливыми для интерполяционных проекций $P_{s,j}f_1$ и $P_{s,j}f_\rho$ (вместо самих функций f_1 и f_ρ из $C_{2\pi}$). Кроме того, константа $A\ln\rho = (f_\rho)_0 - (f_1)_0$ определяется в (14) как одна и та же при любом $j \in \mathbb{N}$. Следовательно, правые части выписанных формул в теореме представляют собой точное решение задачи (7) при замене в ее постановке граничных значений f_1, f_ρ на их приближения с помощью $P_{s,j}f_1(x)$ и $P_{s,j}f_\rho(x)$. А тогда в силу отмеченной однозначности продолжения тригонометрических полиномов с границы кольца R_ρ в кольцо и независимости константы $A\ln\rho$ от j функция $U_j(r,x)$ в этой теореме есть интерполяционная проекция (по точкам $e^{2\pi ik/2^j}$ и $\rho e^{2\pi ik/2^j}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$, на границе ∂R_ρ) решения $U(r,x)$ задачи (7):

$$U_{j,s}(r,x) = P_{s,j}(U(r,x), \partial R_\rho) \quad (s = 1, 2, 3)$$

на соответствующее подпространство $V_j^s(R_\rho)$. Тогда, применяя принцип максимума для гармонических функций и оценку из [1, с. 266], получаем окончательное

Утверждение. *При любом $j \in \mathbb{N}$ и $s = 1, 2$ или 3 гармонические функции $U_j(r,x)$, определенные в теореме, приближают решение краевой задачи $P_{s,j}f_1(x)$ со следующей оценкой точности*:

$$\|U(r,x) - U_{j,s}(r,x)\|_{C_{2\pi}} \le (1 + \|S_{s,2^j})\big\{E_{N_{\varepsilon,j}}(f_1)_{C_{2\pi}} + E_{N_{\varepsilon,j}}(f\rho)_{C_{2\pi}}\big\}, \quad N_{\varepsilon,j} = [2^{j-1}(1+\varepsilon)].$$

Если функция $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ мейеровского типа, определяющая всплески-папы $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2, 3)$, вещественная, четная, неотрицательная, а на интервале $((1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2)$ с центром симметрии в точке $(1/2, 1/2)$, причем с ограниченной вариацией на $\mathbb{R}$ функции $(\varphi_\varepsilon^2(\omega))'_\omega$, то

$$\|S_{s,2^j}\| \le \Big(\frac{4}{\pi} + \varepsilon + 1\Big)\Bigg(\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\big((\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega))^2\big)'_\omega + \delta_{s,2}\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\big((\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1))\big)'_\omega\Bigg).$$

Таким образом, применяя любую из известных оценок наилучших приближений $E_n(f)_{C_{2\pi}}$ непрерывных функций тригонометрическими полиномами порядка n через известную характеристику гладкости функций, например, неравенство Н. П. Корнейчука [5] $E_n(f) \le \omega(\pi/n, f)$ или неравенство Фавара [6] $E_n(f) < \pi/2(n+1)^2\|f^{(r)}\|_{C_{2\pi}}$ для 2π-периодических функций $f(x)$ с $f^{(r)}(x) \in C_{2\pi}$, можно выбрать j таким, чтобы погрешность аппроксимации решения $U(r,x)$ функций $U_{j,s}(r,x)$ была меньше требуемой заранее из практических соображений точности. После этого можно вычислить функции $U_{j,s}$ из теоремы при найденном значении j.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Subbotin Yu.N., Chernykh N.I.** Interpolation wavelets in boundary value problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2018. Vol. 300, Suppl. 1. P. 172–183. doi: 10.1134/S0081543818020177 .
2. **Donoho D.L.** Interpolating wavelet transforms: preprint. Stanford: Stanford University, 1992. 54 p.
3. **Голузин Г.М.** Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнений Лапласа и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Мат. сб. 1934. Т. 41, № 2. С. 246–278.
4. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Гармонические всплески и асимптотика решения задачи Дирихле в круге с малым отверстием // Мат. моделирование. 2002. Т. 14, № 5. С. 17–30.

5. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения. М., Наука. 1976. 320 с.
6. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.; Л: Гостехиздат, 1947. 323 с.

Поступила 05.09.2018
После доработки 21.11.2018
Принята к публикации 26.11.2018

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург,
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Interpolation wavelets in boundary value problems. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2018, vol. 300, suppl. 1, pp. 172–183. doi: 10.1134/S0081543818020177 .
2. Donoho D.L. *Interpolating wavelet transforms*: preprint. Stanford: Stanford University, 1992, 54 p.
3. Goluzin G.M. The solution of the basic plane problems of a mathematical physics for the case of Laplace equations and a multiply connected domains bounded by circular curves (the method of functional equations), *Mat. Sat*, 1934, vol. 41, no. 2, pp. 246–278. (in Russian)
4. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Harmonic wavelets and asymptotics of the solution of the Dirichlet problem in a circle with close-meshed opening. *Mat. modeling*, 2002, vol. 14, no. 5, pp. 17–30. (in Russian)
5. Korneychuk N.P.*Extreme problems of approximation theory.* M., Science. 1976. 320 p. (in Russian)
6. Akhiezer N.I. *Lectures on the theory of approximation.* M.; L: Gostekhizdat, 1947. (in Russian)

Received September 05, 2018
Revised November 21, 2018
Accepted November 26, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Yurii Nikolaevich Subbotin, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: yunsub@imm.uran.ru .

Nikolai Ivanovich Chernykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: chernykh@imm.uran.ru .