ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 519.658.4

МЕТОДЫ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК, АДАПТИРОВАННЫЕ К НЕСОБСТВЕННЫМ ЗАДАЧАМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Л. Д. Попов

Для задач линейного программирования рассматриваются схемы формирования некоторого обобщенного центрального пути, возникающие при одновременном использовании внутренних и внешних штрафных слагаемых в традиционной функции Лагранжа и порождаемых ею минимаксных задачах. Новые схемы обладают тем преимуществом, что не требуют априорного знания допустимых внутренних точек в прямой или двойственной задаче. Более того, будучи примененными к задачам с несовместными ограничениями, они автоматически приводят к некоторым их обобщенным решениям, имеющим важное прикладное содержание. Приводятся описание алгоритмов, их обоснование и результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: линейное программирование, двойственность, методы штрафных функций, методы регуляризации, несобственные задачи, центральный путь.

L. D. Popov. Interior point methods adapted to infeasible linear programs.

For linear programs, we consider schemes for the formation of a generalized central path, which arise under the simultaneous use of interior and exterior penalty terms in the traditional Lagrange function and the minimax problems generated by it. The advantage of the new schemes is that they do not require the a priori knowledge of feasible interior points in the primal or dual problem. Moreover, when applied to problems with inconsistent constraints, the schemes automatically lead to some of their generalized solutions, which have important applied content. Descriptions of the algorithms, their justification, and results of numerical experiments are presented.

Keywords: linear programming, duality, penalty function methods, regularization methods, infeasible problems, central path.

MSC: 90C05, 90C46

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-208-216

Введение

Пусть имеется пара задач линейного программирования (ЛП): прямая

$$\min\{(c,x)\colon\ Ax=b,\ x\geq 0\} \tag{1}$$

и двойственная

$$\max\{(b,y)\colon\ A^Ty\leq c\}, \tag{2}$$

где векторы $c\in\mathbb{R}^n$, $b\in\mathbb{R}^m$ и матрица $A=(a_{ij})_{m\times n}$ заданы, векторы $x\in\mathbb{R}^n$ и $y\in\mathbb{R}^m$ соответствуют прямым и двойственным переменным, $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов.

Наиболее эффективные современные методы решения задач линейного программирования (см., например, [1–5]) основаны на замещении связанной с ними классической функции Лагранжа ее различными расширениями, в частности, расширением

$$L_1^{\mu}(x,y)=(c,x)-(y,Ax-b)-\mu\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-07-00266).

где первые два слагаемых соответствуют классической функции Лагранжа, а последнее слагаемое представляет собой внутреннюю штрафную функцию для требований неотрицательности прямых переменных, $\mu > 0$ — малый параметр.

Обозначим $\mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x > 0\}$. При тех или иных дополнительных условиях, на обсуждении которых пока не будем задерживаться, функция $L_1^\mu(x,y)$ имеет единственную седловую точку $[\bar{x}(\mu), \bar{y}(\mu)]$ относительно области $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^m$, а ее компоненты $\bar{x}(\mu)$ и $\bar{y}(\mu)$ являются каждая решением своей задачи из стандартной пары минимаксных задач:

$$\min_x \max_y L_1^\mu(x,y) = \min_x \Phi_\mu(x), \tag{3}$$

$$\max_y \min_x L_1^\mu(x,y) = \max_y \Phi^*_\mu(y), \tag{4}$$

порождаемых функцией $L_1^\mu(x,y)$.

Напомним конкретный вид целевых функций в задачах (3), (4). Поскольку

$$\nabla_x L_1^\mu(x,y) = c - A^T y - \mu \operatorname{diag}(x)^{-1} e = 0$$

при $x(y) = \mu \operatorname{diag}(c - A^T y)^{-1} e$, то

$$\Phi^*_\mu(y) = \min_x L_1^\mu(x,y) = L_1^\mu(x(y),y) = (b,y) + \mu \sum_{i+1}^{n} \ln(c_i - (A_i, y)) + \nu_0;$$

здесь $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — столбцы матрицы A, $\operatorname{diag}(z)$ — диагональная матрица с элементами z_i вектора z на диагонали, $e = [1,1,\ldots,1]^T$ — вектор подходящей размерности, составленный из единиц (при решении задачи (4) последнее слагаемое $\nu_0 = n\mu(1 - \ln\mu)$ можно опустить как не зависящее от y).

В свою очередь

$$\Phi_\mu(x) = \max_y L_1^\mu(x,y) = \begin{cases} (c,x) - \mu \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i & \text{при} \quad Ax - b = 0; \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Седловые точки $[\bar{x}(\mu)], \bar{y}(\mu)]$, рассматриваемые как функции параметра $\mu > 0$, в совокупности образуют так называемый *центральный путь*, при благоприятных условиях ведущий (сходящийся при $\mu \to +0$) к $[\bar{x}, \bar{y}]$ — некоторой точке, компоненты которой $\bar{x}$ и $\bar{y}$ являются каждая решением своей задачи из исходной пары задач (1), (2).

Точки центрального пути принято искать, исходя из необходимых и достаточных условий оптимальности для задач (3), (4). Эти условия обычно сводят в нелинейную систему уравнений вида

$$\Upsilon^0(x,y,v;\mu) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(v)\operatorname{diag}(x)e - \mu e \\ Ax - b \\ A^T y - c + v \end{bmatrix} = 0, \tag{5}$$

где $x > 0$, $v > 0$. Поскольку прямые компоненты седловой точки однозначно восстанавливаются по ее двойственным компонентам по формуле

$$\bar{x}(\mu) = \mu \operatorname{diag}(\bar{v}(\mu))^{-1} e = \mu \operatorname{diag}(c - A^T \bar{y}(\mu))^{-1} e,$$

то из приведенной выше системы можно исключить прямые и дополнительные переменные и прийти к сокращенной системе

$$b - \mu A \operatorname{diag}(c - A^T y)^{-1} e = 0, \tag{6}$$

в которой решение должно удовлетворять условию $c - A^T y > 0$.

Типовая схема вычислений точек центрального пути состоит в построении последовательности

$$z^k = [x^k, y^k, v^k], \qquad z^{k+1} = z^k - \alpha_k p(z^k, \mu_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\alpha_k > 0$ — шаговые параметры, $\mu_k \to +0$ — некоторая убывающая последовательность, задаваемая заранее или генерируемая в ходе вычислений, $p(z, \mu)$ — направление спуска для соответствующих компонент центрального пути. Начальное приближение $z^0 = [x^0, y^0, v^0]$ выбирается таким, чтобы выполнялись условия $x^0 > 0$, $v^0 > 0$. Шаговый параметр выбирается так, чтобы последнее условие выполнялось и для последующих элементов последовательности.

Что касается направления спуска, то последнее обычно определяется в соответствии с методом Ньютона как

$$p(z, \mu) = -[\mathcal{H}_0(z, \mu)]^{-1} \Upsilon^0(z, \mu),$$

где $\mathcal{H}_0(z, \mu) = \nabla \Upsilon^0(z, \mu)$ — Якобиан системы (5), т. е.

$$\mathcal{H}_0(z = [x, y, v], \mu) = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(v) & 0 & \mathrm{diag}(x) \\ A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & E \end{bmatrix},$$

где E — единичная матрица соответствующей размерности.

Примером алгоритмов описанного типа, но уже в применении к сокращенной системе нелинейных уравнений (6), является известный алгоритм Гонзага [6].

А л г о р и т м 1 Гонзага для решения задач (1), (2)

Даны: $\theta = \left(1 - \dfrac{1}{41\sqrt{n}}\right)$, $\mu_0 > 0$ и $y^0 \in \mathbb{R}^m$ такой, что $A^T y^0 < c$.
Полагаем: $k = 0$.
Шаг 1. Переопределяем $\mu_{k+1} = (1 - \theta)\mu_k$.
Шаг 2. Вычисляем

$$y^{k+1} = y^k + \left[\nabla^2_{yy} \Psi_1^{\mu_{k+1}}(y^k)\right]^{-1} \nabla_y \Psi_1^{\mu_{k+1}}(y^k).$$

Шаг 3. Заменяем k на $k+1$ и возвращаемся на *Шаг* 1.

Заметим, что в алгоритме Гонзага штрафной параметр пересчитывается на каждой итерации метода Ньютона. Именно поэтому вносимые в него изменения должны быть весьма малы.

Вернемся к обсуждению условий применимости описанного выше подхода к решению задач (1), (2), а именно, обратим внимание на то, что для применения всех описанных выше алгоритмов необходимо наличие внутренних точек у допустимых областей решаемых задач. Это и понятно, так как все алгоритмы фактически построены на методе внутренних штрафных функций.

Наиболее часто на практике, однако, происходит нарушение не только условия наличия внутренней точки у допустимого множества прямой задачи, но даже простого условия непустоты такого множества. Задачи с противоречивыми системами ограничений принято называть *несобственными* [3]. Противоречивость системы ограничений прямой задачи может определяться целым рядом факторов, таких как неточность сбора исходных данных математической модели, переопределенность требований к допустимому плану, несогласованность ресурсных ограничений и выдвигаемых целей при многокритериальном подходе и тому подобное. Естественно требовать, чтобы вычислительные методы, столкнувшись с фактом несобственности исходной задачи, не просто сообщали нам о возникшей ошибке, но и объясняли бы, чем эта ошибка вызвана, т. е. находили бы “узкие” места исходной оптимизационной модели и предлагали пути их корректировки (развязки), а также предлагали бы разумные обобщенные (компромиссные) решения противоречивой модели.

Цель данной работы — адаптировать методы центрального пути к несобственным задачам линейного программирования.

1. Расширенная функция Лагранжа

Свяжем теперь с задачами (1), (2) расширенную функцию Лагранжа

$$L_2^\mu(x,y) = (c,x) - (y, Ax-b) - \frac{\mu}{2}\|y\|^2 - \mu\sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

где первые два слагаемых соответствуют классической функции Лагранжа, третье слагаемое отвечает за регуляризацию функции Лагранжа по двойственным переменным, последнее слагаемое представляет собой внутреннюю штрафную функцию для требований неотрицательности прямых переменных, $\mu > 0$ — малый параметр, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора.

Функция $L_2^\mu(x,y)$ порождает пару минимаксных задач вида

$$\min_x \max_y L_2^\mu(x,y) = \min_x \Psi_\mu(x), \tag{7}$$

$$\max_y \min_x L_2^\mu(x,y) = \max_y \Psi_\mu^*(y). \tag{8}$$

Уточним вид целевых функций в задачах (7), (8). Поскольку

$$\nabla_y L_2^\mu(x,y) = b - Ax - \mu y = 0$$

при $y(x) = -\mu^{-1}(Ax-b)$, то

$$\Psi_\mu(x) = \max_y L_2^\mu(x,y) = L_2^\mu(x,y(x)) = (c,x) + \frac{1}{2\mu}\|Ax-b\|^2 - \mu\sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

В свою очередь нетрудно проверить, что

$$\nabla_x L_2^\mu(x,y) = c - A^T y - \mu\,\mathrm{diag}(x)^{-1}e = 0$$

при $x(y) = \mu\,\mathrm{diag}(c - A^T y)^{-1}e$, откуда следует, что

$$\Psi_\mu^*(y) = \min_x L_2^\mu(x,y) = L_2^\mu(x(y),y) = (b,y) - \frac{\mu}{2}\|y\|^2 + \mu\sum_{i=1}^n \ln(c_i - (A_i,y)) + \nu_0.$$

Заметим, что последнее слагаемое $\nu_0 = n\mu(1-\ln\mu)$ здесь можно опустить, поскольку оно не влияет на поиск максимума функции $\Psi_\mu^*(y)$ по y.

Свойства задач (7), (8) рассматривались в работах [7; 8].

Утверждение 1. *Пусть внутренность допустимой области задачи* (2) *не пуста. Тогда при любых* $\mu > 0$ *задачи* (7) *и* (8) *разрешимы, причем имеют единственные решения* $x(\mu) > 0$ *и* $y(\mu)$ *соответственно, которые в паре образуют* (*также единственную*) *седловую точку* $[x(\mu), y(\mu)]$ *функции* $L_2^\mu(x,y)$ *относительно области* $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^m$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [8].

Чтобы связать решение минимаксных задач (7) и (8) с (обобщенными) решениями исходных задач (1) и (2), введем ряд дополнительных понятий. Погрузим исходную задачу (1) в параметрическое семейство задач вида

$$\min\{(c,x)\colon Ax = b - u,\ x \geq 0\}, \tag{9}$$

где u — векторный параметр коррекции правых частей уравнений исходной задачи. Введем обозначение $M(u) = \{x\colon Ax = b - u,\ x \geq 0\}$ и определим вектор оптимальной коррекции

$$\bar{u} = \arg\min\{\|u\|\colon M(u) \neq \varnothing\}.$$

В силу свойств метрической проекции на выпуклое замкнутое множество такой вектор всегда существует и является единственным.

Определим обобщенное (аппроксимационное) решение несобственной задачи (1) как обычное решение задачи

$$\min\{(c, x)\colon Ax = b - \bar{u},\ x \geq 0\}. \tag{10}$$

Телесность допустимой области задачи (2) обеспечивает разрешимость задачи (10) и ограниченность ее оптимального множества.

Подчеркнем, что в случае разрешимости исходной задачи $\bar{u} = 0$, и введенное выше обобщенное решение совпадает с ее обычным решением. В завершение укажем на альтернативное представление области

$$M(\bar{u}) = \operatorname{Arg}\min_{x \geq 0} \|Ax - b\|^2.$$

Это представление является связующим звеном между обсуждаемой тематикой и теорией штрафных функций.

Утверждение 2. *Пусть* $\mathrm{opt}(u)$ *— оптимальное значение задачи* (9)*. В предположениях предыдущего утверждения относительно допустимой области задачи* (2) *имеет место сходимость*

$$\mu y(\mu) = b - Ax(\mu) = u(\mu) \to \bar{u}, \qquad (c, x(\mu)) \to \mathrm{opt}(\bar{u})$$

при $\mu \to +0$*. В частности, если исходная задача* (1) *разрешима, то* $\mu y(\mu) \to 0$.

Доказательство этого утверждения также можно найти в [7; 8].

По аналогии с подходом, представленном во введении, условия равенства нулю всех градиентов функции $L_2^{\mu}(x, y)$ в седловой точке можно переписать в виде нелинейной системы уравнений с дополнительными переменными

$$\Upsilon(x, y, v; \mu) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(v)\operatorname{diag}(x)e - \mu e \\ Ax - b + \mu y \\ A^T y - c + v \end{bmatrix} = 0. \tag{11}$$

По теореме о неявных функциях система (11) определяет непрерывную векторную функцию $z(\mu) = [x(\mu), y(\mu), v(\mu)]$ от параметра $\mu \to +0$. Соответствующую траекторию в пространстве переменных системы (11) можно назвать *обобщенным* центральным путем.

С вычислительной точки зрения представляет интерес понижение размерности системы (11) путем исключения из нее прямых и дополнительных переменных и перехода к сокращенной системе

$$\mu A \operatorname{diag}(c - A^T y)^{-1} e - b + \mu y = 0. \tag{12}$$

Последняя будет описывать точки максимума $y(\mu)$ функции

$$\Psi_{\mu}^{*}(y) = (b, y) - \frac{\mu}{2}\|y\|^2 + \mu \sum_{i=1}^{n} \ln(c_i - (A_i, y)),$$

записанной без последнего постоянного слагаемого.

Для удобства расчетов в несобственном случае, хотя это и не принципиально, можно также сделать замену переменных $u = \mu y$. Тогда система (12) примет вид

$$F(u, \mu) = \mu A \operatorname{diag}(c - \mu^{-1} A^T u)^{-1} e - b + u = 0. \tag{13}$$

Уточним, что вычисляется решение этой системы $u(\mu) = \mu y(\mu)$, лежащее внутри области

$$\Omega = \{u \colon \mu c - A^T u > 0\}.$$

Это же самое решение $u(\mu)$ будет точкой минимума функции

$$G_\mu(u) = -\mu \Psi^*_\mu(u) = -(b, u) + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \mu^2 \sum_{i=1}^{n} \ln(c_i - \mu^{-1}(A_i, u)),$$

градиент которой как раз и равен $F(u, \mu)$.

Повторимся, что по последовательности $u(\mu)$ можно восстановить соответствующие компоненты прямого решения $x(\mu) = \mu \operatorname{diag}(c - \mu^{-1} A^T u)^{-1} e$.

2. Двухуровневая организация вычислений при решении сокращенной системы

Для поиска предельных точек траектории, порождаемой сокращенной системой (13), можно предложить ту же типовую алгоритмическую схему, что была представлена во введении. А именно, будем генерировать последовательность приближений

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_k p(u^k, \mu_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\alpha_k > 0$ — шаговые параметры, $\mu_k \to +0$ — некоторая убывающая последовательность, задаваемая заранее или генерируемая в ходе вычислений, $p(u, \mu)$ — направление спуска для соответствующих компонент центрального пути. Начальное приближение u^0 выбирается таким, чтобы выполнялось условие $\mu_0 c - A^T u^0 > 0$. Шаговый параметр в дальнейшем выбирается так, чтобы это условие выполнялось и для последующих элементов последовательности.

Что касается направления спуска, то последнее определяется в соответствии с методом Ньютона в виде

$$p(u, \mu) = -[\nabla_u F(u, \mu)]^{-1} F(u, \mu),$$

где $\nabla_u F(u, \mu)$ — Якобиан системы (13), т. е. $\nabla_u F(u, \mu) = E + A \operatorname{diag}(c - \mu^{-1} A^T u)^{-2} A^T$.

Конкретным представителем методов описанного типа в применении к сокращенному уравнению (13) является следующий алгоритм.

А л г о р и т м 2 для решения задач (1), (2)

Даны: $\nu > 0$, $\theta \in (0, 1)$, $\mu_0 > 0$ и $u^0 \in \mathbb{R}^m$ такой, что $A^T u^0 < \mu_0 c$.
Полагаем: $s = 0$, $k = 0$.
Шаг 1. Вычисляем $u^{k+1} = u^k + \left[\nabla_u F(u^k, \mu_k)\right]^{-1} F(u^k, \mu_k)$.
Шаг 2. Если $\|F(u^k, \mu_k)\| \geq \nu \mu_k$, то параметр $\mu_{k+1} = \mu_k$ оставляем прежним.
Иначе уменьшаем его значение по правилу $\mu_{k+1} = (1 - \theta)\mu_k$.
Шаг 3. Заменяем k на $k + 1$ и возвращаемся на *Шаг* 1.

Здесь число шагов метода Ньютона при одном и том же значении штрафного параметра регулируется условием на точность промежуточной оптимизации.

Приведем обоснование сходимости предлагаемого алгоритма.

Утверждение 3. *Последовательность u^k, порождаемая алгоритмом 2, а также вспомогательные последовательности $y^k = \mu_k^{-1} u^k$ и $x^k = \mu_k \operatorname{diag}(c - \mu_k^{-1} A^T u^k)^{-1} e$ обладают следующими свойствами:*

(a) $u^k \to \bar{u}$ *при* $k \to +\infty$;
(b) $x^k > 0$, $Ax^k - b \to \bar{u}$ *при* $k \to +\infty$;
(c) $(c, x^k) \to \operatorname{opt}(\bar{u})$ *при* $k \to +\infty$.

В случае собственности исходной задачи также

(d) $\bar{u} = 0$, $A^T y^k = \mu_k^{-1} A^T u^k < c$, $(b, y^k) \to \operatorname{opt}(0)$ *при* $k \to +\infty$.

Доказательство. Во-первых, в силу свойств метода Ньютона число операций для достижения любой наперед заданной точности приближенного решения исходной системы уравнений конечно, и потому имеем $\mu_k \to +0$. Следовательно (см. утверждение 2), для точного решения исходной системы имеем $u(\mu_k) \to \bar{u}$ при $\to +\infty$. Во-вторых,

$$\|u^k - u(\mu_k)\| \le \|F(u^k, \mu_k)\| < \nu\mu_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

В самом деле, выше уже отмечалось, что $u(\mu_k)$ является также точкой минимума функции $G_{\mu_k}(u)$. Последняя имеет структуру

$$G_\mu(u) = f_\mu(u) + \frac{1}{2}\|u\|^2, \quad \text{где} \quad f_\mu(u) = -(b, u) - \mu^2 \sum_{i=1}^{n} \ln(c_i - \mu^{-1}(A_i, u)).$$

Здесь функция $f_\mu(u)$ выпукла и дифференцируема. Поскольку субградиентное отображение любой выпуклой функции монотонно и $\nabla G_\mu(u(\mu)) = F(u(\mu), \mu) = 0$, то

$$\|F(u^k, \mu_k)\|\|u^k - u(\mu_k)\| \ge F(u^k, \mu_k)^T(u^k - u(\mu_k)) = (\nabla G_{\mu_k}(u^k) - \underbrace{\nabla G_{\mu_k}(u(\mu_k))}_{=0}, u^k - u(\mu_k))$$

$$= \underbrace{(\nabla f_{\mu_k}(u^k) - \nabla f_{\mu_k}(u(\mu_k)), u^k - u(\mu_k))}_{\ge 0} + \|u^k - u(\mu_k)\|^2 \ge \|u^k - u(\mu_k)\|^2,$$

что и требовалось.

Таким образом, справедливость п. (a) установлена.

В-третьих, рассмотрим вспомогательную последовательность $x^k = \mu_k \operatorname{diag}(c - \mu_k^{-1} A^T u^k)^{-1} e$. Из правил алгоритма 2 следует, что $F(u^k, \mu_k) = Ax^k - b + u^k$, и потому каждое x^k удовлетворяет ограничениям своей задачи ЛП вида

$$\min\{(c, x)\colon Ax = b - u^k + F(u^k, \mu_k),\ x \ge 0\},$$

а соответствующий вектор $y^k = \mu_k^{-1} u^k$ — ограничениям задачи, двойственной к ней, т. е. задачи

$$\max\{(b - u^k + F(u^k, \mu_k), y)\colon A^T y \le c\}.$$

При этом значения их целевых функций различаются незначительно:

$$(c, x^k) - (b - u^k + F(u^k, \mu_k), y^k) = (c, x^k) - (Ax^k, \mu_k^{-1} u^k) = (c - \mu_k^{-1} A^T u^k, x^k)$$
$$= (c - \mu_k^{-1} A^T u^k, \mu_k \operatorname{diag}(c - \mu_k^{-1} A^T u^k)^{-1} e) = n\mu_k \to 0.$$

Следовательно, для вектора коррекции $w^k = u^k - F(u^k, \mu_k)$ имеем

$$|(c, x^k) - \operatorname{opt}(w^k)| < n\mu_k, \qquad |(b - w^k, y^k) - \operatorname{opt}(w^k)| < n\mu_k.$$

Поскольку уже установлено, что $w^k \to \bar{u}$, то пп. (b) и (c) также оказываются справедливы. Последний п. (d) верен в силу того, что в случае собственности исходной задачи $\bar{u} = 0$.

Утверждение доказано.

3. Результаты численных экспериментов

Вычислительный эксперимент проводился на разрешимых задачах линейного программирования средней размерности (500 уравнений и 1000 неизвестных) в каноническом формате в среде MATLAB. Разреженные матрицы коэффициентов тестовых задач генерировались при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением от -1 до 1. Заполненность матриц ненулевыми элементами составляла 1–3%. Правые части ограничений и коэффициенты целевой функции подбирались таким образом, чтобы решение задачи совпадало с некоторым заданным заранее (при этом использовались приемы работы [7]). Точное решение удовлетворяло строгим условиям дополнительности.

Точность получаемого решения при применении разных алгоритмов

μ	θ	Метод Гонзага				Модифицированный метод			
		iter	Δu	Δx	ΔF	*iter*	Δu	Δx	ΔF
0.001	0.9	122	$8 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	135	$4 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
0.001	0.8	74	$8 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	126	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
0.0001	0.9	118	$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$	155	$8 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$
0.0001	0.8	63	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$	116	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-9}$
0.00001	0.9	13	$8 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	18	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
0.00001	0.8	51	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	101	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-9}$
0.000001	0.9	111	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	138	$4 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
0.000001	0.8	60	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	93	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$

Выше в таблице представлены типичные результаты расчетов. Стартовые приближения совпадали. Сравнивались траектории точности получаемых приближений в зависимости от методов (наряду со значениями для модифицированного метода приведены данные для метода Гонзага) и в зависимости от стартовых значений штрафного параметра $\mu_0 > 0$ и параметра демпфирования $\theta < 1$. Здесь колонка *iter* показывает число итераций, колонка Δx — точность прямого решения, колонка Δu — точность выполнения ограничений, колонка ΔF — точность по оптимальному значению задачи. Векторное отклонение измерялось в чебышевской метрике.

Из приведенных результатов следует, что модифицированный метод дает чуть ниже точность выполнения ограничений задачи в собственном случае. Он также требует несколько большего числа итераций по сравнению с методом Гонзага для достижения той же точности приближенного решения. Это объясняется тем, что в модифицированном методе фактически работает трехуровневая схема последовательной оптимизации (целевая функция, штраф за нарушение ограничений и параметр регуляризации), в то время как метод Гонзаго построен на двухуровневой схеме штрафных функций (целевая функция, штраф за нарушение ограничений).

Как мы видим, плата за дополнительные возможности метода по поиску обобщенных решений несобственных задач ЛП сравнительно не велика.

Заключение

Для задач линейного программирования предложены схемы формирования центрального пути, возникающие при одновременном использовании внутренних и внешних штрафных слагаемых в традиционной функции Лагранжа и порождаемых ею минимаксных задачах. Новые схемы обладают тем преимуществом, что не требуют априорного знания допустимых внутренних точек в прямой или двойственной задаче. Более того, будучи примененными к задачам с несовместными ограничениями, они автоматически приводят к некоторым их обобщенным решениям, имеющим важное прикладное содержание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.** Theory and algorithms for linear optimization. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1997. 484 p.
2. **Eremin I. I.** Theory of linear optimization. Inverse and ill-posed problems series. Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002. 248 p.
3. **Еремин И. И., Мазуров Вл. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
4. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.

5. **Васильев Ф. П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
6. **Еремин И. И., Астафьев Н. Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
7. **Popov L. D.** Use of barrier functions for optimal correction of improper problems of linear programming of the 1st kind // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73, № 3. P. 417–424. doi: 10.1134/S0005117912030010 .
8. **Popov L. D.** Dual approach to the application of barrier functions for the optimal correction of improper linear programming problems of the first kind // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. Vol. 288, suppl. 1. P. 173–179. doi: 10.1134/S0081543815020170 .

Поступила 24.08.2018
После доработки 08.11.2018
Принята к публикации 12.11.2018

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор кафедры ВКТ
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: popld@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph. *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Approach.* N Y: Wiley, 1997, 454 p. ISBN: 0471956767 .
2. Eremin I.I. *Theory of linear optimization. Inverse and Ill-posed problems series.* Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002, 248 p. ISBN: 906764353X .
3. Eremin I.I., Mazurov V.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper Problems of Linear and Convex Programming]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 336 p.
4. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Methods for Solutions of Ill-Posed Problems.* N Y: Wiley, 1977, 258 p. ISBN: 0470991240 . Original Russian text published in Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1979, 285 p.
5. Vasil'ev F.P. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extremal problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 400 p.
6. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoriyu linejnogo i vypuklogo programmirovaniya* [Introduction to the theory of linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 191 p.
7. Popov L.D. Use of barrier functions for optimal correction of improper problems of linear programming of the 1st kind. *Autom. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 417–424. doi: 10.1134/S0005117912030010 .
8. Popov L.D. Dual approach to the application of barrier functions for the optimal correction of improper linear programming problems of the first kind. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. 173–179. doi: 10.1134/S0081543815020170 .

Received August 24, 2018
Revised November 08, 2018
Accepted November 12, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-07-00266).

Leonid Denisovich Popov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: popld@imm.uran.ru .