ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.977

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА — СЕГЕ ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ ВЕЙЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_0[1]

А. О. Леонтьева

Во множестве $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов f_n порядка n с комплексными коэффициентами рассматриваются производные Вейля (дробные производные) $f_n^{(\alpha)}$ вещественного неотрицательного порядка α. Неравенство $\|D_\theta^\alpha f_n\|_p \le B_n(\alpha,\theta)_p\|f_n\|_p$ для оператора Вейля — Сеге $D_\theta^\alpha f_n(t) = f_n^{(\alpha)}(t)\cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)}(t)\sin\theta$ во множестве $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов является обобщением неравенства Бернштейна. Такие неравенства изучаются уже 90 лет. Г. Сеге в 1928 г. получил точное неравенство $\|f_n'\cos\theta + \tilde{f}_n'\sin\theta\|_\infty \le n\|f_n\|_\infty$. В дальнейшем А. Зигмунд (1933) и А. И. Козко (1998) показали, что при $p \ge 1$ и вещественных $\alpha \ge 1$ при всех $\theta \in \mathbb{R}$ константа $B_n(\alpha,\theta)_p$ равна n^α. Случай $p = 0$ представляет дополнительный интерес в связи с тем, что константа $B_n(\alpha,\theta)_p$ является наибольшей по $p \in [0,\infty]$ именно при $p = 0$. В. В. Арестов (1994) показал, что при $\theta = \pi/2$ (в случае сопряженного полинома) для целых неотрицательных α величина $B_n(\alpha,\pi/2)_0$ имеет показательный рост по n и ведет себя как $4^{n+o(n)}$. Из его результата следует, что при $\theta \ne 2\pi k$ поведение константы такое же. Но в случае $\theta = 2\pi k$ и $\alpha \in \mathbb{N}$ В. В. Арестов (1979) показал, что точная константа равна n^α. Ранее автором (2018) исследовалось неравенство Бернштейна в случае $p = 0$ для положительных нецелых α. Была получена логарифмическая асимптотика точной константы: $\sqrt[n]{B_n(\alpha,0)_0} \to 4$ при $n \to \infty$. В данной работе этот результат обобщается на все $\theta \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова: тригонометрический полином, производная Вейля, сопряженный полином, неравенство Бернштейна — Сеге, пространство L_0.

A. O. Leont'eva. Bernstein–Szegő inequality for the Weyl derivative of trigonometric polynomials in L_0.

In the set $\mathscr{T}_n$ of trigonometric polynomials f_n of order n with complex coefficients, we consider Weyl (fractional) derivatives $f_n^{(\alpha)}$ of real nonnegative order α. The inequality $\left\|D_\theta^\alpha f_n\right\|_p \le B_n(\alpha,\theta)_p\|f_n\|_p$ for the Weyl–Szegő operator $D_\theta^\alpha f_n(t) = f_n^{(\alpha)}(t)\cos\theta + \tilde{f}_n^{(\alpha)}(t)\sin\theta$ in the set $\mathscr{T}_n$ of trigonometric polynomials is a generalization of the Bernstein inequality. Such inequalities have been studied for 90 years. G. Szegő obtained the exact inequality $\left\|f_n'\cos\theta + \tilde{f}_n'\sin\theta\right\|_\infty \le n\left\|f_n\right\|_\infty$ in 1928. Later on, A. Zygmund (1933) and A. I. Kozko (1998) showed that, for $p \ge 1$ and real $\alpha \ge 1$, the constant $B_n(\alpha,\theta)_p$ is equal to n^α for all $\theta \in \mathbb{R}$. The case $p = 0$ is of additional interest because it is in this case that $B_n(\alpha,\theta)_p$ is largest over $p \in [0,\infty]$. In 1994 V. V. Arestov (1994) showed that, for $\theta = \pi/2$ (in the case of the conjugate polynomial) and integer nonnegative α, the quantity $B_n(\alpha,\pi/2)_0$ grows exponentially in n as $4^{n+o(n)}$. It follows from his result that the behavior of the constant for $\theta \ne 2\pi k$ is the same. However, in the case $\theta = 2\pi k$ and $\alpha \in \mathbb{N}$, Arestov showed in 1979 that the exact constant is n^α. The author investigated the Bernstein inequality in the case $p = 0$ for positive noninteger α earlier (2018). The logarithmic asymptotics of the exact constant was obtained: $\sqrt[n]{B_n(\alpha,0)_0} \to 4$ as $n \to \infty$. In the present paper, this result is generalized to all $\theta \in \mathbb{R}$.

Keywords: trigonometric polynomial, Weyl derivative, conjugate polynomial, Bernstein–Szegő inequality, space L_0.

MSC: 42A05, 41A17, 26A33

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-199-207

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Введение

Пусть $\mathscr{T}_n$ есть множество тригонометрических полиномов порядка n с комплексными коэффициентами

$$f_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),\quad a_k,b_k\in\mathbb{C}. \tag{0.1}$$

Вместе с полиномом f_n будем рассматривать сопряженный к нему полином

$$\tilde{f}_n(t)=\sum_{k=1}^{n}(b_k\cos kt-a_k\sin kt).$$

Для параметра p, удовлетворяющего условию $0\leqslant p\leqslant+\infty$, определим на $\mathscr{T}_n$ функционал $\|\cdot\|_p$ соотношениями

$$\|f_n\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f_n(t)|^p dt\right)^{1/p},\quad 0<p<\infty,$$

$$\|f_n\|_\infty=\|f_n\|_{C_{2\pi}}=\lim_{p\to+\infty}\|f_n\|_p=\max\{|f_n(t)|\colon t\in\mathbb{R}\},$$

$$\|f_n\|_0=\lim_{p\to+0}\|f_n\|_p=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f_n(t)|dt\right);$$

лишь при $1\leqslant p\leqslant\infty$ этот функционал является нормой.

Производной Вейля, или дробной производной вещественного порядка $\alpha\geq 0$ *полинома* (0.1), называется полином [1]

$$D^\alpha f_n(t)=\sum_{k=1}^{n}k^\alpha\left(a_k\cos\left(kt+\frac{\pi\alpha}{2}\right)+b_k\sin\left(kt+\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right).$$

В дальнейшем для производной Вейля вместо $D^\alpha f_n$ будет использоваться обозначение $f_n^{(\alpha)}$. Информацию о дробных интегралах и производных можно найти в монографии [2].

При $\alpha\geq 0$ и $\theta\in\mathbb{R}$ определим на множестве полиномов $\mathscr{T}_n$ оператор

$$D_\theta^\alpha f_n(t)=f_n^{(\alpha)}(t)\cos\theta+\tilde{f}_n^{(\alpha)}(t)\sin\theta$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^\alpha\left(a_k\cos\left(kt+\frac{\pi\alpha}{2}+\theta\right)+b_k\sin\left(kt+\frac{\pi\alpha}{2}+\theta\right)\right), \tag{0.2}$$

который будем называть *оператором Вейля — Сеге*. Нас интересует норма этого оператора, а точнее, наименьшая константа в неравенстве

$$\left\|f_n^{(\alpha)}\cos\theta+\tilde{f}_n^{(\alpha)}\sin\theta\right\|_p\leq B_n(\alpha,\theta)_p\|f_n\|_p. \tag{0.3}$$

Неравенство такого типа называется *неравенством Бернштейна — Сеге*; при $\theta=0$ оно превращается в *неравенство Бернштейна*.

Историю изучения таких неравенств подробно описали В. В. Арестов и П. Ю. Глазырина в [3]. В 1928 г. Г. Сеге [4] при помощи полученной им интерполяционной формулы доказал неравенство $\left\|f_n'\cos\theta-\tilde{f}_n'\sin\theta\right\|_\infty\leq n\,\|f_n\|_\infty$. А. Зигмунд [5], используя интерполяционную формулу Г. Сеге и выпуклость функции u^p при $p\geq 1$, доказал для $\alpha\in\mathbb{N}$ при $p\geq 1$ неравенство

$$\left\|f_n^{(\alpha)}\cos\theta-\tilde{f}_n^{(\alpha)}\sin\theta\right\|_p\leq n^\alpha\,\|f_n\|_p. \tag{0.4}$$

В 1998 г. А. И. Козко [6] выписал интерполяционную формулу для оператора Вейля — Сеге в случае вещественных $\alpha \geq 1$ и с ее помощью обобщил неравенство (0.4) на вещественные $\alpha \geq 1$.

В 1994 г. В. В. Арестов [7] изучал поведение точной константы в неравенстве Сеге для производной неотрицательного целого порядка r сопряженных тригонометрических полиномов в пространстве L_0: $\left\|\tilde{T}_n^{(r)}\right\|_0 \leq \chi(n,r)\left\|T_n\right\|_0$. Из результатов В. В. Арестова 1979–1981 годов [8; 9] следует, что

$$\chi(n,r) = \left\|S_{2n,r}\right\|_0, \quad \text{где } S_{2n,r}(z) = \sum_{k=1}^{n} k^r C_{2n}^{n+k}\left(z^{n+k} + (-1)^{r+1} z^{n-k}\right).$$

Он доказал, что при $r \geq n \ln 2n$ справедливо равенство $\left\|S_{2n,r}\right\|_0 = n^r$. При фиксированном r В. В. Арестов получил логарифмическую асимптотику точной константы по n:

$$\left\|S_{2n,r}\right\|_0 = 4^{n+o(n)}, \quad n \to \infty.$$

В. В. Арестов вывел двусторонние близкие по порядку оценки для константы в случае $r = 0$:

$$\frac{C_{2n}^{n+1}}{n} \leq \left\|S_{2n,0}\right\|_0 \leq 2C_{2n}^{n+1}.$$

В 2014 г. А. Н. Адамов [10] уточнил результат В. В. Арестова. Он получил асимптотическую формулу $\left\|S_{2n,r}\right\|_0 \sim C_{2n}^{n+1}\|Q_r\|_0$, где Q_r — конкретный многочлен, не зависящий от n.

1. Формулировка результата

В работе автора [11] исследовалось неравенство Бернштейна (случай $\theta = 0$) для производной Вейля тригонометрических полиномов положительного нецелого порядка α в пространстве L_0. Была получена логарифмическая асимптотика поведения по n точной константы $B_n(\alpha,0)_0$, а именно, было доказано предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n(\alpha,0)_0} = 4.$$

В данной работе будет доказано, что подобный результат имеет место для произвольного вещественного θ, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть α — положительное нецелое число и $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n(\alpha,\theta)_0} = 4.$$

Важно отметить, что для производных натурального порядка в случае $\theta = 0$, т. е. в случае неравенства Бернштейна, константа имеет степенной рост, а не показательный. Точнее, В. В. Арестов в 1981 г. доказал [9], что для натуральных α при $p \in [0,1)$ справедливо равенство $B_n(\alpha,0)_p = n^\alpha$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n(\alpha,0)_p} = 1.$$

Но из результата В. В. Арестова [7] следует, что при $\alpha \in \mathbb{N}$ и $\theta \neq 2\pi k$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n(\alpha,\theta)_0} = 4.$$

Для величины $B_n(\alpha,\theta)_p$ справедливы неравенства

$$B_n(\alpha,\theta)_p \leqslant B_n(\alpha,\theta)_\infty, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$
$$B_n(\alpha,\theta)_p \leqslant B_n(\alpha,\theta)_0, \quad 0 \leqslant p \leqslant \infty; \tag{1.1}$$

первое из них хорошо известно, второе доказано в [12] для более общей ситуации. В связи с (1.1) неравенство (0.3) при $p = 0$ приобретает дополнительный интерес.

2. Некоторые вспомогательные результаты

Пусть $\mathscr{P}_m$ есть множество алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами порядка (не выше) m; многочлен $P_m \in \mathscr{P}_m$ удобно в дальнейшем записывать в виде

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k c_k z^k. \tag{2.1}$$

Для многочлена (2.1) и многочлена

$$\Lambda_m(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \lambda_k z^k \tag{2.2}$$

многочлен

$$\Lambda_m P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \lambda_k c_k z^k \tag{2.3}$$

называют *композицией Сеге многочленов* (2.2) *и* (2.1); см. библиографию в [9]. При фиксированном Λ_m композиция Сеге (2.3) является линейным оператором в $\mathscr{P}_m$; этот оператор будет обозначаться вновь символом Λ_m.

Рассмотрим на множестве $\mathscr{P}_m$ функционал

$$\|P_m\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|P_m\left(e^{it}\right)\right| dt\right), \quad P_m \in \mathscr{P}_m.$$

Для композиции Сеге (2.3) справедливо [12] точное неравенство

$$\|\Lambda_m P_m\|_0 \leqslant \|\Lambda_m\|_0 \|P_m\|_0\,, \tag{2.4}$$

которое на многочлене

$$P_m^*(z) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k z^k = (1+z)^m \tag{2.5}$$

обращается в равенство.

Формула

$$P_{2n}\left(e^{it}\right) = e^{int} f_n\left(t\right) \tag{2.6}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов f_n порядка n и множеством $\mathscr{P}_{2n}$ алгебраических многочленов P_{2n} порядка $2n$; при этом, очевидно,

$$\|P_{2n}\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f_n(t)|\, dt\right) = \|f_n\|_0\,.$$

Нетрудно убедиться, что оператору (0.2) во множестве $\mathscr{T}_n$ соответствует в $\mathscr{P}_{2n}$ оператор композиции Сеге с многочленом

$$\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k (n-k)^\alpha \left(e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} z^k + e^{i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{2n-k}\right). \tag{2.7}$$

Для оператора $\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}$ неравенство (2.4) на множестве алгебраических многочленов порядка $m = 2n$ превращается в неравенство

$$\|D_\theta^\alpha f_n\|_0 \leqslant \left\|\Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}\right\|_0 \|f_n\|_0, \quad f_n \in \mathscr{T}_n, \tag{2.8}$$

на множестве $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка n. По формуле (2.6) многочлену (2.5) соответствует тригонометрический полином $f_n(t) = e^{-int} P^*_{2n}\left(e^{it}\right) = 4^n h_n(t)$, где

$$h_n(t) = \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{(1+\cos t)^n}{2^n}, \tag{2.9}$$

а многочлену (2.7) — полином

$$e^{-int}\,\Lambda^{\alpha,\theta}_{2n}\left(e^{it}\right) = 4^n D^\alpha_\theta h_n(t).$$

Следовательно, полином (2.9) является экстремальным в неравенстве (2.8), и для наилучшей константы $B^\alpha_n(0)$ в (2.8) справедливы формулы

$$B_n(\alpha,\theta)_0 = \left\|\Lambda^{\alpha,\theta}_{2n}\right\|_0 = 4^n \|D^\alpha_\theta h_n\|_0.$$

В дальнейшем будет изучаться именно производная Вейля — Сеге $D^\alpha_\theta h_n$ порядка $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, с параметром $\theta \in \mathbb{R}$ полинома h_n.

3. Монотонность коэффициентов многочлена $\Lambda^{\alpha,\theta}_{2n}$

Многочлен (2.7) имеет вид

$$Q(z) = e^{-i\phi}\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k + e^{i\phi}\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{2n-k},$$

где $a_k = C^k_{2n}(n-k)^\alpha$ и $\phi = \pi\alpha/2 + \theta$. Выясним, при каких α числа a_k не возрастают по k. Рассмотрим при $0 \le k \le n-2$ отношение

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2n)!k!(2n-k)!}{(k+1)!(2n-k-1)!(2n)!}\,\frac{(n-k-1)^\alpha}{(n-k)^\alpha} = \frac{2n-k}{k+1}\Big(1 - \frac{1}{n-k}\Big)^\alpha$$

и заметим, что оно убывает по k. Подставив $k=0$, получим условие $2n\Big(\dfrac{n-1}{n}\Big)^\alpha \le 1$, равносильное условию $\alpha \ge \dfrac{\ln 2n}{\ln\dfrac{n}{n-1}}$. Поскольку $\ln\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big) < -\dfrac{1}{n}$, то

$$n\ln 2n > \frac{\ln 2n}{\ln\dfrac{n}{n-1}}.$$

Таким образом, условие $\alpha > n\ln 2n$ является достаточным для монотонности коэффициентов.

Из того, что числа a_k убывают по k, следует [13, III, гл. 1, § 2, задача 22], что нули многочлена

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1-k} z^k$$

лежат внутри единичного круга. В свою очередь, из этого следует [13, III, гл. 1, § 2, задача 26], что нули многочлена Q лежат на единичной окружности.

Возникает вопрос о наименьшем возможном значении $\alpha_n(\theta)$ таком, что при всех $\alpha \ge \alpha_n(\theta)$ нули многочлена $\Lambda^{\alpha,\theta}_{2n}$ лежат на единичной окружности. Приведенные рассуждения влекут, что $\alpha_n(\theta) \le n\ln 2n$. Есть основания считать, что на самом деле величина $\alpha_n(\theta)$ имеет порядок n. В 2014 г. В. В. Арестов и П. Ю. Глазырина [3] доказали, что при $\alpha > n\ln 2n$ для $0 \le p < \infty$ выполняется равенство $B_n(\alpha,0)_p = n^\alpha$. Кроме того, они подробно исследовали случай $n=2$ и показали, что $B_2(\alpha,0)_0 = 2^\alpha$ при $\alpha = 1$ и $\alpha \ge 2$ и, более того, $B_2(\alpha,0)_0 > 2^\alpha$ при $\alpha \in [0,1) \cup (1,2)$. В 2018 г. Н. В. Попов анонсировал [14], что для всех n от 1 до 8 $\alpha_n(0) = 2n-2$. Вычислительные эксперименты в Maple приводят к гипотезе, что $\alpha_n(\theta) = 2n-2$ для всех $n \in \mathbb{N}$ вне зависимости от θ.

4. Лемма об асимптотике

При $s > 1$ будем рассматривать для $u > 0$ функцию

$$F_s(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(u + 2\pi k)^s}.$$

Эта функция всюду положительна и монотонно убывает.

В работе [11] автором была доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть α — положительное нецелое число. Тогда для производной порядка α полинома h_n в любой точке $x \in (0, 2\pi)$ справедливо асимптотическое равенство*

$$h_n^{(\alpha)}(x) \sim -\frac{2\Gamma(\alpha+1)\sin\pi\alpha}{\sqrt{\pi n}} F_{\alpha+1}(x) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{4.1}$$

Возникает вопрос о нахождении аналогичного асимптотического равенства для $D_\theta^\alpha h_n(x) = h_n^{(\alpha)}(x)\cos\theta + \tilde{h}_n^{(\alpha)}(x)\sin\theta$. Искать асимптотику для $\tilde{h}_n^{(\alpha)}(x)$, вообще говоря, трудно. Автору удалось обойти эту трудность в каком-то смысле, избавившись от сопряженного полинома. Говоря более точно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть α — положительное нецелое число и $\theta \in \mathbb{R}$. Произвольному тригонометрическому полиному f_n сопоставим полином $g_n(t) = f_n(-t)$. Тогда справедлива формула*

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = A f_n^{(\alpha)}(t) + B g_n^{(\alpha)}(-t),$$

где

$$A = \frac{\sin(\pi\alpha + \theta)}{\sin\pi\alpha}, \quad B = -\frac{\sin\theta}{\sin\pi\alpha}. \tag{4.2}$$

В частности, если f_n — четный полином, то

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = A f_n^{(\alpha)}(t) + B f_n^{(\alpha)}(-t),$$

а если f_n — нечетный полином, то

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = A f_n^{(\alpha)}(t) - B f_n^{(\alpha)}(-t).$$

Доказательство леммы 2. Пусть

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Тогда

$$f_n^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right) + b_k \sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)$$

и, как нетрудно убедиться,

$$g_n^{(\alpha)}(-t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \left(a_k \cos\left(kt - \frac{\pi\alpha}{2}\right) + b_k \sin\left(kt - \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right).$$

Докажем, что числа A и B, указанные в (4.2), таковы, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняются тождества

$$\begin{aligned} A\cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right) + B\cos\left(kt - \frac{\pi\alpha}{2}\right) &= \cos\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right), \\ A\sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2}\right) + B\sin\left(kt - \frac{\pi\alpha}{2}\right) &= \sin\left(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

и, следовательно, справедливо равенство

$$Af_n^{(\alpha)}(t) + Bg_n^{(\alpha)}(-t) = D_\theta^\alpha f_n(t).$$

Для этого достаточно проверить равенства (4.3) в $2k$ точках $t_m = \pi m/k, m = 0, \ldots, 2k-1$, и в точке $t = \pi/(2k)$. Подставим $t = \dfrac{\pi m}{k}$ в левую часть первого равенства (4.3). Получим

$$\frac{\sin(\pi\alpha+\theta)}{\sin\pi\alpha}\cos\left(\pi m + \frac{\pi\alpha}{2}\right) - \frac{\sin\theta}{\sin\pi\alpha}\cos\left(\pi m - \frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^m\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}{\sin\pi\alpha}\left(\sin(\pi\alpha+\theta) - \sin\theta\right) = \frac{2\cdot(-1)^m\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}+\theta\right)}{\sin\pi\alpha}$$

$$= \cos\left(\pi m + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\right).$$

Подставим точку $t = \pi/(2k)$ в левую и правую части первого равенства (4.3). Слева получаем

$$-\frac{\sin(\pi\alpha+\theta)}{\sin\pi\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\sin\theta}{\sin\pi\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2} = -\frac{\sin(\pi\alpha+\theta)+\sin\theta}{2\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}.$$

Справа имеем

$$-\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}+\theta\right).$$

Правая часть равенства совпала с левой. Тем самым первое равенство (4.3) проверено. Второе равенство в (4.3) получим, продифференцировав первое равенство по t. Лемма 2 доказана.

Из леммы 1 и леммы 2 следует асимптотическая формула для оператора Вейля — Сеге, аналогичная формуле (4.1) в лемме 1.

Лемма 3. *Пусть α — положительное нецелое число и $\theta \in \mathbb{R}$. Тогда для оператора Вейля — Сеге, примененного к полиному h_n, для любого $x \in (0, 2\pi)$ справедливо асимптотическое равенство*

$$D_\theta^\alpha h_n(x) \sim -\frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi n}}\Big(\sin(\pi\alpha+\theta)F_{\alpha+1}(x) - \sin\theta F_{\alpha+1}(2\pi - x)\Big) \quad \textit{при } n\to\infty. \tag{4.4}$$

5. Завершение доказательства теоремы

Доказательство теоремы осуществляется на основе леммы 3 по схеме, которая была применена в работе В. В. Арестова [7] при доказательстве теоремы 5 с использованием соответствующей асимптотической формулы. Те же идеи были использованы в работе автора [11] при обосновании основной теоремы с учетом приведенной выше формулы (4.1). Важным является тот факт, что в силу монотонности функции $F_{\alpha+1}$ присутствующий в асимптотической формуле (4.4) множитель

$$\sin(\pi\alpha+\theta)F_{\alpha+1}(x) - \sin\theta F_{\alpha+1}(2\pi - x)$$

не обращается в ноль нигде на интервале $(0, 2\pi)$, кроме, быть может, одной точки.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора В. В. Арестова за постановку задачи и постоянное внимание к исследованиям автора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Weyl H.** Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich. 1917. Bd. 62, №1–2. S. 296–302.
2. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 638 с.
3. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Bernstein–Szego inequality for fractional derivatives of trigonometric polynomials // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. Vol. 288, Suppl. 1. P. 13–28. doi: 10.1134/S0081543815020030.
4. **Szegő G.** Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft. 1928. J. 5, H. 4. S. 59–70.
5. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
6. **Kozko A.I.** The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegő inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, no. 3. P. 391–416.
7. **Арестов В.В.** Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Мат. заметки, 1994. Т. 56, № 6. С. 10–26.
8. **Арестов В.В.** О неравенствах С. Н. Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1289–1292.
9. **Арестов В.В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
10. **Адамов А.Н.** О константе в неравенстве Сеге для производных сопряженных тригонометрических полиномов в L_0 // Вестник Од. нац. ун-та. Математики и механика. 2014. Т. 19, вып. 1(21). С. 7–15.
11. **Леонтьева А.О.** Неравенство Бернштейна для производных Вейля тригонометрических полиномов в пространстве L_0 // Мат. заметки. 2018. Т. 104, вып. 2. С. 255–264.
12. **Арестов В.В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 7–18.
13. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1978. 391 с.
14. **Попов Н.В.** О неравенстве С. Н. Бернштейна // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 19 Междунар. Саратовской зимней шк., посвященной 90-летию со дня рождения акад. П. Л. Ульянова. Саратов: ООО Изд-во “Научная книга”, 2018. 380 с.

Поступила 01.07.2018
После доработки 01.10.2018
Принята к публикации 15.10.2018

Леонтьева Анастасия Олеговна
аспирант
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина;
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: sinusoida2012@yandex.ru

REFERENCES

1. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, 1917, vol. 62, no. 1–2, pp. 296–302.
2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.* Yverdon: Gordon and Breach Science Publ., 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641 . Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya*, Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1987, 638 p.
3. Arestov V.V., Glazyrina P.Yu. Bernstein-Szegő inequality for fractional derivatives of trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. 13–28. DOI: 10.1134/S0081543815020030 .

4. Szegő G. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein. *Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft*, 1928, vol. 5, no. 4, pp. 59–70.
5. Zygmund A. *Trigonometric series. Vol. I, II.* Cambridge University press, 1959, vol. 1, 383 p.; vol. 2, 354 p. ISBN (3rd ed.): 0521890535 . Translated to Russian under the title *Trigonometricheskie ryady. I, II.* Moscow: Mir Publ., 1965, vol. 1, 616 p.; vol. 2, 538 p.
6. Kozko A.I. The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegő inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikolskii inequality for trigonometric polynomials. *East J. Approx.*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 391–416.
7. Arestov V.V. The Szegő inequality for derivatives of a conjugate trigonometric polynomial in L_0. *Math. Notes*, 1994, vol. 56, no. 6, pp. 1216–1227. doi: 10.1007/BF02266689 .
8. Arestov V.V. On inequalities of S. N. Bernstein for algebraic and trigonometric polynomials. *Soviet Math. Dokl.*, 1979, vol. 20, no. 3, pp. 600–603.
9. Arestov V.V. On integral inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives. *Math. USSR Izvestija*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 1–17. doi: 10.1070/IM1982v018n01ABEH001375 .
10. Adamov A.N. On the constant in Szegő inequality for derivatives of conjugate trigonometric polynomials in L_0. *Vestnik Odess. Nats. Univ. Mat. i Mekh.*, 2014, vol. 19, no. 1(21), pp. 7–15 (in Russian).
11. Leont'eva A.O. Bernstein inequality for the Weyl derivatives of trigonometric polynomials in the space L_0. *Math. Notes*, 2018, vol. 104, no. 2, pp. 263–270. doi: 10.1134/S0001434618070271 .
12. Arestov V.V. Integral inequalities for algebraic polynomials on the unit circle. *Math. Notes*, 1990, vol. 48, no. 4, pp. 977–984. doi: 10.1007/BF01139596 .
13. Pólya G., Szegő G. *Problems and theorems in analysis. Vol.* 1. Berlin: Springer, 1972, 392 p. doi: 10.1007/978-1-4757-1640-5 . Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza. T.* 2. Moscow: Nauka Publ., 1978, 432 p.
14. Popov N.V. On Bernstein inequality. In: *Proc. 19th Int. Saratov Winter School "Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications"*. Saratov: Nauchnaya kniga Publ., 2018, pp. 254–255 (in Russian). ISBN: 978-5-9758-1691-7 .

Received July 01, 2018
Revised October 01, 2018
Accepted October 15, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Anastasia Olegovna Leont'eva, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: sinusoida2012@yandex.ru .