ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 519.17

БОЛЬШИЕ ВЕРШИННО СИММЕТРИЧНЫЕ ГРАФЫ ХИГМЕНА С $\mu = 6$

Н. Д. Зюляркина, М. Х. Шерметова

Сильно регулярный граф с $v = \binom{m}{2}$ и $k = 2(m-2)$ называется графом Хигмена. В графе Хигмена параметр μ принимает значения 4, 6, 7 или 8. Если $\mu = 6$, то $m = 9, 17, 27, 57$. Реберно симметричные графы Хигмена были классифицированы Н. Д. Зюляркиной и А. А. Махневым (все они оказались графами ранга 3). Реализуется программа классификации вершинно симметричных графов Хигмена. Ранее Н. Д. Зюляркина и А. А. Махнев нашли вершинно симметричные графы Хигмена с $\mu = 6$ и $m = 9, 17$. В данной работе изучены вершинно симметричные графы Хигмена с $\mu = 6$ и $m = 27, 57$. Интересно, что группа $G/S(G)$ может содержать две компоненты L и M, в случае $m = 27$ имеем $M \cong A_5, A_6$ и $L \cong L_3(3)$, а в случае $m = 57$ имеем либо $M \cong PSp_4(3)$ и $L \cong L_3(7)$, либо $M \cong A_6$ и $L \cong J_1$.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

N. D. Zyulyarkina, M. Kh. Shermetova. Large vertex-symmetric Higman graphs with $\mu = 6$.

A strongly regular graph with $v = \binom{m}{2}$ and $k = 2(m-2)$ is called a Higman graph. In such a graph, the parameter μ is 4, 6, 7, or 8. If $\mu = 6$, then $m \in \{9, 17, 27, 57\}$. Vertex-symmetric Higman graphs were classified by N. D. Zyulyarkina and A. A. Makhnev (all of these graphs turned out to have rank 3). A program of classification of vertex-symmetric Higman graphs is implemented. Earlier Zyulyarkina and Makhnev found vertex-symmetric Higman graphs with $\mu = 6$ and $m \in \{9, 17\}$. In the present paper, vertex-symmetric Higman graphs with $\mu = 6$ and $m \in 27, 57$ are studied. It is interesting that the group $G/S(G)$ may contain two components L and M. In the case $m = 27$, we have $M \cong A_5, A_6$ and $L \cong L_3(3)$; in the case $m = 57$, we have either $M \cong PSp_4(3)$ and $L \cong L_3(7)$ or $M \cong A_6$ and $L \cong J_1$.

Keywords: distance-regular graph, graph automorphism.

MSC: 05C25, 20B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-146-155

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a. Для подграфа Δ графа Γ через $\Delta^\perp$ обозначим $\cap_{a\in\Delta} a^\perp$.

Через k_a обозначим *степень вершины* a, т. е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b верно равенство $|[a] \cap [b]| = \mu$. Графом ранга 3 называется сильно регулярный граф с такой вершинно транзитивной группой автоморфизмов, что стабилизатор вершины действует транзитивно на ее окрестности и на ее антиокрестности.

Через $K_{m,n}$ обозначим полный двудольный граф с долями порядков m, n. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется *$a \times b$-решеткой*, если $|X| = a$, $|Y| = b$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Граф на множестве неупорядоченных пар из X называется *треугольным графом* $T(m)$, если $|X| = m$, а пары $\{x, y\}$ и $\{u, w\}$ смежны тогда и только тогда, когда $|\{x, y\} \cap \{u, w\}| = 1$. Граф $T(m)$ является сильно регулярным с $v = \binom{m}{2}$, $k = 2(m-2)$ и $\mu = 4$. Если Γ — сильно регулярный граф с $v = \binom{m}{2}$, $k = 2(m-2)$ и $\mu = 4$, то либо Γ изоморфен $T(m)$, либо $m = 8$ и Γ изоморфен одному из трех графов Чанга.

Графы ранга 3 с $v = \binom{m}{2}$, $k = 2(m-2)$ изучал Д. Хигмен [1]. Он доказал, что либо сильно регулярный граф Γ с $v = \binom{m}{2}$ и $k = 2(m-2)$ изоморфен треугольному графу $T(m)$ или одному из графов Чанга, либо $\mu \in \{6,7,8\}$ и в случае $\mu = 6$ получим $m = 7$ и Γ изоморфен дополнительному графу к $T(7)$ или $m \in \{9,17,27,57\}$.

Графом Хигмена назовем сильно регулярный граф Γ с $v = \binom{m}{2}$ и $k = 2(m-2)$. Реберно симметричные графы Хигмена были классифицированы в [2] (все они оказались графами ранга 3).

А. А. Махневым предложена программа изучения вершинно симметричных графов Хигмена. Эта программа реализована в случаях $\mu = 7$ [3] и $\mu = 6$ для $m = 27, 57$ [4]. При этом получены новые возможности для существования вершинно симметричных графов.

Ранее в [5] были найдены возможные автоморфизмы графов Хигмена с $\mu = 6$ и подграфы неподвижных точек этих автоморфизмов. Позже в работе Н. Д. Зюляркиной и А. А. Махнева (см. статью в Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2014, Т. 20, № 2, С. 184–209) были получены следующие предложения. Они используются при доказательстве теорем 1 и 2.

Предложение 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(351, 50, 13, 6)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,13\}$, $|G|$ *не делится на* 49, $|G_a|$ *не делится на* 25 *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф и либо* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 45r + 9$, *либо* $p = 13$ *и* $\alpha_1(g) = 195r + 30$;

(2) Ω *является* l*-кликой и либо*

 (*i*) $l = 1$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 50s$ *или* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 20s + 10$, *либо*

 (*ii*) $p = 3$, l *делится на 3 и* $\alpha_1(g) = 45s - 4l - 6$ *или* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 30s - 4l - 6$;

(3) Ω *является* t*-кокликой,* $p = 2$, t *нечетно,* $5 \le 3 \le 25$ *и* $\alpha_1(g) = 30s - 4t - 6$;

(4) $p = 7$ *и* Ω *— сильно регулярный граф с параметрами* $(36, 15, 6, 6)$ *и* $\alpha_1(g) = 105r$;

(5) $p = 5$, $26 \le |\Omega| \le 116$, *степень вершины в* Ω *не меньше* 10 *и не больше* 40, *и* $a^{\perp}$ *не содержится в* Ω *для любой вершины* $a \in \Omega$;

(6) $p = 3$, $|\Omega| \le 102$ *и в случае равенства имеем* $\alpha_1(g) = 246$;

(7) $p = 2$, Ω *не является кликой или кокликой.*

Предложение 2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(1596, 110, 28, 6)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,11,19\}$ *и выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф и либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 60r + 24$, *либо* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 90r - 6$, *либо* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 210r + 84$, *либо* $p = 19$ *и* $\alpha_1(g) = 570r + 114$;

(2) Ω *является* l*-кликой,* $l \le 28$ *и либо*

 (*i*) $l = 1$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 30r - 10$ *или* $p = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 330r + 110$, *либо*

 (*ii*) l *делится на* 3, $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = -4l + 30r - 6$;

(3) Ω *является* t*-кокликой,* $p = 2$, $t \le 56$ *четно и* $\alpha_1(g) = -4t + 30r - 6$;

(4) Ω *— непустой граф, не являющийся кликой или кокликой,* $p \le 11$ *и*

 (*i*) $|\Omega| \le 298$, *если* $p = 11$,

 (*ii*) $|\Omega| \le 364$, *если* $p = 7$,

 (*iii*) $|\Omega| \le 466$, *если* $p = 5$,

 (*iv*) $|\Omega| \le 507$, *если* $p = 3$,

 (*v*) $|\Omega| \le 526$, *если* $p = 2$.

В данной работе изучены вершинно симметричные графы Хигмена с $\mu = 6$ и $m = 27, 57$. Впервые возникла ситуация, когда цоколь группы автоморфизмов графа оказался прямым произведением двух неабелевых простых групп.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(351, 50, 13, 6)$ *и неразрешимая группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа. Если* $\bar{T}$ *— цоколь группы* $\bar{G} = G/O_{13'}(S(G))$, *то верно одно из следующих утверждений*:

(1) $|S(G)|$ *делится на* 13, $\bar{T} = Z_{13} \times L$, L *фиксирует вершину* a *и* $L \cong A_5, A_6$, $V = O_{13'}(G)$ *является* 3*-группой и* $|V : V_a| = 27$;

(2) $|S(G)|$ *не делится на* 13 *и для* $L = O^{13}(\bar{T})$ *либо* $L \cong L_3(3)$ *и* L_a *является расширением* E_9 *с помощью* $GL_2(3)$ *— это подгруппа индекса* 13 *из* L, *либо* $L \cong L_4(3)$ *и* $L_a \cong U_4(2).Z_2$ *— это подгруппа индекса* $13 \cdot 9$ *из* L;

(3) *если* $|S(G)|$ *не делится на* 13 *и группа* $\bar{T}$ *содержит еще одну компоненту* M, *то* $M \cong A_5, A_6$, $L \cong L_3(3)$, $V = S(G)$ *является* 3*-группой и* $|V : V_a| = 27$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(1596, 110, 28, 6)$ *и неразрешимая группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа. Если* $\bar{T}$ *— цоколь группы* $\bar{G} = G/O_{19'}(S(G))$, f *— элемент порядка* 19 *из* G *и* F *— множество* $\langle f \rangle$*-орбит на* Γ, *то верно одно из следующих утверждений*:

(1) $|S(G)|$ *делится на* 19, *группа* $\bar{T}$ *— прямое произведение группы* Z_{19} *и группы* L, *изоморфной* A_5 *или* A_6, $V = S(G)$ *является* 7*-группой и* $|V : V_a| = 7$;

(2) *если* 19 *не делит* $|S(G)|$, *то группа* $L = O^{19'}(\bar{T})$ *изоморфна либо* $L_3(7)$ *и* $|L : L_a| = 57$, *либо* J_1, *подгруппа* L_a *изоморфна* $L_2(11)$ *и имеет индекс* $19 \cdot 14$ *в* L;

(3) *если* $\bar{T}$ *содержит еще одну компоненту* M, *то либо* L *изоморфна* $L_3(7)$, *длина любой* L*-орбиты равна* 57 *и* $M \cong PSp_4(3)$ *действует транзитивно на этих* 28 *орбитах, либо* L *изоморфна* J_1, *длина любой* L*-орбиты равна* 266, $M \cong A_6$ *действует транзитивно на этих шести орбитах.*

1. Вспомогательные результаты

Доказательство теорем опирается на метод Г. Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [6] (более подробно см. [4, разд. 2; 5, с. 44]).

Приведем также три комбинаторные леммы.

Лемма 1 [7, теорема 3.2]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и собственными значениями* $k, r, -m$. *Если* g *— автоморфизм* Γ, *то* $|\mathrm{Fix}(g)| \leq v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k - r)$.

Лемма 2 [8, теорема 3.5]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Лемма 3 [8, лемма 6.1]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с собственными значениями* $k > \eta_1 > \eta_2$ *на* v *вершинах. Если* X, Y *— подмножества вершин из* Γ, *между которыми нет ребер, то* $|X||Y| \leq (v - |X|)(v - |Y|)(\eta_1 - \eta_2)^2/(2k - \eta_1 - \eta_2)^2$.

Лемма 4. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с целыми собственными значениями,* g *— автоморфизм графа* Γ *простого порядка* p *и* χ *— характер проекции мономиального представления на подпространство размерности* m *собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого* l, *не кратного* p *и* p *делит* $m - \chi(g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта лемма следует из леммы 3 и [9, предложение 2], примененного к циклической группе $\langle g\rangle$.

2. Доказательство теоремы 1

В этом разделе предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами (351, 50, 13, 6) и спектром $50^1, 11^{90}, -4^{260}$. Далее, неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда для вершины $a \in \Gamma$ имеем $|G : G_a| = 351$. Пусть ψ — мономиальное представление G в $GL(351, \mathbf{C})$, χ_1 — характер проекции ψ на подпространство собственных векторов размерности 90 и $g \in G$. По лемме 4.1 из [5] имеем $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 54)/15$ и $\chi_1(g) - 90$ делится на p, если g — элемент простого порядка p из G. По лемме 1 имеем $|\mathrm{Fix}(g)| \le 117$ для любого элемента $g \in G$.

Через $\bar{T}$ обозначим цоколь группы $\bar{G} = G/O_{13'}(S(G))$. Пусть f — элемент из G порядка 13, F — множество $\langle f\rangle$-орбит на Γ.

Сначала уточним предложение 2. Если $|g| = 2$, то g имеет неподвижные точки на Γ. В противном случае $\alpha_1(g) = 0$ и по лемме 4 имеем $\chi_1(g) = -54/15$; противоречие.

Лемма 5. *Пусть g — элемент из $C_G(f)$ простого порядка $p < 13$ и $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 234$;

(2) Ω *является l-кликой или l-кокликой,* $p = 2$, $l = 13$ *и* $\alpha_1(g) = 182$;

(3) $p = 5$ *и либо* $|\Omega| = 26$, $\alpha_1(g) = 325$, *либо* $|\Omega| = 91$, $\alpha_1(g) = 65$;

(4) $p = 3$ *и либо* $|\Omega| = 39$, $\alpha_1(g) = 273$, *либо* $|\Omega| = 78$, $\alpha_1(g) = 117$;

(5) $p = 2$ *и либо* $|\Omega| = 39$, $\alpha_1(g) = 78$, *либо* $|\Omega| = 91$, $\alpha_1(g) = 260$, *либо* $|\Omega| = 117$ *и* $\alpha_1(g) = 156$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению 1 $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_1(f) = 195r + 30$ и $\alpha_2(f) = 321 - 195r$.

Снова по предложению 1 либо Ω — пустой граф, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 45r + 9$, либо Ω является l-кликой, $p = 3$, l делится на 39 и $\alpha_1(g) = 45s - 4l - 6$ или $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 30s - 4l - 6$, либо Ω является 13-кокликой, $p = 2$, либо $p = 5$, $|\Omega| \in \{26, 91\}$, степень вершины в Ω не меньше 10 и не больше 40, либо $p = 3$, $|\Omega| \le 99$, либо $p = 2$, Ω не является кликой или кокликой.

Если Ω — пустой граф, то $p = 3$, $\alpha_1(g) = 45r + 9$ делится на 13 и $r = 5$.

Если Ω является l-кликой, то $p = 2$, $l = 13$ и $\alpha_1(g) = 30s - 4l - 6$ делится на 13. Поэтому $s = 8$.

Если Ω является 13-кокликой, то $p = 2$ и снова $\alpha_1(g) = 182$.

Допустим, что Ω не является пустым графом, кликой или кокликой.

Пусть $p = 5$. Если $|\Omega| = 26$, то по лемме 4 число $\chi_1(g) = (50 + \alpha_1(g))/15$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 75s - 50$ делится на 13. Поэтому $s = 5$. Если $|\Omega| = 91$, то по лемме 4 число $\chi_1(g) = (310 + \alpha_1(g))/15$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 75s - 10$ делится на 13. Поэтому $s = 1$.

Пусть $p = 3$. Если $|\Omega| = 39$, то по лемме 4 число $\chi_1(g) = (102 + \alpha_1(g))/15$ делится на 3, $\alpha_1(g) = 75s - 27$ делится на 13 и $s = 4$. Если $|\Omega| = 78$, то число $\chi_1(g) = (258 + \alpha_1(g))/15$ делится на 3, $\alpha_1(g) = 75s - 33$ делится на 13 и $s = 2$.

Пусть $p = 2$. Если $|\Omega| = 39$, то по лемме 4 число $\chi_1(g) = (102 + \alpha_1(g))/15$ четно, $\alpha_1(g) = 30s - 12$ делится на 13 и $s = 3$. Если $|\Omega| = 65$, то число $\chi_1(g) = (206 + \alpha_1(g))/15$ четно, $\alpha_1(g) = 30s - 26$ делится на 13 и $s = 13$; противоречие. Если $|\Omega| = 91$, то число $\chi_1(g) = (310 + \alpha_1(g))/15$ четно, $\alpha_1(g) = 30s - 10$ делится на 13 и $s = 9$. Если $|\Omega| = 117$, то число $\chi_1(g) = (414 + \alpha_1(g))/15$ четно, $\alpha_1(g) = 30s - 24$ делится на 13 и $s = 6$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если $|S(G)|$ делится на 13, то $\bar{T} = Z_{13} \times L$, L фиксирует вершину a и $L \cong A_5, A_6$, $V = O_{13'}(G)$ является 3-группой и $|V : V_a| = 27$*;

(2) *если* $|S(G)|$ *не делится на* 13, *то группа* $L = O_{13'}(\bar{T})$ *изоморфна либо* $L_2(27)$, L_a — *диэдральная группа порядка* 28 *индекса* $13 \cdot 27$ *в* L, *либо* $L_3(3)$, L_a *является расширением* E_9 *с помощью* $SL_2(3)$ — *подгруппа индекса* 13 *в* L, *либо* $L_4(3)$, $L_a \cong U_4(2).Z_2$ — *подгруппа индекса* $13 \cdot 9$ *в* L, *либо* $L \cong G_2(3)$, $L_a \cong U_3(3).Z_2$ — *подгруппа индекса* $13 \cdot 27$ *в* L, *либо* $L \cong P\Omega_7(3)$, $L_a \cong Z_2.U_4(3).Z_2$ — *подгруппа индекса* $13 \cdot 27$ *в* L;

(3) *если* $|S(G)|$ *не делится на* 13 *и группа* $\bar{T}$ *содержит еще одну компоненту* M, *то* $M \cong A_5, A_6$, $L \cong L_3(3)$, $V = S(G)$ *является* 3*-группой и* $|V : V_a| = 27$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $|S(G)|$ делится на 13. Ввиду предложения 1 цоколь $\bar{T}$ является прямым произведением Z_{13} и простых групп L^i, изоморфных $A_5, A_6, PSp_4(3)$. Так как $|L^i : L^i_a|$ делит 27, то L^i фиксирует вершину a. Напомним, что $|G_a|$ не делится на 25, поэтому $\bar{T} = Z_{13} \times L$, $L \cong A_5, A_6$ или $PSp_4(3)$. Теперь $V = O_{13'}(G)$ является 3-группой и $|V : V_a| = 27$.

Пусть g — элемент порядка 5 из L, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ и $L \cong PSp_4(3)$. Если g фиксирует точно две точки из F, то L поточечно фиксирует Ω и $|\Gamma - \Omega| = 13 \cdot 20$. Противоречие с тем, что длины L-орбит на $\Gamma - \Omega$ делятся на 40 или 45. Если g фиксирует семиточечное подмножество F_0 из F, то $|F - F_0| = 20$ и длины L-орбит на $F - F_0$ делятся на 40 или 45; противоречие.

Допустим, что $|S(G)|$ не делится на 13. По табл. 1 из [10] группа $L = O_{13'}(\bar{T})$ изоморфна $L_2(13)$, $L_2(25)$, $L_2(27)$, $L_2(64)$, $L_3(3)$, $L_3(9)$, $L_4(3)$, $U_3(4)$, $U_4(5)$, $G_2(3)$, $G_2(4)$, ${}^2F_4(2)'$, $Sz(8)$, $PSp_6(3)$, $P\Omega_7(3)$ или $P\Omega_8^+(3)$.

Так как $|L : L_a|$ делится на 13 и делит $13 \cdot 27$, то либо $L \cong L_2(27)$, L_a — диэдральная группа порядка 28 индекса $13 \cdot 27$ в L, либо $L \cong L_3(3)$, L_a является расширением E_9 с помощью $SL_2(3)$ — подгруппа индекса 13 в L, либо $L \cong L_4(3)$, $L_a \cong U_4(2).Z_2$ — подгруппа индекса $13 \cdot 9$ в L, либо $L \cong G_2(3)$, $L_a \cong U_3(3).Z_2$ — подгруппа индекса $13 \cdot 27$ в L, либо $L \cong P\Omega_7(3)$, $L_a \cong Z_2.U_4(3).Z_2$ — подгруппа индекса $13 \cdot 27$ в L.

Если $\bar{T}$ содержит еще одну компоненту M, то M изоморфна $A_5, A_6, PSp_4(3)$ и фиксирует некоторую вершину a. Пусть g — элемент порядка 5 из M, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если $|\Omega| = 26$, то M поточечно фиксирует Ω и L действует на Ω; противоречие. Если g фиксирует семиточечное подмножество F_0 из F, то L действует на $A_1 = \{w \in \Gamma \mid d(w, w^g) = 1\}$, причем $|A_1| = 65$. В этом случае $L \cong L_3(3)$. Далее, элемент порядка 3 из M фиксирует три или шесть точек из F. Если $M \cong PSp_4(3)$, то M фиксирует каждую вершину из Ω, противоречие.

Если $M \cong A_6$, то M фиксирует ровно одну точку из F_0, действует естественно на оставшихся шести точках из F_0 и длины M-орбит на $F - F_0$ равны 10. Если $M \cong A_5$, то M фиксирует ровно две точки из F_0, действует естественно на оставшихся пяти точках из F_0 и длины M-орбит на $F - F_0$ равны 10. Теперь $V = S(G)$ является 3-группой и $|V : V_a| = 27$. Лемма доказана.

Ввиду леммы 5 в случаях $L \cong L_2(27), G_2(3), P\Omega_7(3)$ имеем $S(G) = 1$, и ввиду компьютерных вычислений в GAP граф не существует.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

В этом разделе предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(1596, 110, 55, 6)$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Тогда Γ имеет спектр $110^1, 26^{209}, -4^{1386}$ и для вершины $a \in \Gamma$ получим $|G : G_a| = 1596$. Ввиду предложения 2 $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 19\}$. Пусть ψ — мономиальное представление G в $GL(1596, \mathbf{C})$, χ_1 — характер проекции ψ на подпространство собственных векторов размерности 209 и $g \in G$. Тогда по лемме 4.1 из [5] имеем $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 114)/30$ и $\chi_1(g) - 209$ делится на p, если g — элемент простого порядка p из G. По лемме 1 имеем $|\mathrm{Fix}(g)| \leq 532$ для любого элемента $g \in G$.

Через $\bar{T}$ обозначим цоколь группы $\bar{G} = G/O_{19'}(S(G))$. Пусть f — элемент порядка 19 из G и F — множество $\langle f \rangle$-орбит на Γ.

Лемма 7. *Пусть g — элемент из $C_G(f)$ простого порядка p, меньшего 19, и $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. Тогда $|C_G(f)|$ не делится на 49 и верно одно из утверждений:*

(1) Ω — пустой граф, $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 1254$;

(2) Ω является 38-кокликой, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 30r - 4t + 6$, $r = 15, 34, 53$;

(3) Ω не является пустым графом, кликой или кокликой и либо $p = 7$, $|\Omega| = 266$, $\alpha_1(g) = 1330$, либо $p = 5$, $|\Omega| = 5s + 1$, $s = 53, 72, 91$ и $\alpha_1(g) = 2390 - 20s$, либо $p = 3$, $|\Omega| = 3s$, $s = 19, 38, 57, 76, 95, 114, 133, 152$, $\alpha_1(g) = 90t - 6 - 12s$ и $t = 14, 33$, либо $p = 2$, $|\Omega| = 2s$, $s = 19l$, $l \le 13$, $\alpha_1(g) = 60t + 144 - 8s$ и $t = 9, 28, 47$;

(4) если $C_G(f)$ содержит подгруппу U порядка 25, $g_1, \ldots, g_6$ порождают различные подгруппы порядка 5 из U, $\Omega^i = \mathrm{Fix}(g_i)$ и $\Omega^0 = \mathrm{Fix}(U)$, то либо

(i) на F имеются две U-орбиты длины 25 или U фиксирует точно 14 точек из F, четыре элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 19 точек из F, а два элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 14 точек из F, или U фиксирует точно 19 точек из F, пять элементов из $\{g_i\}$ фиксируют по 24 точки из F, а один элемент из $\{g_i\}$ фиксируют 19 точек из F, либо

(ii) на F имеется единственная U-орбиты длины 25 или U фиксирует точно 9 точек из F, четыре элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 24 точки из F, два элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 19 точек из F, или U фиксирует точно 14 точек из F, три элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 24 точки из F, три элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 19 точек из F.

Доказательство. Пусть f — элемент из G порядка 19, g — элемент из $C_G(f)$ простого порядка $p < 19$ и $\mathrm{Fix}(g) = \Omega$. По лемме 1 имеем $|\Omega| \le 532$. По предложению 2 $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_1(f) = 570r + 114$ и $\alpha_2(f) = 1482 - 570r$. Через F обозначим множество $\langle f \rangle$-орбит. Тогда $|F| = 84$.

Снова по предложению 2 либо Ω — пустой граф, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 60r + 24$ или $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 90r - 6$, или $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 210r + 84$, либо Ω является l-кликой, $l \le 28$, $l = 1$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 30r - 10$ или $p = 11$ и $\alpha_1(g) = 330r + 110$, l делится на 3, или $p = 3$ и $\alpha_1(g) + 4l = 30r - 6$, либо Ω является t-кокликой, $p = 2$, $t \le 56$ четно и $4t + \alpha_1(g) = 30r - 6$, либо Ω — непустой граф, не являющийся кликой или кокликой, $p \le 11$ и $|\Omega| \le 298$, если $p = 11$, $|\Omega| \le 364$, если $p = 7$, $|\Omega| \le 466$, если $p = 5$, $|\Omega| \le 507$, если $p = 3$, $|\Omega| \le 526$, если $p = 2$.

Пусть Ω — пустой граф. Если $p = 2$ и $d(w, w^g) = 1$, то g фиксирует вершину из $[w] \cap [w^g]$; противоречие. Поэтому $\alpha_1(g) = 0$; снова противоречие. Если $p = 3$, то $\alpha_1(g) = 90r - 6$ делится на 19 и $r = 14$. Если $p = 7$, то $\alpha_1(g) = 210r + 84$ делится на 19 и $r = 11$; противоречие.

Пусть Ω является t-кокликой. Тогда $p = 2$, $t = 38$ и $\alpha_1(g) = 30r - 4t + 6$ делится на 19. Поэтому $r = 15, 34, 53$.

Пусть Ω не является пустым графом, кликой или кокликой. Если $p = 11$, то $|\Omega| = 11s + 1 \le 298$ и $|\Omega|$ делится на 19. Поэтому $s = 12$, $\chi_1(g) = (418 + \alpha_1(g))/30$, $\alpha_1(g) = 330l - 418$ и l делится на 19; противоречие.

Если $p = 7$, то $|\Omega| = 7s \le 364$ и $s = 19, 38$. Отсюда число $\chi_1(g) = (28s + \alpha_1(g) - 114)/30$ сравнимо с -1 по модулю 7, $\alpha_1(g) = 210t + 84 - 28s$ делится на 19. Поэтому $t = 11$ и $s = 38$.

Допустим, что $|C_G(f)|$ делится на 49. Тогда $C_G(f)$ содержит подгруппу U порядка 49. Если $h \in C_G(f)$ и $h^7 = g$, то получим противоречие с действием h на $\Gamma - \Omega$. Пусть $g_1, \ldots, g_8$ порождают различные подгруппы порядка 7 из U, $\Omega^i = \mathrm{Fix}(g_i)$ и $\Omega^0 = \mathrm{Fix}(U)$. Так как $1596 - 266$ не делится на 49, то Ω^0 — пустой граф и $1596 - 266i$ должно делиться на 49 для некоторого $i \le 8$; противоречие.

Если $p = 5$, то $|\Omega| = 5s + 1 \le 466$ и $s = 15, 34, 53, 72, 91$. Далее, число $\chi_1(g) = (20s + \alpha_1(g) - 110)/30$ сравнимо с -1 по модулю 5, $\alpha_1(g) = 150t + 140 - 20s$ делится на 19, $t = 15$ и $s = 53, 72, 91$. Соответственно число $|\Omega|$ равно $266, 361, 456$ и $\alpha_1(g)$ равно $1330, 950, 570$. В случае $|\Omega| = 266$ для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ подграф $u^{\langle g \rangle}$ является 5-кликой.

Если $p = 3$, то $|\Omega| = 3s \le 507$ и $s = 19, 38, 57, 76, 95, 114, 133, 152$. Далее, число $\chi_1(g) = (12s + \alpha_1(g) - 114)/30$ сравнимо с -1 по модулю 3, $\alpha_1(g) = 90t - 6 - 12s$ делится на 19 и $t = 14, 33$.

Если $p = 2$, то $|\Omega| = 2s \le 526$ и $s = 19l$, $l \le 13$. Далее, число $\chi_1(g) = (8s + \alpha_1(g) - 114)/30$ нечетно, $\alpha_1(g) = 60t + 144 - 8s$ делится на 19 и $t = 9, 28, 47$.

Допустим, что $|C_G(f)|$ делится на 25. Тогда $C_G(f)$ содержит подгруппу U порядка 25. Далее, $v = 1596$, $|\Omega| \in \{266, 361, 456\}$, соответственно g фиксирует $14, 19, 24$ точек из F, поэтому $|\Gamma - \Omega|$ не делится на 25 и $C_G(f)$ не содержит элементов порядка 25. Пусть $g_1, \dots, g_6$ порождают различные подгруппы порядка 5 из U, $\Omega^i = \mathrm{Fix}(g_i)$ и $\Omega^0 = \mathrm{Fix}(U)$.

Пусть на F имеется орбита w^U длины 25. Тогда $\Delta = w^{U\langle f\rangle}$ — регулярный подграф из Γ степени d на $w = 25\cdot 19$ вершинах. По лемме 2 имеем $-4 \le d - 25(110-d)/(84-25) \le 26$, поэтому $27 \le d \le 46$. Аналогично w^U — регулярный подграф из Γ степени t на $w = 25$ вершинах. По лемме 2 $-4 \le t - 25(110 - t)/(1596 - 25) \le 26$, поэтому $t \le 26$.

Пусть на F имеются две U-орбиты длины 25 и $|w^U| = 25$. Если U фиксирует точно 14 точек из F, то либо

а) два элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 24 точки из F, а четыре элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 14 точек из F, либо

б) один элемент из $\{g_i\}$ фиксирует 24 точки из F, два элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 19 точек из F, а три элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 14 точек из F, либо

в) четыре элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 19 точек из F, а два элемента из $\{g_i\}$ фиксируют по 14 точек из F.

В случае а) степень графа w^U не меньше 16 и $|[w]\cap[w^g]| \ge 9$ для несмежных вершин w, w^g из w^U; противоречие. В случае б) w^U содержит точечный подграф для $pG_2(4,2)$ и w^U — кореберно регулярный граф с параметрами (25,12,6). Отсюда $d(w, w^{g_i}) = 2$ для любого элемента $\{g_i\}$, фиксирующего более 14 точек из F и $[w]$ не пересекает Ω_i для элемента $\{g_i\}$, фиксирующего более 14 точек из F. Пусть X — объединение U-орбит длины 25, $Y = \Omega^0 \cup_i \{\Omega^i \mid g_i$ фиксирует более 14 точек из F $\}$. Тогда $|Y| = 39 \cdot 19$, между X и Y нет ребер и по лемме 3 имеем $19 \cdot 50 \cdot 39 \cdot 19 \le 19(84-50)19(84-39)(26+4)^2/(220-26+4)^2$; противоречие.

Если U фиксирует точно 19 точек из F, то

г) пять элементов из $\{g_i\}$ фиксируют по 24 точки из F, а один элемент из $\{g_i\}$ фиксирует 19 точек из F.

Пусть на F нет U-орбит длины 25. Тогда $\Gamma = \cup_{i=1}^{6}\Omega^i$. Если U фиксирует точно 4 точки из F, то либо

а) два элемента g_1, g_2 фиксируют по 24 точки из F, а четыре элемента $g_3, \dots, g_6$ фиксируют по 14 точек из F, либо

б) один элемент g_1 фиксирует 24 точки из F, два элемента g_2, g_3 фиксируют по 19 точек из F, а три элемента $g_4, \dots, g_6$ фиксируют по 14 точек из F, либо

в) четыре элемента $g_1, \dots, g_4$ фиксируют по 19 точек из F, а два элемента g_5, g_6 фиксируют по 14 точек из F.

Допустим, что элемент g_1 фиксирует 24 точки из F, а элемент g_6 фиксирует 14 точек из F. Тогда $w^{\langle g_1\rangle}$ является 5-кликой для любой вершины $w \in \cup_{i=2}^{5}(\Omega^i - \Omega_0)$ и $\alpha_1(g_1) \ge 19(84 - 4 - 20 - 10)$; противоречие с тем, что $\alpha_1(g) = 570$. Поэтому случаи а), б) невозможны. Допустим, что элемент g_1 фиксирует 19 точек из F, а элемент g_6 фиксирует 14 точек из F. Тогда $\alpha_1(g_1) \ge 19(84 - 4 - 15 - 10)$; противоречие с тем, что $\alpha_1(g) = 950$. Поэтому случай в) невозможен.

Если U фиксирует точно 9 точек из F, то либо

г) три элемента $g_1, \dots, g_3$ фиксируют по 24 точки из F и три элемента $g_4, \dots, g_6$ фиксируют по 14 точек из F, либо

д) два элемента g_1, g_2 фиксируют по 24 точки из F, три элемента $g_3, \dots, g_5$ фиксируют по 19 точек из F, а один элемент g_6 фиксирует 14 точек из F.

Допустим, что элемент g_1 фиксирует 24 точки из F, а элемент g_6 фиксирует 14 точек из F. Тогда $w^{\langle g_1\rangle}$ является 5-кликой для любой вершины $w \in \cup_{i=2}^{5}(\Omega^i - \Omega_0)$ и $\alpha_1(g_1) \ge 19(84 -$

$9 - 15 - 5$); противоречие с тем, что $\alpha_1(g) = 570$. Поэтому случаи г), д) невозможны.

Пусть на F имеется единственная U-орбита длины 25 и $|w^U| = 25$. Тогда $\Delta = w^{U\langle f\rangle}$ — регулярный подграф из Γ степени d на $25 \cdot 19$ вершинах, $27 \leq d \leq 46$.

Если U фиксирует точно 9 точек из F, то либо

а) пять элементов $g_1, \ldots, g_5$ фиксируют по 24 точки из F, а один элемент g_6 фиксирует 14 точек из F, либо

б) четыре элемента $g_1, \ldots, g_4$ фиксируют по 24 точки из F, два элемента g_5, g_6 фиксируют по 19 точек из F.

Допустим, что элемент g_1 фиксирует 24 точки из F, а элемент g_6 фиксирует 14 точек из F. Тогда $w^{\langle g_1\rangle}$ является 5-кликой для любой вершины $w \in \cup_{i=2}^{5}(\Omega^i - \Omega_0)$ и $\alpha_1(g_1) \geq 19(59-9-15-5)$. Но $\alpha_1(g) = 570$, поэтому в случае а) подграф $w^{\langle g_1\rangle}$ является кокликой для любой вершины $w \in \Omega_6 \cup \Delta$. Теперь для $w \in \Delta$ подграф $[w]$ содержит не более 6 вершин из Ω^i, $i = 1, \ldots, 6$ и степень w в Γ не больше $46 + 6 \cdot 6$; противоречие.

Если U фиксирует точно 14 точек из F, то либо

в) четыре элемента $g_1, \ldots, g_4$ фиксируют по 24 точки из F, один элемент g_5 фиксирует 19 точек из F и один элемент g_6 фиксирует 14 точек из F, либо

г) три элемента $g_1, \ldots, g_3$ фиксируют по 24 точки из F, три элемента $g_4, \ldots, g_6$ фиксируют по 19 точек из F.

Допустим, что элемент g_1 фиксирует 24 точки из F, а элемент g_6 фиксирует 14 точек из F. Тогда $w^{\langle g_1\rangle}$ является 5-кликой для любой вершины $w \in \cup_{i=2}^{5}(\Omega^i - \Omega_0)$ и $\alpha_1(g_1) \geq 19(59-9-20)$. Но $\alpha_1(g) = 570$, поэтому в случае в) подграф $w^{\langle g_1\rangle}$ оказывается кокликой для любой вершины $w \in \Omega_6 \cup \Delta$. Теперь для $w \in \Delta$ подграф $[w]$ содержит не более 6 вершин из Ω^i, $i = 1, \ldots, 4$ и $[w]$ содержит в $\Omega^5 \cup \Omega^6$ не менее $110 - 46 - 4 \cdot 6 = 40$ вершин. Отсюда $w^{\langle g_5\rangle}$ является кликой и w^U оказывается 5×5-решеткой. Теперь $[w]$ содержит не более 4 вершин из Ω^i, $i = 1, \ldots, 4$. Если $\beta = |[w] \cap \Omega^0|$, то $[w]$ содержит в $\Omega^5 - \Omega^0$ не менее $110 - 46 - (16 - 4\beta) = 58 + 4\beta$ вершин. Таким образом, число ребер между Δ и $\Omega^5 - \Omega^0$ не меньше $19 \cdot 25(58 + 4\beta)$ и некоторая вершина из $\Omega^5 - \Omega^0$ смежна по крайней мере с $5(58+4\beta)$ вершинами из Δ; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* 19 *делит* $|S(G)|$, *то* $L = \bar{T}$ — *простая группа,* $L \cong A_5, A_6$, $V = S(G)$ *является 7-группой и* $|V : V_a| = 7$;

(2) *если* 19 *не делит* $|S(G)|$, *то группа* $L = O^{19'}(\bar{T})$ *изоморфна либо* $L_3(7)$ *и* $|L : L_a| = 57$, *либо* J_1, *подгруппа* L_a *изоморфна* $L_2(11)$ *и имеет индекс* $19 \cdot 14$ *в* L;

(3) *если* $\bar{T}$ *содержит еще одну компоненту* M, *то либо* L *изоморфна* $L_3(7)$, *длина любой* L-*орбиты равна* 57 *и* $M \cong PSp_4(3)$ *действует транзитивно на этих* 28 *орбитах. В случае* J_1 *длина любой* L-*орбиты равна* 266, $M \cong A_6$ *действует транзитивно на этих шести орбитах.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть 19 делит $|S(G)|$. Ввиду леммы 6 и табл. 1 из [10] группа $\bar{T}$ является прямым произведением групп L^i, изоморфных A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, $PSp_4(3)$, $L_2(7)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$, $L_3(4)$, $U_3(5)$, $U_4(3)$, $Sp_6(2)$, $\Omega_8^+(2)$, J_2. Если $L = \bar{T}$ — простая группа, то $|L : L_a|$ делит 84.

Если L содержит элемент h порядка 7 и элемент g порядка 5, то h фиксирует 14-точечное подмножество F_0 из F, g фиксирует t точек из F, $t \in \{14, 19, 24\}$. В случае A_7 длины L-орбит на F равны 1 или делятся на 7, 15, 21, 35. Ввиду транзитивности действия $C_G(f)$ на F длины L-орбит одинаковы и равны 7 или 21. В любом случае элемент h не фиксирует точек из F; противоречие.

В случае A_8 длины L-орбит на F делятся на 8, 15, 28, 35 или 56. Отсюда длины L-орбит равны 28. В случае $L_3(4)$ длины L-орбит на F делятся на 21, 56. В случае A_9 имеется единственная L-орбита на F длины 84. В случае $Sp_6(2)$ длины $\bar{T}$-орбит на F делятся на 28, 36 или 63. В любом случае имеем противоречие, как и выше.

В случае $U_3(5)$ длины L-орбит на F равны 50. В случае A_{10} длины L-орбит делятся на 10 или 45. В случае A_{11} длины L-орбит на F делятся на 11 или 55. В любом случае длина

L-орбиты не делит 84; противоречие.

Для групп $U_4(3)$, $\Omega_8^+(2)$, J_2 длины $\bar{T}$-орбит на F больше 84.

Если $|L|$ не делится на 7, то $L \cong A_5, A_6, PSp_4(3)$. В случае $PSp_4(3)$ длина L-орбиты на F делится на 27, 36, 40 или 45 и не делит 84; противоречие. В случае A_6 длина L-орбиты на F делится на 6, 10 или 15. Отсюда на F имеются 14 L-орбит длины 6. В случае A_5 длина L-орбиты на F делится на 5, 6 или 10. Отсюда на F имеются 14 L-орбит длины 6. В любом из этих случаев $V = S(G)$ является 7-группой и $|V : V_a| = 7$.

Если $|L|$ не делится на 5, то $L \cong L_2(7), L_2(8), U_3(3)$. В случае $U_3(3)$ длина L-орбиты на F делится на 28, 36 или 63. В случае $L_2(8)$ длина L-орбиты на F делится на 9, 28 или 36. В случае $L_2(7)$ длина L-орбиты на F делится на 7 или 8. В любом случае элемент порядка 7 из L действует без неподвижных точек на F; противоречие.

Пусть $\bar{T}$ — непростая группа. Допустим, что 7 делит $|L^1|$ и 5 делит $|L^2|$. В этом случае для элементов h порядка 7 из L^1 и g порядка 5 из L^2 на F имеются две $\langle gh\rangle$-орбиты длины 35. Отсюда группа L^1L^2 должна действовать транзитивно на F; противоречие.

Если 7 не делит $\bar{T}$, то $L^i \cong A_5, A_6, PSp_4(3)$. Пусть U — силовская 5-подгруппа из L^1L^2, $\langle g_j\rangle = U \cap L^j$ и F_0 — множество точек из F, фиксируемых U. В случае $PSp_4(3)$ длина L^1-орбиты на F делится на 27, 36, 40 или 45 и не делит 84, противоречие. В случае A_6 длина L^1-орбиты на F делится на 6, 10 или 15. Отсюда на F имеются 14 L^1-орбит длины 6. В случае A_5 длина L^1-орбиты на F делится на 5, 6 или 10. Отсюда на F имеются 14 L^1-орбит длины 6. В любом случае L^2 действует интранзитивно на множестве этих L^1-орбит; противоречие.

Если 5 не делит $\bar{T}$, то $L^i \cong L_2(7), L_2(8), U_3(3)$. В случае $U_3(3)$ длина L^i-орбиты на F делится на 28, 36 или 63. В случае $L_2(8)$ длина L^i-орбиты на F делится на 9, 28 или 36. В случае $L_2(7)$ длина L^i-орбиты на F делится на 7 или 8. В любом случае элемент порядка 7 из L^i действует без неподвижных точек на F; противоречие.

Если 19 не делит $|S(G)|$, то ввиду табл. 1 из [10] группа $L = O^{19'}(\bar{T})$ изоморфна $L_2(19)$, $L_3(7)$, $L_4(7)$, $U_3(8)$, J_1, HN. Напомним, что $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ делится на 19 и делит $19 \cdot 84$. Поэтому либо $L \cong L_3(7)$ и $|L : L_a| = 57$, либо $L \cong J_1$, подгруппа L_a изоморфна $L_2(11)$ и имеет индекс $19 \cdot 14$ в L.

Допустим, что $\bar{T}$ содержит еще одну компоненту M. Если h — элемент порядка 7 из M, то L действует на множестве Σ из 266 вершин, фиксируемых h. В случае $L_3(7)$ длина любой L-орбиты на Σ делится на 57; противоречие. В случае J_1 группа L транзитивна на Σ. В этом случае на Γ имеется шесть L-орбит длины 266, на которых M действует транзитивно; противоречие.

Если g — элемент порядка 5 из M, то L действует на множестве Φ из $19t$ вершин, фиксируемых g, $t = 14, 19, 24$. В случае $L_3(7)$ длина любой L-орбиты на Φ равна 57, поэтому $t = 24$ и M действует транзитивно на этих 28 орбитах. В случае J_1 длина любой L-орбиты на Φ равна 266, поэтому $t = 14$ и M действует транзитивно на этих шести орбитах. Лемма доказана.

Из лемм 7, 8 следует теорема 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Higman D.G.** Characterization of families of rank 3 permutation groups by the subdegrees, I // Arch. Math. 1970. Vol. 21, no. 1. P. 151–156. doi: 10.1007/BF01220896 .
2. **Зюляркина Н.Д., Махнев А.А.** Реберно-симметричные полутреугольные графы Хигмена // Докл. АН. 2014. Т. 459, №3. С. 261–265.
3. Вершинно транзитивные полутреугольные графы с $\mu = 7$ / Н. Д. Зюляркина, А. А. Махнев, Д. В. Падучих, Хамгокова М.М // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 1198–1206. doi: 10.17377/semi.2017.14.101 .
4. **Зюляркина Н.Д., Махнев А.А.** Небольшие вершинно симметричные графы Хигмена с $\mu = 6$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 54–59. doi: 10.17377/semi.2018.15.007 .
5. **Зюляркина Н.Д., Махнев А.А.** Автоморфизмы полутреугольных графов, имеющих $\mu = 6$ // Докл. АН. 2009. Т. 426, №4. С. 439–442.
6. **Cameron P.** Permutation Groups. London: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p. ISBN: 0-521-65302-9 .

7. **Behbahani M. , Lam C.** Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. 2011. Vol. 311, no. 2-3. P. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
8. **Haemers W.H.** Interlacing eigenvalues and graphs // Linear Algebra Appl. 1995. Vol. 226–228. P. 593–616. doi: 10.1016/0024-3795(95)00199-2 .
9. **Macay M., Siran J.** Search for properties of the missing Moore graph // Linear Algebra Appl. 2010. Vol. 432, no. 9. P. 2381–2398. doi: 10.1016/j.laa.2009.07.018 .
10. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Поступила 20.02.2018
После доработки 16.10.2018
Принята к публикации 22.10.2018

Зюляркина Наталья Дмитриевна
д-р физ.-мат. наук, профессор
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: toddeath@yandex.ru

Шерметова Марияна Хусеновна
аспирант
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик
e-mail: mariyana1992@mail.ru

REFERENCES

1. Higman D.G. Characterization of families of rank 3 permutation groups by the subdegrees, I. *Arch. Math.*, 1970, vol. 21, no. 1, pp. 151–156. doi: 10.1007/BF01220896 .
2. Zyulyarkina N.D., Makhnev A.A. Edge-symmetric semitriangular Higman graphs. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 3, pp. 701–705. doi: 10.1134/S1064562414070199 .
3. Zyulyarkina N.D., Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Khamgokova M. M. Vertex-transitive semi-triangular graphs with $\mu = 7$. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2017, vol. 14, pp. 1198–1206 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2017.14.101 .
4. Zyulyarkina N.D., Makhnev A.A. Small vertex-symmetric Higman graphs with $\mu = 6$. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 54–59 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2018.15.007 .
5. Zyulyarkina N.D., Makhnev A.A. Automorphisms of semitriangular graphs with $\mu = 6$. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 79, no. 3, pp. 373–376. doi: 10.1134/S106456240903020X .
6. Cameron P. *Permutation Groups.* London: Cambridge Univ. Press, 1999, 220 p. ISBN: 0-521-65302-9 .
7. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms. *Discrete Math.*, 2011, vol. 311, no. 2-3, pp. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
8. Haemers W.H. Interlacing eigenvalues and graphs. *Linear Algebra Appl.*, 1995, vol. 226–228, pp. 593–616. doi: 10.1016/0024-3795(95)00199-2 .
9. Macay M., Siran J. Search for properties of the missing Moore graph. *Linear Algebra Appl.*, 2010, vol. 432, no. 9, pp. 2381–2398. doi: 10.1016/j.laa.2009.07.018 .
10. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

Received February 20, 2018
Revised October 16, 2018
Accepted October 22, 2018

Natal'ya Dmitrievna Zyulyarkina, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., South Ural State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: toddeath@yandex.ru .

Mariyana Khusenovna Shermetova, doctoral student, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: mariyana1992@mail.ru .