ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЦОКОЛЕМ $L_2(2^m) \times L_2(2^n)$[1]

В. И. Зенков

В теореме 1 для конечной группы G с цоколем $L_2(2^m) \times L_2(2^n)$ и нильпотентными подгруппами A и B доказано, что из условия $\min_G(A,B) \neq 1$ следует, что $n = m = 2$ и подгруппы A и B являются 2-группами. Здесь подгруппа $\min_G(A,B)$ порождена всеми пересечениями вида $A \cap B^g$, $g \in G$, порядок которых минимален, а подгруппа $\mathrm{Min}_G(A,B)$ порождена всеми пересечениями вида $A \cap B^g$, $g \in G$, которые минимальны по включению. В теореме 2 для конечной группы G с цоколем $A_5 \times A_5$ и силовской 2-подгруппой S дается описание подгрупп $\min_G(S,S)$ и $\mathrm{Min}_G(S,S)$. На основании теоремы 2 в теореме 3 для конечной группы G с цоколем $A_5 \times A_5$ с точностью до сопряжения дается описание всех пар нильпотентных подгрупп (A,B) в G, для которых $\min_G(A,B) \neq 1$.

Ключевые слова: конечная группа, нильпотентная подгруппа, пересечение подгрупп.

V. I. Zenkov. On intersections of nilpotent subgroups in finite groups with socle $L_2(2^m) \times L_2(2^n)$.

In Theorem 1, it is proved for a finite group G with socle $L_2(2^m) \times L_2(2^n)$ and nilpotent subgroups A and B that the condition $\min_G(A,B) \neq 1$ implies that $n = m = 2$ and the subgroups A and B are 2-groups. Here the subgroup $\min_G(A,B)$ is generated by smallest-order intersections of the form $A \cap B^g$, $g \in G$, and the subgroup $\mathrm{Min}_G(A,B)$ is generated by all intersections of the form $A \cap B^g$, $g \in G$, that are minimal with respect to inclusion. In Theorem 2, for a finite group G with socle $A_5 \times A_5$ and a Sylow 2-subgroup S, we give a description of the subgroups $\min_G(S,S)$ and $\mathrm{Min}_G(S,S)$. On the basis of Theorem 2, in Theorem 3 for a finite group G with socle $A_5 \times A_5$ we describe up to conjugation all pairs of nilpotent subgroups (A,B) of G for which $\min_G(A,B) \neq 1$.

Keywords: finite groups, nilpotent subgroup, intersection of subgroups.

MSC: 20D05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-126-134

Введение

При изучении конечных групп определяющую роль играют нормальные подгруппы. Подгруппа N группы G называется *нормальной* в группе G, если для любого элемента x группы G имеет место соотношение $x^{-1}Nx = N$, которое обычно записывают в виде $N^x = N$. Тогда можно рассматривать факторгруппу $\overline{G} = G/N$, в которой элементами являются так называемые смежные классы группы G, т. е. подмножества вида xN, причем для нормальной подгруппы из соотношения $N^x = x^{-1}Nx = N$ следует, что $Nx = xN$. Подгруппа $\overline{G}$ имеет при $N \neq 1$ меньше элементов, чем G, поэтому появляется возможность использования индукции. Но как увидеть, что данная конечная группа имеет неединичную нормальную подгруппу?

Существует несколько признаков наличия у группы G такой подгруппы. В контексте настоящей работы нас будет интересовать в первую очередь признак, полученный в 1904 году Бернсайдом [1], в котором он для бипримарной группы G, т. е. группы, порядок которой (количество элементов в группе) делится только на два простых числа, доказал существование такой неединичной подгруппы N. Годом позднее [2] Бернсайд опубликовал вторую свою работу по бипримарным группам, где он доказал так называемую “вторую $p^\alpha q^\beta$-теорему”, в которой при $p^\alpha > q^\beta$ либо в G существует неединичная нормальная p-подгруппа N, либо $|G|$ четен,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов России (соглашение 02.A03.210006 от 27.08.2013).

а второе простое, делящее $|G|$, является числом Ферма или Мерсенна. Позднее, уже в 1975 году, В. С. Монахов [3] уточнил эту теорему Бернсайда. Заметим, что из условия $p^\alpha > q^\beta$ следует, что любая пара силовских p-подгрупп группы G имеет нетривиальное пересечение. На Международном математическом конгрессе в Ницце в 1954 году Брауэр поставил задачу, обобщающую формулировку “второй $p^\alpha q^\beta$-теоремы” на общий случай, а именно, если $p^\alpha = |P|$, где P — силовская p-подгруппа группы G и $(p^\alpha)^2 > |G|$, то группа G имеет собственную неединичную нормальную подгруппу. Конечно, в этом общем случае любая пара силовских p-подгрупп имеет нетривиальное пересечение. Именно это обстоятельство побудило Брауэра поставить своему ученику Ито задачу описания разрешимых конечных групп, в которых любая пара силовских p-подгрупп имеет нетривиальное пересечение. Формулировку этой теоремы, а также многочисленных результатов, связанных с изучением пересечений силовских p-подгрупп, можно найти в [4]. Более поздний обзор результатов по этой тематике можно посмотреть в [5].

Данная работа связана с изучением пересечений пар нильпотентных подгрупп, которые, в свою очередь являются произведениями своих силовских подгрупп, в духе “второй $p^\alpha q^\beta$-теоремы”, т. е. изучением следствий, которые получаются при условии неединичности пересечений пар нильпотентных подгрупп.

Внесем необходимые определения. Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Рассмотрим множество всех пересечений вида $A \cap B^g$, $g \in G$. Определим в этом множестве два подмножества: $M_G(A, B)$ — множество всех минимальных по включению таких пересечений и $m_G(A, B)$ — множество всех минимальных по порядку таких пересечений. Ясно, что $m_G(A, B) \subseteq M_G(A, B)$ и для подгрупп $\min_G(A, B) = \langle m_G(A, B)\rangle$ и $\mathrm{Min}_G(A, B) = \langle M_G(A, B)\rangle$ имеем $\min_G(A, B) \le \mathrm{Min}_G(A, B)$. Вообще говоря, в некоторых случаях, например в группе $G \simeq \Sigma_4$, для подгрупп $A \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $C_4 \simeq B < A$ имеем $M_G(A, B) = \{B, \langle t\rangle^f, \langle t\rangle^{f^2}\}$, а $m_G(A, B) = \{\langle t\rangle^f, \langle t\rangle^{f^2}\}$, где t — инволюция из $\Omega(B)$, а f — элемент порядка три из G. Следовательно, $\mathrm{Min}_G(A, B) \supset \min_G(A, B)$ и $A = \langle M_G(A, B)\rangle > \langle m_G(A, B)\rangle = O_2(G)$.

Подгруппы $\mathrm{Min}_G(A, B)$ и $\min_G(A, B)$ будут использоваться при изучении пересечений подгрупп A и B в группе G в силу эквивалентности следующих условий:

1) $A \cap B^g \ne 1$ для любого элемента g из G; 2) $\mathrm{Min}_G(A, B) \ne 1$; 3) $\min_G(A, B) \ne 1$.

В частности, если подгруппы A и B абелевы, то, используя отмеченную эквивалентность, по лемме 2 (см. разд. 1) $\mathrm{Min}_G(A, B) \le F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. То же самое заключение справедливо по лемме 3, если подгруппа A циклическая и B нильпотентная. Однако, как показывает рассмотренный выше пример группы $G \simeq \Sigma_4$, заключение $\mathrm{Min}_G(A, B) \le F(G)$ нарушается даже в том случае, когда подгруппа B циклическая, а $A \simeq D_8$, т. е. A — минимальная неабелева группа. В случае, когда G — простая неабелева группа, а подгруппы A и B примарны, по лемме 4 $\mathrm{Min}_G(A, B) = 1$. Однако уже, например, для группы $G \simeq \mathrm{Aut}(L_n(2))$, $n \ge 3$, имеем $\min_G(S, S) \ne 1$ для $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ (см. [5, теорема $B2$]). Более того, в работе [6, теорема 2] приведено описание в $G \simeq \mathrm{Aut}(L_n(2))$ при $n \ge 3$ с точностью до сопряжения всех упорядоченных пар (A, B) примарных подгрупп, для которых $\min_G(A, B) \ne 1$, а в работе [7, теорема 1] дано описание с точностью до сопряжения всех упорядоченных пар (A, B) примарных подгрупп нечетного порядка в почти простой группе. Таким образом, за известными исключениями, если в почти простой группе G для примарных подгрупп A и B имеем $\min_G(A, B) \ne 1$, то A и B — 2-группы.

Если же A и B — нильпотентные подгруппы в почти простой группе G и $\min_G(A, B) \ne 1$, то в случае $\mathrm{Soc}(G) \simeq A_n$ при $n \ge 5$ по [8, теорема 2] имеем $n = 6$ или $n = 8$, причем в обоих случаях A и B — 2-группы.

Рассмотренные выше результаты относятся к изучению подгрупп $\min_G(S, S)$ и $\mathrm{Min}_G(S, S)$, где $S \in \mathrm{Syl}(G)$ в почти простых группах, и на основе изучения этих подгрупп сделаны заключения о подгруппах $\min_G(A, B)$ и $\mathrm{Min}_G(A, B)$ в случае примарных или нильпотентных подгрупп A и B в такой группе.

Однако уже при изучении пересечений нильпотентных подгрупп в конечных группах со спорадическим цоколем возникают вопросы, связанные с исследованием подгрупп $\min_G(A,B)$ и $\mathrm{Min}_G(A,B)$ в конечных группах с полупростым цоколем. Такая ситуация имеет место, например, в группе F_5, где централизатор некоторой инволюции имеет секцию с цоколем $A_5 \times A_5$ (см. [9, с. 166]). Отметим, что это единственная группа среди всех спорадических групп, в которой имеет место это обстоятельство (см. [9]). Мы рассматриваем задачу изучения подгрупп $\mathrm{Min}\,_G(A,B)$ и $\min_G(A,B)$ в более широком контексте для любого поля характеристики два, и нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, $\mathrm{Soc}\,(G) \simeq L_2(2^m) \times L_2(2^n)$, A и B — нильпотентные подгруппы из G и $\min_G(A,B) \neq 1$. Тогда $m = n = 2$, A и B — 2-подгруппы в G, содержащие инволюцию i, которая переставляет компоненты группы G.*

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, $\mathrm{Soc}(G) \simeq A_5 \times A_5$, S — силовская 2-подгруппа в G. Если $\min_G(S,S) \neq 1$, то справедливы следующие утверждения*:

(1) *$G = (K_1 \times K_2) \leftthreetimes \langle i \rangle$, где $K_1 \simeq K_2 \simeq \Sigma_5$, i — инволюция из S и $K_1^i = K_2$, $\min_G(S,S) = \langle i^S, j^S \rangle$, j — инволюция из $K_1 \backslash K_1'$, лежащая в S, причем подгруппа $\min_G(S,S)$ содержит нормальную в S подгруппу $V = Z(S \cap K_1K_2) \simeq E_4$, такую что $\overline{S} = S/V \simeq E_4 \wr C_2$, $\langle \overline{i}^{\overline{S}} \rangle \simeq E_8$, $\overline{\min_G(S,S)} \simeq E_8.E_4$, $\langle \overline{i}^{\overline{S}} \rangle \cap \langle \overline{j}, \overline{j}^{\overline{i}} \rangle = \langle \overline{j} \cdot \overline{j}^{\overline{i}} \rangle$, в частности $|\min_G(S,S)| = 2^6$.*

(2) $\mathrm{Min}\,_G(S,S) = S$.

Теорема 3. *Пусть G — конечная группа, $\mathrm{Soc}(G) \simeq A_5 \times A_5$, S — силовская 2-подгруппа в G, A и B — нильпотентные подгруппы в G. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) $\min_G(A,B) \neq 1$;

(2) $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$;

(3) *$A \cap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G*;

(4) *$G \simeq \Sigma_5 \wr C_2$ и с точностью до сопряжения пара (A,B) совпадает с парой (S,S), $(S, \min_G(S,S))$, $(\min_G(S,S), S)$.*

Наши обозначения в основном взяты из [9], а некоторые, как, например, обозначение Σ_n для симметрической группы, взяты из [10]. Обозначение $l_2(P)$ для числа орбит при действии сопряжением силовской p-подгруппой P группы G на множестве всех силовских p-подгрупп из G, пересекающихся с P тривиально, можно найти в [5].

1. Предварительные сведения

Согласно эквивалентностям 1)–3), сформулированным в предыдущем разделе, запишем единообразно следующие известные результаты.

Лемма 1 [8, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, G_1, A и B — подгруппы из G такие, что G_1 содержит A. Если $G_2 \trianglelefteq G_1$ и $G_2 \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, причем в факторгруппе $\overline{G}_1 = G_1/_{G_2}$ имеем $\overline{A} \cap (\overline{G_1 \cap B^g})^{\overline{g_1}} = \overline{1}$ для некоторого элемента $g_1 \in G_1$, то $A \cap B^{gg_2} = 1$ для любого элемента g_2 из смежного класса g_1G_2.*

Лемма 2 [11, теорема 1]. *Пусть G — конечная группа, A и B — абелевы подгруппы из G. Тогда $\mathrm{Min}\,_G(A,B) \leq F(G)$.*

Лемма 3 [12, лемма 2.1]. *Пусть G — конечная группа, A — циклическая подгруппа и B — нильпотентная подгруппа из G. Тогда $\mathrm{Min}\,_G(A,B) \leq F(G)$.*

Лемма 4 [13, теорема 1]. *Пусть G — конечная простая неабелева группа, A и B — примарные подгруппы из G. Тогда $\mathrm{Min}\,_G(A,B) = \min_G(A,B) = 1$.*

Лемма 5 [14, теорема 2]. *Пусть G — конечная неразрешимая группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, A и B — нильпотентные подгруппы из G и $\min_G(A,B) \neq 1$. Тогда A и B — 2-подгруппы и либо $q = 9$, либо q — простое число Мерсенна.*

Лемма 6 [5, лемма 3.2]. *Пусть G — конечная группа, M — p-локальная подгруппа из G, такая, что $M = N_G(O_p(M))$. Если в M найдутся две силовские p-подгруппы Q_1 и Q_2, такие, что $Q_1 \cap Q_2 = O_p(M)$, то в G найдутся две силовские p-подгруппы P_1 и P_2, такие что $P_1 \cap P_2 = O_p(M)$ и $P_1 \geq Q_1$, а $P_2 \geq Q_2$.*

2. Доказательство теоремы 1

Положим $E(G) = L_1 \times L_2$, где $L_1 \simeq L_2(2^m)$, $L_2 \simeq L_2(2^n)$, $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, $S_0 = S \cap E(G)$.

Пусть G — контрпример к теореме 1, порядок G при этом минимален и пару нильпотентных подгрупп A и B в группе G, для которой $\min_G(A,B) \neq 1$, выберем так, чтобы число $|A||B|$ было минимальным.

Лемма 7. *Имеем $L_1 \ntrianglelefteq G$.*

Доказательство. Допустим, что $L_1 \trianglelefteq G$. Тогда и $L_2 \trianglelefteq G$. Значит, $C_G(L_1) \trianglelefteq G$ и $C_G(L_2) \trianglelefteq G$. Так как $L_1 \times L_2 = E(G) = \mathrm{Soc}\,(G)$, то $C_G(E(G)) = C_G(L_1) \cap C_G(L_2) = 1$. Следовательно, $G \simeq G/_{C_G(L_1) \cap C_G(L_2)}$. Заметим, что $G/_{C_G(L_1)} \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,(L_2)$ и $G/_{C_G(L_2)} \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,(L_1)$. Тогда по теореме Ремака [15, c. 50] $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,(L_1) \times \mathrm{Aut}\,(L_2)$. По лемме 5 $\min_{\mathrm{Aut}\,(L_1)}(A_1, B_1) = \min_{\mathrm{Aut}\,(L_2)}(A_2, B_2) = 1$ для любых нильпотентных подгрупп A_1, B_1 из $\mathrm{Aut}\,(L_1)$ и A_2, B_2 из $\mathrm{Aut}\,(L_2)$. Следовательно, $\min_G(A,B) = 1$ для любых нильпотентных подгрупп A, B из G. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Если подгруппа A является 2-группой, то $n = 2$.*

Доказательство. По лемме 7 $L_1 \ntrianglelefteq G$. Следовательно, $\mathrm{Soc}\,(G) = L_1 \times L_2$, где $L_1 \simeq L_2 \simeq L_2(2^n)$, и $L_1^t = L_2$, где $t^2 \in N(L_1) \cap N(L_2)$. Элемент t без ограничения общности лежит в A, где $A \leq S$.

Если $\Omega(A) \leq N(L_1) \cap N(L_2)$, то $\Omega(A) \neq A$, так как $t \notin \Omega(A)$. Но тогда $\min_G(\Omega(A), B) \neq 1$ в силу того, что $A \cap B^g$ содержит инволюцию из A для любого g из G. Это противоречит выбору числа $|A||B|$. Следовательно, t — инволюция. Поэтому $G = (K_1 K_2) \leftthreetimes t$, где $\mathrm{Soc}\,(K_1) = L_1 \simeq L_2(2^n) \simeq L_2 = \mathrm{Soc}\,(K_2)$. Так как согласно лемме 5 $\min_{K_1}(A_1, B_1) = 1$ для любых нильпотентных подгрупп A_1 и B_1 из K_1 и $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,(L_2(2^n)) \wr C_2$, то для доказательства того, что $n = 2$, достаточно установить это при $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,(L_2(2^n)) \wr C_2$ и $A = \Omega(S)$. Тогда $K_1 \simeq K_2 \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,(L_2(2^n)) = L_2(2^n) \leftthreetimes C_n$, где C_n — группа полевых автоморфизмов $L_2(2^n)$ (см. [9, c. XV]). Значит, по аргументу Фраттини (см. [15, c. 50]) $N_G(S_0) = S_0 \leftthreetimes ((T \leftthreetimes C) \wr \langle t \rangle)$, где $S_0 = S_0 \cap K_1 \times K_2 \simeq (E_{2^n})^2$, $T \simeq C_{2^n - 1}$, $C \simeq C_n$, $t \simeq C_2$. Так как $A = \Omega(S)$ — 2-группа, то в подгруппе $T \leftthreetimes C$ для подсчета числа орбит силовских 2-подгрупп, пересекающихся с данной силовской 2-подгруппой тривиально, достаточно рассмотреть $\Omega(O_2(C))$ в качестве этой силовской 2-подгруппы. Проведем этот подсчет. Поскольку силовская 2-подгруппа в группе $T \leftthreetimes C \simeq C_{2^n-1} \leftthreetimes C_n$ циклическая, то число силовских 2-подгрупп, пересекающихся с данной тривиально, не меньше числа инволюций в этой группе, уменьшенного на единицу. Но для инволюции C_2 из C_n согласно [10, (9-1)] имеем $C_{L_2(2^n)}(C_2) \simeq L_2(2^{n/2})$. Поэтому число нужных инволюций не меньше, чем $(2^n - 1)/(2^{n/2} - 1) - 1 = 2^{n/2}$. Следовательно, число орбит $l_2(C_{2^n-1} \leftthreetimes C_n)$ не меньше, чем $2^{n/2}/n$. Если $n \geq 5$, то $2^n > n^2$ в силу того, что для $f(x) = 2^x - x^2$ производная $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x > 2^{x-1} - 2x > 0$ из-за $\ln(2) > 1/2$. Поэтому $l_2(C_{2^n-1} \leftthreetimes C_n) > 1$. Пусть $\overline{N} = N_G(S_0)/S_0$. Тогда $\overline{N} \simeq (C_{2^n-1} \leftthreetimes C_n) \wr C_2$ и по пп. (2), (3) леммы 3.12 из [5] имеем $l_2(\overline{N}) > 0$, т. е. $\min_{\overline{N}}(A, \overline{B}_1) = 1$ для любой нильпотентной подгруппы $\overline{B}_1$ из $\overline{N}$. Отсюда по лемме 1 при $G_1 = N$ и $G_2 = S_0$ следует, что $\min_G(S, S) = 1$. Противоречие.

Если $n = 3$, то $\overline{N} \simeq (C_7 \leftthreetimes C_3) \wr C_2$ и очевидно, что $\min_{\overline{N}}(\overline{S}, \overline{S}) = \overline{1}$. Значит, аналогично аргументам предыдущего абзаца по лемме 1 $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие.

Если $n = 4$, то в группе $R = T \leftthreetimes C \simeq C_{15} \leftthreetimes C_4$ имеем 15 силовских 2-подгрупп. Но для инволюции j из C имеем $C_T(j) \simeq C_3$ из-за того, что $C_{K_1'}(j) \simeq L_2(4)$. Следовательно, в подгруппе R точно три силовские 2-подгруппы пересекаются по $\langle j \rangle$. Поэтому $15 - 3 = 12$ силовских 2-подгрупп из R пересекаются с данной силовской 2-подгруппой тривиально. Следовательно, $l_2(R) = 12/4 = 3$. Значит, по лемме 3.12 из [5] имеем $l_2(\overline{N}) \geq 3$, откуда $\min_{\overline{N}}(\overline{S}, \overline{B}_1) = \overline{1}$, где $B_1 = S^x$ и $S_0 \cap S^x = 1$. По лемме 1 $\min_G(S, S) = 1$. Противоречие.

Случай $n = 2$ разобран в следующем разделе. Лемма доказана. □

Лемма 9. *Если $O(A) \neq 1$, то $O(A) \cap E(G) \neq 1$.*

Доказательство. Допустим, что $O(A) \neq 1$ и $O(A) \cap E(G) = 1$. Так как $O(A) \cap E(G) = 1$ и по лемме 7 $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,(L_1) \wr C_2$, то элементы из $O(A)$ индуцируют на каждой из компонент L_1 и L_2 полевые автоморфизмы. Поскольку $O(A)$ является диагональной подгруппой в силу нильпотентности A, то она циклическая. Как и в предыдущей лемме, $O(A)$ централизует в $E(G)$ подгруппу, изоморфную $L_2(2^{n/|O(A)|}) \times L_2(2^{n/|O(A)|})$. Следовательно, без ограничения общности $O(A) \leq N_G(S_1)$. Положим $R = S_1A$. Тогда R — 2-замкнутая подгруппа с точным действием $O(A)$ на S_1. По предыдущей лемме либо $O_2(R) \cap B^g = 1$ для некоторого g из G, либо $n = 2$ и G не контрпример к теореме.

Если $O_2(R) \cap B^g = 1$, то в силу 2-замкнутости R подгруппа $B_1 = R \cap B^g$ имеет нечетный порядок и поэтому без ограничения общности лежит в $O(A)$. Так как $O(A)$ является циклической холловой подгруппой, то согласно лемме 2 $O(A) \cap O(A)^r = 1$ для некоторого r из R. Рассмотрим подгруппу $A \cap B_1^r \leq O(A)$ в силу нечетности B_1 и нильпотентности A. Кроме того, $B_1^r \leq O(A)^r$ в силу того, что $B_1 \leq O(A)$. Следовательно, $A \cap B_1^r \leq O(A) \cap O(A)^r = 1$. Тогда $1 = A \cap B_1^r = A \cap (R \cap B^g)^r = A \cap B^{gr}$. Противоречие. Следовательно, $n = 2$. Противоречие. Лемма доказана. □

Лемма 10. *Подгруппа A — 2-группа.*

Доказательство. Допустим, что A не 2-группа. Тогда $O(A) \neq 1$. По лемме 9 $O(A) \cap E(G) \neq 1$. По лемме 7 $G \hookrightarrow (L_2(2^n) \leftthreetimes C_n) \wr C_2$. Согласно условию $\min_G(A, B) \neq 1$ влечет, что в группе G существует инволюция i, лежащая в S и такая, что $L_1^i = L_2$. Действительно, если бы все инволюции лежали в подгруппе G_0 индекса 2, изоморфно вложенной в $(L_2(2^n) \leftthreetimes C_n) \times (L_2(2^n) \leftthreetimes C_n)$, то тогда по лемме 5 $\min_{G_0}(A_1, B_1) = 1$, где $A_1 = \Omega(O_2(A))O(A)$ и $B_1 = \Omega(O_2(B))O(B)$. Следовательно, $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие. Поэтому $O(A) \cap E(G)$ — диагональная подгруппа нечетного порядка, лежащая в $C_G(i)$. Но в этом случае $|O(A) \cap E(G)|$ делит порядок тора T в $L_2(2^n)$, поэтому в силу сильной изолированности (см. [16, § 12]) A нормализует подгруппу $T \times T^i$ и $O_2(A) \leq C(d)$, где d — диагональный элемент из подгруппы $T \times T^i$.

Допустим, что $O_2(A) = \langle t \rangle$. Тогда $C_G(t) \hookrightarrow C_2 \times \mathrm{Aut}\,(L_2(2^n))$. Так как $\mathrm{Soc}\,(G)$ — неразрешимая подгруппа, то $n > 1$. Тогда согласно лемме 5 $\min_{\mathrm{Aut}\,(L_2(2^n))}(A_1, B_1) = 1$ для любых нильпотентных подгрупп A_1 и B_1 из $\mathrm{Aut}\,(L_2(2^n))$. К тому же $\langle t \rangle \cap B^g = 1$ для некоторого g из G, что следует из теоремы Бэра — Судзуки. Тогда по лемме 1 $A \cap B^h = 1$ для некоторого h из G. Противоречие.

Таким образом, $O_2(A) \neq \langle t \rangle$. Так как подгруппа $C_{\mathrm{Soc}\,(G)}\langle d \rangle$ имеет нечетный порядок в связи с сильной изолированностью торов в $L_2(2^n)$ (см. [16, § 12]), то инволюция i из $Z(A)$, не сопряженная с t, индуцирует на компонентах из $\mathrm{Soc}\,(G)$ полевой автоморфизм. Тогда $C_G(i) \hookrightarrow (\mathrm{Aut}\,(L_2(2^{n/2})) \wr C_2) \times C_2$. При $n = 2$ G не контрпример к теореме. Случай $n = 4$ рассмотрен в лемме 8. Значит, $n \geq 6$. При $n = 6$ $O_2(A) = \langle t \rangle$, что уже рассмотрено, а при $n \geq 8$ в $\overline{C} = C_G(i)/\langle i \rangle$ по индукции $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$, где $B_1 = C_G(i) \cap B^g$ и $\langle i \rangle \cap B^g = 1$. Тогда по лемме 1 $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие. Лемма доказана. □

3. Доказательство теорем 2 и 3

Перейдем к доказательству теоремы 2. Сохраним обозначения из теоремы 1. По условию теоремы 2 подгруппа $\min_G(S,S) \neq 1$. По теореме 1 $G \hookrightarrow (K_1 \times K_2) \leftthreetimes \langle i \rangle$, где $K_1 \simeq K_2 \simeq \Sigma_5$, $|i| = 2$ и $K_1^i = K_2$.

Так как $K_1 \ntrianglelefteq (K_1 \times K_2) \leftthreetimes \langle i \rangle$, то в силу того что $\mathrm{Soc}\,(G) \simeq A_5 \times A_5$, имеем $(K_1')^t \neq K_1'$ для некоторого элемента t из G. Далее, подгруппа $S_0 = S \cap \mathrm{Soc}\,(G) \simeq E_{16}$. Рассмотрим $N_G(S_0)$. Так как $S_0 \trianglelefteq S$, то $N_G(S_0)$ накрывает силовскую 2-подгруппу S из G и содержит подгруппу $T = N_{\mathrm{Soc}\,(G)}(S_0) \simeq E_{16} \leftthreetimes E_9 \simeq A_4 \times A_4$. Значит, $N_G(S_0) \hookrightarrow \Sigma_4 \wr C_2$. Так как $(K_1')^t \neq K_1'$, то $\overline{N} = N_G(S_0)/S_0 \hookrightarrow E_9 \leftthreetimes D_8$ с точным действием D_8 на E_9. Допустим, что образ $\overline{S}$ в $\overline{N}$ не накрывает при этом вложении подгруппу D_8 из $E_9 \leftthreetimes D_8$. Тогда подгруппа $\overline{S}$ — абелева. Значит согласно лемме 2 $\min_{\overline{N}}(\overline{S}, \overline{S}) = \overline{1}$. Кроме того, в силу абелевости подгруппы $S_0 = S \cap \mathrm{Soc}\,(G)$ имеем $S_0 \cap S^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Теперь по лемме 1 при $G_2 = S_0$ и $G_1 = N_G(S_0)$ имеем $\min_G(S,S) = 1$. Противоречие с условием теоремы.

Значит, $\overline{S} \simeq D_8$. Но $\overline{S} \simeq D_8 \simeq N_G(S_0) \cap S^g$. Поэтому $N_G(K_j)/C_G(K_j) \simeq \Sigma_5$ для $j = 1, 2$ и $G \simeq \Sigma_5 \wr C_2$. Таким образом, $G = (K_1 \times K_2)\langle i \rangle$, где $i^2 = 1$ и $K_1^i = K_2$. Кроме того, согласно [5, лемма 3.18] имеем $l_2(\Sigma_5) = 1$.

Далее, $C_{K_1 \times K_2}(i) \simeq C_2 \times \Sigma_5$. Тогда по лемме 6 $\langle i \rangle = S \cap S^h \in m_G(S,S)$ для некоторого h из G. Следовательно, $\langle i^S \rangle \in m_G(S,S)$ для любого $s \in S$. Поэтому $\langle i^S \rangle \leq \min_G(S,S)$. Рассмотрим инволюцию j из S такую, что $j \in K_1 \backslash K_1'$. Тогда $C_G(j) = C_{K_1 \times K_2}(j) \simeq C_2 \times \Sigma_3 \times \Sigma_5$ (см. [9, с. 2]). Снова по лемме 6 $\langle j \rangle = S \cap S^x \in m_G(S,S)$ для некоторого элемента x из G. Но тогда и $\langle j^S \rangle \leq \min_G(S,S)$, и $\langle j^S \rangle \simeq E_{16}$. Подгруппа $\langle j^S \rangle$ содержит нормальную в S подгруппу $V = Z(S \cap K_1K_2) \simeq E_4$ и, так как $S \cap K_1K_2 \simeq D_8 \times D_8$, факторгруппа $\overline{S} = S/V \simeq E_4 \wr C_2$. Поскольку все инволюции в $\overline{S}$, лежащие вне базы сплетения, сопряжены в $\overline{S}$ (см., например, [5, лемма 3.11]), то $\langle \overline{i}^{\overline{S}} \rangle \simeq E_8$. Инволюции из $\langle \overline{i}^{\overline{S}} \rangle$, лежащие в базе сплетения, являются диагональными относительно действия $\overline{i}$ на $(S \cap K_1K_2)/V$. Инволюция $\overline{j}$ не лежит в $\langle \overline{i}^{\overline{S}} \rangle$, так как в отличие от диагональных $\overline{i}$ не централизует $\overline{j}$. Более того, $\langle \overline{i}^{\overline{S}} \rangle \cap \langle \overline{j}, \overline{j}^{\overline{i}} \rangle = \langle \overline{j} \cdot \overline{j}^{\overline{i}} \rangle$. Следовательно, $|\langle i^S \rangle \langle j^S \rangle| = 2^6$.

Докажем, что $\min_G(S,S) = \langle i^S \rangle \langle j^S \rangle$. Выше уже показано, что $\langle i^S \rangle \langle j^S \rangle \leq \min_G(S,S)$.

Допустим, что $\min_G(S,S) > \langle i^S \rangle \langle j^S \rangle$. Тогда найдутся $D \in m_G(S,S)$ и $D \nleq \langle i^S \rangle \langle j^S \rangle$. По определению $|D| = 2$. Подгруппа D не может лежать в $S \backslash (S \cap K_1K_2)$, так как все инволюции из этой разности сопряжены в S к инволюции i. Значит, $D \leq K_1K_2$. В этом случае подгруппа D не может лежать в $(S \cap K_1K_2) \backslash (S \cap K_1'K_2')$, так как сопряжена либо с $\langle j \rangle$, либо с $j.j^i$ и в любом случае лежит в $\langle i^S \rangle \langle j^S \rangle$. Значит, подгруппа D лежит в $S \cap K_1'K_2'$. Но группа A_5 является TI-группой в силу того, что согласно [9, с. 2] централизаторы инволюций в A_5 являются 2-группами. Следовательно, $|(S \cap K_1'K_2') \cap (S \cap K_1'K_2')^g| \geq 4$. Противоречие с тем, что $D = S \cap K_1'K_2' \cap (S \cap K_1'K_2')^g$. Значит, $\min_G(S,S) = \langle i^S \rangle \langle j^S \rangle$.

Докажем, что $\mathrm{Min}\,_G(S,S) = S$. Рассмотрим силовскую 2-подгруппу $S_1 = S \cap K_1'$ из K_1'. Тогда $N_G(S_1) \simeq E_4 \times \Sigma_5$. Согласно [5, лемма 3.18 (1)] в Σ_5 найдется пара силовских 2-подгрупп с единичным пересечением. Тогда в $N_G(S_1)$ для $Q \in \mathrm{Syl}\,_2 N_G(S_1)$ имеем $Q \cap Q^x = S_1$ для некоторого x из $N_G(S_1)$. Согласно лемме 6 имеем $S \cap S^g = S_1$ для некоторого элемента g из G. Так как $|S_1| = 4$, то $S_1 \notin m_G(S,S)$. В то же время $|S_1 \cap \min_G(S,S)| = 2$. Поэтому $S_1 \in M_G(S,S) \backslash m_G(S,S)$. Поскольку $|S \colon \min_G(S,S)| = 2$, то $\mathrm{Min}\,_G(S,S) = S$. Теорема 2 доказана. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 3. Эквивалентность между собой первых трех условий теоремы 3 проверяется легко. Поэтому достаточно проверить эквивалентность, скажем, первого и четвертого утверждения теоремы.

Докажем, что из (1) следует (4).

Согласно (1) в группе G с $\mathrm{Soc}\,(G) \simeq A_5 \times A_5$ найдется пара нильпотентных подгрупп A и B таких, что $\min_G(A,B) \neq 1$. Тогда по теореме 1 A и B — 2-подгруппы. Поэтому без ограничения общности они лежат в S. Так как $\min_G(A,B) \neq 1$, то, тем более, $\min_G(S,S) \neq 1$. Тогда по теореме 2 $G \simeq \Sigma_5 \wr C_2$. Пусть $D \in m_G(S,S)$. По определению $D = S \cap S^g$ для некоторого элемента g из G. По теореме 2 $|D| = |i| = 2$. Кроме того, $S \cap S^g \geq A \cap B^g \neq 1$. Значит, $2 = |S \cap S^g| \geq |A \cap B^g| \geq 2$. Следовательно, $|S \cap S^g| = |A \cap B^g|$. Поэтому $D = S \cap S^g = A \cap B^g$. Так как D — произвольный элемент из $m_G(S,S)$, то $A \geq \langle m_G(S,S)\rangle = \min_G(S,S)$. Аналогично $B \geq \min_G(S,S)$. По теореме 2 $|S\colon \min_G(S,S)| = 2$. Поэтому для пары (A,B) существуют следующие возможности:

$$(S,S), \quad (\min_G(S,S),S), \quad (S,\min_G(S,S)) \ \text{ и } \ (\min_G(S,S),\min_G(S,S)).$$

Покажем, что пара $(\min_G(S,S),\min_G(S,S))$ не удовлетворяет условию (1) теоремы. Для этого рассмотрим силовскую 2-подгруппу S_1 из $S \cap K_1'$. Как отмечено в доказательстве теоремы 2, S_1 является TI-подгруппой в G и $S_1 \in \operatorname{Min}_G(S,S) \setminus \min_G(S,S)$. Поскольку подгруппа $S_2 \in \operatorname{Syl}_2(K_1)$, содержащая S_1 и лежащая в S, неабелева, то $j \neq j^x$ для некоторого x из S_1. Но $S_2 \simeq D_8$, поэтому $j \cdot j^x \in S_1$. Следовательно, $\min_G(S,S) \cap S_1 = \langle j \cdot j^x\rangle$. В свою очередь, $S_1 = S \cap S^g$ для некоторого элемента g из G. По теореме 2 $G \simeq \Sigma_5 \wr C_2$. Поэтому $N_G(S_1) \simeq \Sigma_4 \times \Sigma_5$. Тогда элемент g можно выбрать в виде $f \cdot t$, где f — элемент порядка 3 из $N_{K_1}(S_1)$, а t — элемент порядка 5 из K_2 такой, что $S_1^i \cap (S_1^i)^t = 1$. Тогда для $S_1 \times S_1^i = S_0 \in \operatorname{Syl}_2(E(G))$ имеем $S_0 \cap S_0^{ft} = (S_1 \times S_1^i) \cap (S_1 \times S_1^i)^{ft} = S_1$. Более того, для $S_1 \leq S_2 \in \operatorname{Syl}_2(K_1)$ и $Q = S_2 \times S_2^i$ имеем $Q \cap Q^{ft} = (S_2 \times S_2^i) \cap (S_2 \times S_2^i)^{ft} = (S_2 \times S_2^i) \cap (S_2^f \times S_2^{it}) = S_1$. Рассмотрим подгруппу $S \cap S^{ft}$. Если $D = S \cap S^{ft} \neq S_1$, то в силу нильпотентности $S \cap S^{ft}$ имеем $N_D(S_1) > S_1$. Но $N_D(S_1) \leq N_G(S_1)$. Следовательно, $N_D(S_1) \leq N_G(S_1) \cap S \cap S^{ft} = Q \cap Q^{ft} = S_1$. Противоречие. Значит, $S_1 = S \cap S^{ft}$. Так как $S_1 \cap \min_G(S,S) = \langle j \cdot j^x\rangle$, то $S \cap \min_G(S,S)^{ft} \leq S \cap S^{ft} = S_1$. Поэтому $S \cap (\min_G(S,S))^{ft} = S \cap \min_G(S,S)^{ft} \cap S_1 = S_1 \cap (S_1 \cap \min_G(S,S)^{ft}) = S_1 \cap (S_1 \cap \min_G(S,S))^{ft} = S_1 \cap (j \cdot j^x)^{ft} = S_1 \cap (j \cdot j^x)^f$. Тогда $\min_G(S,S) \cap (\min_G(S,S))^{ft} \leq S \cap S^{ft} = S_1$. Следовательно, $R = \min_G(S,S) \cap (\min_G(S,S))^{ft} = S_1 \cap \min_G(S,S) \cap (\min_G(S,S))^{ft} = (S_1 \cap \min_G(S,S)) \cap (S_1 \cap \min_G(S,S))^{ft} = (S_1 \cap \langle j \cdot j^x\rangle) \cap (S_1 \cap (\langle j \cdot j^x\rangle))^f$. Но элемент f действует транзитивно на инволюциях из S_1. Следовательно, $R = 1$. Поэтому из (1) вытекает (4).

Из условия (4) теоремы 3 следует условие (1) этой теоремы.

Действительно, пусть выполняется условие (4) теоремы 3. Тогда $G \simeq \Sigma_5 \wr C_2$ и пара $(A,B) \in \{(S,S),\ (\min_G(S,S),S),\ (S,\min_G(S,S))\}$.

Если $(A,B) = (S,S)$, то, как указано в доказательстве теоремы 2, условие $\min_G(S,S) \neq 1$ следует из п. (4) леммы 3.12 и леммы 3.18 в [5].

Из оставшихся двух, в силу симметричности, докажем, например, что

$$\min_G(S,\min_G(S,S)) \neq 1.$$

Допустим, что это неверно и $S \cap (\min_G(S,S))^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Так как по теореме 2 $|S\colon \min_G(S,S)| = 2$, то $|S \cap S^g| \leq 4$. Так как $\min_G(S,S) \neq 1$, то $S \cap S^g \neq 1$.

Поскольку $(\min_G(S,S))^g = \min_G(S^g,S^g)$ и $|S\colon \min_G(S,S)| = 2$, то предположение о том, что $S \cap (\min_G(S,S))^g = 1$, влечет, что $|S \cap S^g| = 2$. Значит, инволюция $t \in S \cap S^g$ лежит в $m_G(S^g,S^g)$. Противоречие с тем, что $S \cap \min_G(S^g,S^g) = S \cap (\min_G(S,S))^g = 1$. Следовательно, из условия (4) выводим условие (1) теоремы 3. Теорема 3 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Burnside W.** On groups of order $p^\alpha q^\beta$ // Proc. London Math. Soc., 1904. Vol. 2, no. 1. P. 388–392.
2. **Burnside W.** On groups of order $p^\alpha q^\beta$ (second paper) // Proc. London Math. Soc., 1905. Vol. 2, no. 2. P. 432–437.
3. **Монахов В.С.** Инвариантные подгруппы бипримарных групп // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 6. С. 877–886.
4. **Кабанов В.В., Кондратьев А.С.** Силовские 2-подгруппы конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО РАН, 1979. 155 с.
5. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1–92.

6. **Zenkov V.I.** On intersections of primary subgroups in the group Aut$(L_n(2))$ // Proc. Steklov Inst. Math. 2016. Vol. 293. Suppl. 1. P. 270–277. doi: 10.1134/S0081543816050230.
7. **Зенков В.И., Нужин Я.Н.** О пересечениях примарных подгрупп нечетного порядка в конечных почти простых группах // Фундамент. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 6. С. 115–123.
8. **Зенков В.И.** О пересечениях нильпотентных подгрупп в конечных симметрических и знакопеременных группах // Тр. института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 145–149.
9. Atlas of finite group / Convay J. H. [et. al.] Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
10. **Gorenstein D., Lyons R.** The local structure of finite groups of characteristic 2 type // Mem. Amer. Math. Soc., 1983. Vol. 42. P. 1–731.
11. **Зенков В.И.** О пересечениях абелевых подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 2. С. 150–152.
12. **Jamali A.R., Viseh M.** On nilpotent subgroups containing nontrivial normal subgroups // J. Group Theory, 2010. Vol. 13, no. 4. P. 411–416. doi: 10.1515/jgt.2009.058.
13. **Зенков В.И., Мазуров В.Д.** О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 424–432.
14. **Зенков В.И.** О пересечениях двух нильпотентных подгрупп в конечных группах с цоколем $L_2(q)$ // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1280–1290.
15. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1972. 239 с.
16. **Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М.** Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968. 113 с.

Поступила 03.07.2018
После доработки 24.10.2018
Принята к публикации 29.10.2018

Зенков Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: v1i9z52@mail.ru

REFERENCES

1. Burnside W. On groups of order $p^\alpha q^\beta$. *Proc. London Math. Soc.*, 1904, vol. 2, no. 1, pp. 388–392.
2. Burnside W. On groups of order $p^\alpha q^\beta$ (second paper), Proc. London Math. Soc., 1905, vol. 2, no. 2, pp. 432–437.
3. Monakhov V.S. Normal subgroups of biprimary groups. *Math. Notes*, 1975, vol. 18, no. 6, pp. 877–886.
4. Kabanov V.V.., Kondrat'ev A.S. *Silovskie 2-podgruppy konechnykh grupp* [Sylow 2-subgroups of finite groups]. Sverdlovsk: UrO RAN publ., 1979, 155 p.
5. Zenkov V.I. Intersections of nilpotent subgroups in finite groups. *Fundament. Prikl. Mat.*, 1996, vol. 2, no. 1, pp. 1–92 (in Russian).
6. Zenkov V.I. On intersections of primary subgroups in the group Aut$(L_n(2))$. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, Suppl. 1, pp. 270–277. doi: 10.1134/S0081543816050230.
7. Zenkov V.I., Nuzhin Ya.N. On intersection of primary subgroups of odd order in finite almost simple groups. *J. Math. Sci.*, 2017, vol. 221, no. 3, pp. 384–390. doi: 10.1007/s10958-017-3232-8.
8. Zenkov V.I. On intersections of nilpotent subgroups in finite symmetric and alternating groups. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 285, Suppl. 1, pp. 203–208. doi: 10.1134/S0081543814050228.
9. Convay J.H. [et. al.]. *Atlas of finite group*. Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0-19-853199-0.
10. Gorenstein D., Lyons R. *The local structure of finite groups of characteristic 2 type*. Mem. Amer. Math. Soc., 1983, vol. 42, 731 p. ISBN: 0-8218-2276-4.
11. Zenkov V.I. Intersection of Abelian subgroups in finite groups. *Math Notes*, 1994, vol. 56, no. 2, pp. 869–871. doi: 10.1007/BF02110750.
12. Jamali A.R., Viseh M. On nilpotent subgroups containing nontrivial normal subgroups. *J. Group Theory*, 2010, vol. 13, no. 4, pp. 411–416. doi: 10.1515/jgt.2009.058.
13. Zenkov V.I., Mazurov V.D. On intersections of Sylow p-subgroups in finite groups. *Algebra Logic*, 1996, vol. 35, no. 4, pp. 236–240.

14. Zenkov V.I. Intersections of two nilpotent subgroups in finite groups with socle $L_2(q)$. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 6, pp. 1002–1010. doi: 10.1134/S0037446616060070 .
15. Kargapolov M.I., Merzljakov Ju.I. *Fundamentals of the theory of groups.* N Y; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1979, Ser. Graduate Texts Math, 62, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0 . Original Russian text (1st ed.) published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp.* Moscow, Nauka Publ., 1972, 239 p.
16. Busarkin V.M., Gorchakov Yu.M. *Konechnye rascheplyaemye gruppy* [Finite groups that admit partitions]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 113 p.

Received July 03, 2018
Revised October 24, 2018
Accepted October 29, 2018

Funding Agency: This work was supported by by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Viktor Ivanovich Zenkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990, Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: v1i9z52@mail.ru .