ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 519.17

ГРАФ С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ВЕРШИННО СИММЕТРИЧНЫМ[1]

К. С. Ефимов

А. А. Махнев и В. П. Буриченко нашли возможные массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000. Ими была предложена программа исследования реберно симметричных графов с указанными массивами пересечений. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. В работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$. В частности, доказано, что группа автоморфизмов этого графа действует интразитивно на множестве вершин.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

K. S. Efimov. A graph with intersection array $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$ is not vertex-symmetric.

A. A. Makhnev and V. P. Burichenko found possible intersection arrays of distance-regular locally cyclic graphs with at most 1000 vertices. They proposed a program for studying arc-transitive graphs with these intersection arrays. The neighborhood of a vertex in such a graph is the union of isolated polygons. We study automorphisms of a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$. In particular, we prove that the automorphism group of this graph acts intransitively on the vertex set.

Keywords: distance-regular graph, graph automorphism.

MSC: 05C25, 20B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-62-67

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех его вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup \Gamma(a)$. Если граф Γ фиксирован, то вместо $\Gamma(a)$ будем писать $[a]$. Для множества X вершин графа Γ через $X^\perp$ обозначим $\cap_{x\in X} x^\perp$. Если не оговорено противное, то слово “подграф” будет означать “индуцированный подграф”.

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathcal{F}$-графом*, если $[a]$ лежит в $\mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ. Если при этом класс $\mathcal{F}$ состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ, то граф Γ назовем *локально Δ-графом*.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k*, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1,$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 14-11-00061-П.

$\ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, ..., d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются через p^l_{ij} и называются *числами пересечений графа* Γ.

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер). *Граф Грюнберга— Кегеля группы H* — это граф, множество вершин которого совпадает с $\pi(H)$ (множество простых делителей $|H|$) и две вершины p, r смежны тогда и только тогда, когда H содержит элемент порядка pr.

В работе [1, теорема 2] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000.

Продолжается исследование реберно симметричных графов с массивами пересечений из [1, теорема 2, п. (3)]. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$. Тогда Γ имеет $v = 1+18+54+3 = 76$ вершин и спектр $18^1, 3^{38}, -1^{18}, -6^{19}$. Порядок коклики в Γ не превосходит $(1 - k/\theta_d)^{-1}v = 19$, а порядок клики в Γ не превосходит $1 - k/\theta_d = 4$. Далее, $b^- = b_1/(\theta_3 + 1) = -3$, $b^+ = b_1/(\theta_1 + 1) = 3$ и если C является 4-кликой в Γ, то по предложению 4.4.6 из [2] каждая вершина из $\Gamma - C$ смежна с 0 или с $b^- + 1 - k/\theta_3 = 1$ вершинами из C. Если Γ содержит полный двудольный $K_{4,t}$-подграф, то снова по предложению 4.4.6 из [2] имеем $8t/(t + 4) \leq 4$, поэтому $t \leq 4$.

Теорема. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 19\}$ и выполняются следующие утверждения*:

(1) Ω *— пустой граф и либо*

(*i*) $p = 19$, $\alpha_3(g) = 0, \alpha_1(g) = 19$, *либо*

(*ii*) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 4s$, s *нечетно и* $\alpha_1(g) = 18l + 5s + 1$;

(2) $p = 3$, Ω *является одновершинным графом, антиподальным классом или* 4*-кликой*;

(3) $p = 2$, Γ *содержит* t *антиподальных классов, пересекающих* Ω *по* s *вершинам,* $\alpha_3(g) = t(4 - s)$ *и либо*

(*i*) $t = 1$, $s = 4$ *и* $\alpha_1(g) = 0$, *либо*

(*ii*) $t = 3$, Ω *— шестиугольник и* $\alpha_1(g) = 18l - 2$, *либо*

(*iii*) $t = 5$, Ω *является графом* $K_{5,5}$ *с удаленным максимальным паросочетанием и* $\alpha_1(g) = 18l - 16$.

Следствие. *Группа автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$ действует интранзитивно на множестве вершин.*

1. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [3].

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, W_1, \ldots, W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [3, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 38, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 18, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$,*

$$\chi_1(g) = (19\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - 5\alpha_3(g))/36 - 19/9,$$

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 1 = -(\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/4 + 18.$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 38$ и $\chi_2(g) - 18$ делятся на p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 38 & 19/3 & -19/9 & -38/3 \\ 18 & -1 & -1 & 18 \\ 19 & -19/3 & 19/9 & -19/3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (2\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - \alpha_2(g)/9 - 2\alpha_3(g)/3)/4$. Подставляя $\alpha_2(g) = 76 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (19\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - 5\alpha_3(g))/36 - 19/9$.

Далее, $\chi_2(g) = (18\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 18\alpha_3(g))/76$. Учитывая равенство $\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + \alpha_2(g) + \alpha_3(g) = 76$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 1 = -(\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/4 + 18$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [4]. □

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что Γ содержит 19 антиподальных классов, в каждом из которых 4 вершины.

Если g фиксирует антиподальный класс K и $a \in \Omega$, то K пересекает Ω, а если Ω пересекает антиподальные классы K, L, то $|K \cap \Omega| = |L \cap \Omega|$.

Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. Вершина из $L \cap \Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K \cap \Omega$, поэтому $|K \cap \Omega| \leq |L \cap \Omega|$. Симметрично $|L \cap \Omega| \leq |K \cap \Omega|$.

Лемма 2. *Если Ω — пустой граф, то $\alpha_3(g) = 4s$ и выполняется одно из утверждений*:
(1) $p = 19$, $\alpha_3(g) = 0, \alpha_1(g) = 19$;
(2) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 4s$, *s нечетно и* $\alpha_1(g) = 18l + 5s + 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $76 = 4 \cdot 19$, то $p = 2$ или 19. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_3(g) = 4s$.

Пусть $p = 19$. Тогда $\alpha_3(g)$ делится на 76 и $\alpha_3(g)$ равно 76 или 0. В первом случае получим противоречие с тем, что 19 не делит r. Во втором случае $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 19)/9$, поэтому $\alpha_1(g) = 19$.

Пусть $p = 2$. Тогда s нечетно и $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 5s - 19)/9$, поэтому $\alpha_1(g) = 18l + 5s + 1$. $\square$

В леммах 3–5 предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $a, b \in \Omega$ и $p > 5$, то $[a] \cap [b] \subset \Omega$. Кроме того, при $p > 2$ имеем $\lambda_\Omega = 2$.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если p не равно 2 или 3, то Ω содержит по вершине из $[a]$ и из $\Gamma_2(a)$;*

(2) *если $p > 3$, то $\Gamma_3(a) \subset \Omega$;*

(3) *любая вершина из Ω смежна с некоторой вершиной из $\Gamma - \Omega$.*

Доказательство. Если $p \neq 2$ или 3, то p не делит $|\Gamma_i(a)|$, поэтому Ω содержит по вершине из $[a]$ и из $\Gamma_2(a)$.

Для любой вершины a из Ω подграф $\Gamma_3(a)$ является g-допустимым, и в случае $p > 3$ имеем $\Gamma_3(a) \subset \Omega$.

Допустим, что Ω содержит $[a]$, тогда любая вершина $u \in \Gamma_2(a)$ лежит в $[a_i] \cap [a_j]$ для двух несмежных вершин a_i, a_j из $[a]$ (иначе $[a] \cap [u]$ является 5-кликой, противоречие). Если $u \notin \Omega$, то $u^{\langle g \rangle}$ является p-кокликой. Так как $[a_i] \cap [a_j]$ содержит a, u, u^g для любых двух вершин a_i, a_j из $[a] \cap [u]$, то $[a] \cap [u]$ является кокликой и $(\{a\} \cup u^{\langle g \rangle}) \cup ([a] \cap [u])$ — полный двудольный $K_{5,p+1}$-подграф. Отсюда $p = 2$ и в $\Gamma_3(a)$ есть вершина b из Ω. Заметим, что $[b] \subset \Omega$, иначе $[b]$ содержит вершину x из $\Gamma - \Omega$ и $[x] \cap [x^g]$ содержит b и 5 вершин из $[a]$, противоречие. Теперь для вершины $y \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b) - \Omega$ получим $|[y] \cap [y^g] \cap \Omega| \geq 10$, противоречие. $\square$

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *число p не больше* 3;

(2) *если $p = 3$, то Ω является одновершинным графом, антиподальным классом или 4-кликой.*

Доказательство. Пусть $p > 3$. Тогда $|\Omega| = 4r$, где r — число антиподальных классов, попадающих в Ω, Ω — регулярный граф степени $r - 1$ и p делит $19 - r$. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $4r(19 - r)$, но не больше $3(76 - 4r)$, поэтому $r \leq 3$. Если $r = 1$, то $p = 2$ или 3 — противоречие. Если $r = 2$, то $p = 17$, противоречие с тем, что $\lambda, \mu \leq 5$. Если $r = 3$, то $p = 2$, противоречие.

Пусть $p = 3$. Тогда $|\Omega|$ сравнимо с 1 по модулю 3. Заметим, что любой антиподальный класс пересекает Ω по 1 или 4 вершинам.

Пусть Γ содержит t антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда t сравнимо с 1 по модулю 3, $|\Omega| = st$, $\alpha_3(g) = (4 - s)t$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 76 - 4t$, $\chi_1(g) = (19st + 4\alpha_1(g) - 5(4 - s)t)/36 - 19/9 = (24st - 20t + 4\alpha_1(g) - 76)/36$.

Пусть $s = 4$. Если $t = 1$, то $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/9$, $\chi_1(g) - 38$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 27l + 18$. Если $t = 4$, то Ω — объединение четырех изолированных клик, противоречие с тем, что для несмежных вершин a, b из разных антиподальных классов, попадающих в Ω, подграф $\Omega(a) \cap [b]$ содержит 2 или 5 вершин.

Пусть $s = 1$. Тогда Ω является t-кликой. Если $t = 1$, то $\chi_1(g) = (\alpha_1(g)/9 - 2$, $\alpha_1(g) = 27l + 9$. Если $t = 4$, то $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 15)/9$ и Ω является 4-кликой. $\square$

Лемма 5. *Если $p = 2$, то Γ содержит t антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам, $\alpha_3(g) = t(4 - s)$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$t = 1$, $s = 4$ и $\alpha_1(g) = 0$;*

(2) *$t = 3$, Ω — шестиугольник и $\alpha_1(g) = 18l - 2$;*

(3) *$t = 5$, Ω является графом $K_{5,5}$ с удаленным максимальным паросочетанием и $\alpha_1(g) = 18l - 16$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$, число $|\Omega|$ четно, любой антиподальный класс пересекает Ω по 0, 2 или 4 вершинам и t нечетно. Пусть K — антиподальный класс, содержащий вершину a. Тогда $K \cap \Omega = \{a, a_2, ..., a_s\}$.

Заметим, что $\mu_\Omega \in \{1,3,5\}$, $\lambda_\Omega \in \{0,2\}$. Далее, $\alpha_3(g) = t(4-s)$, поэтому $\chi_2(g) = t-1$ четно и $\chi_1(g) = (24st - 20t + 4\alpha_1(g) - 76)/36$.

Пусть $t = 1$. Тогда Ω лежит в антиподальном классе графа Γ и $|\Omega| = s$, $s \in \{2,4\}$. С другой стороны, если $d(u, u^g) = 2$, то $[u]$ пересекает Ω. Обратно, если $a \in \Omega$ и $u \in [a]$, то $d(u, u^g) = 2$, иначе $[u] \cap [u^g]$ содержит 2 вершины из Ω, противоречие. Значит, $\alpha_2(g) = 18s$, $\alpha_1(g) = 72 - 18s$. и $\chi_1(g) = (24s + 4(72-18s) - 96)/36 = (-4s+16)/3$, поэтому $s = 4$.

Пусть $t = 3$. Тогда Ω — объединение изолированных циклов. Отсюда $s = 2$, Ω — шестиугольник или объединение двух треугольников. Так как для несмежных вершин $a, b\Omega$ из разных антиподальных классов подграф $\Omega(a) \cap [b]$ содержит нечетное число вершин, то Ω — шестиугольник. В этом случае $\chi_1(g) = (2 + \alpha_1(g))/9$ и $\alpha_1(g) = 18l - 2$.

Пусть $t = 5$. Тогда $\Omega(a)$ — коклика, четырехугольник или объединение изолированной вершины и треугольника. Если $s = 4$, то $\Omega(a)$ — коклика, Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{4,3,1;1,1,4\}$, противоречие с тем, что для собственных значений $n, -m$ этого графа верны равенства $k = mn = 4$, $\mu = (m-1)(n+1)/r$ и $\lambda = \mu + n - m$. Если $s = 2$, то $\Omega(a)$ не является объединением изолированной вершины и треугольника. Так как Ω не является локально четырехугольным графом, то $\Omega(a)$ — коклика для некоторой вершины $a \in \Omega$ и $\Omega(a^*)$ — также коклика для антипода a^* вершины a в Ω. Поэтому Ω является графом $K_{5,5}$ с удаленным максимальным паросочетанием. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) + 16)/9$ и $\alpha_1(g) = 18l - 16$.

Пусть $t \geq 7$. Если $s = 2$, то Ω — регулярный граф степени $t-1$ и $|\Omega| = 2t$. Поэтому Ω содержится в $a^\perp \cup a_2^\perp$. Тогда $\lambda_\Omega + \mu_\Omega + 1 = t - 1 \leq 7$, противоречие.

Если $s = 4$, то число ребер между $\Gamma - \Omega$ и Ω равно $st(19-t)$, но не больше $5(76 - st)$, поэтому $t \leq 5$, противоречие. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны. □

2. Граф с массивом пересечений $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$ не является вершинно симметричным

До конца работы предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{18,15,1;1,5,18\}$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ.

Лемма 6. *Пусть f — элемент порядка 19 из G. Тогда $C_G(f) = \langle f \rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если g — элемент порядка p из $C_G(f)$, $p < 19$, то ввиду теоремы $p = 2$ и Ω — пустой граф. Противоречие с тем, что $\alpha_1(f) = 19$. □

Завершим доказательство следствия. Так как простых $\{2,3,19\}$-групп нет, то группа G разрешима. Но тогда ввиду леммы 6 индекс $|G : G_a|$ не равен 76. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Буриченко В.П., Махнев А.А.** О вполне регулярных локально циклических графах // Тез. докл. 42 Всеросс. конф. “Современные проблемы математики”. Екатеринбург, 2011. С. 181–184.
2. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer, 1989. P. 391–412. (Part of the Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete book series: MATHE3, vol. 18.) doi: 10.1007/978-3-642-74341-2_13.
3. **Cameron P.J., van Lint J.** Graphs, codes and their links. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. 252 p. (Ser. London Math. Soc. Student Texts. No 22.) ISBN-10: 0521413257.
4. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56,45,1;1,9,56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.

Ефимов Константин Сергеевич
канд. физ.-мат. наук
Уральский федеральный университет,
Уральский государственный экономический университет,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: konstantin.s.efimov@gmail.com

Поступила 26.06.2018

REFERENCES

1. Burichenko V.P., Makhnev A.A. On completely regular locally cyclic graphs In: *Modern problems of mathematics*: Abstr. all-russian conf. , Ekaterinburg, Russia, 2011, pp. 181–184 (in Russian).
2. Brouwer A.E., Haemers W.H. Graph Spectrum. In: *Spectra of Graphs*. Universitext. Springer, New York. 2012, pp. 1–20. doi: 10.1007/978-1-4614-1939-6_1 .
3. Cameron P.J., van Lint J. Graphs, codes and their links, Ser. London Math. Soc. Student Texts. No 22. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991, 252 p. ISBN-10: 0521413257 .
4. Gavrilyuk A.L., Makhnev, A.A. On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .

The paper was received by the Editorial Office on June 26, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00061-П).

Konstantin Sergeevich Efimov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; Ural State University of Economics, Yekaterinburg, 620144 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: konstantin.s.efimov@gmail.com .