ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 517.977

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МАЛЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ КОЭРЦИТИВНОСТИ[1]

А. Р. Данилин

Рассматривается задача оптимального управления решениями краевой задачи для сингулярно возмущенного эллиптического оператора в области Ω с распределенным управлением

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon + a(x) z_\varepsilon = f + u_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega),$$

$$u_\varepsilon \in \mathcal{U} := \{u(\cdot) \in L_2(\Omega) \colon \|u(\cdot)\| \leqslant 1\},$$

$$J := \|z_\varepsilon(\cdot) - z_d(\cdot)\|^2 + \nu^{-1} \|u_\varepsilon(\cdot)\|^2 \to \inf.$$

Получены априорные оценки системы оптимальности, которые показывают, что формальное асимптотическое решение системы оптимальности есть асимптотическое разложение искомого решения этой системы. Построено полное асимптотическое разложение в смысле Эрдейи по степеням малого параметра решения системы оптимальности для рассматриваемой задачи оптимального управления. В отличие от предыдущих работ аналогичной тематики, неотрицательный потенциал $a(\cdot)$ может обращаться в ноль в конечном числе точек. Данная задача обладает большей регулярностью по сравнению с задачей исследования асимптотического разложения краевой задачи для указанного оператора. Асимптотическое разложение решения состоит из внешнего степенного разложения и внутреннего (в окрестности границы области Ω) с экспоненциально убывающими коэффициентами.

Ключевые слова: оптимальное управление, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin. Asymptotic expansion of a solution to a singular perturbation optimal control problem with a small coercivity coefficient.

We consider an optimal control problem for solutions of a boundary value problem for a singularly perturbed elliptic operator in a domain Ω with distributed control

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon + a(x) z_\varepsilon = f + u_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega),$$

$$u_\varepsilon \in \mathcal{U} := \{u(\cdot) \in L_2(\Omega) \colon \|u(\cdot)\| \leqslant 1\},$$

$$J := \|z_\varepsilon(\cdot) - z_d(\cdot)\|^2 + \nu^{-1} \|u_\varepsilon(\cdot)\|^2 \to \inf.$$

A priori bounds are obtained for the optimality system, which show that a formal asymptotic solution of the optimality system is an asymptotic expansion of the required solution of this system. A complete asymptotic expansion in the Erdélyi sense in the powers of the small parameter is constructed for the solution of the optimality system for the optimal control problem under consideration. In contrast to the previous papers on this topic, the nonnegative potential $a(\cdot)$ may vanish at a finite number of points. This problem has greater regularity as compared to the problem of studying the asymptotic expansion of the boundary value problem for this operator. The asymptotic expansion consists of an outer power expansion and an inner expansion (in a neighborhood of the boundary of Ω) with exponentially decreasing coefficients.

Keywords: optimal control, asymptotic expansion, singular perturbation problems, small parameter.

MSC: 49J20, 34E05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-51-61

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гос. проекта “Развитие концепции позиционного управления, минимаксного подхода и сингулярных возмущений в теории дифференциальных уравнений”.

Введение

Рассматривается задача оптимального управления решениями краевой задачи для сингулярно возмущенного эллиптического оператора (оператор Лапласа с малым коэффициентом плюс неотрицательный потенциал) в области Ω с распределенным управлением [1]. Множество допустимых управлений — шар из $L_2(\Omega)$.

Получены априорные оценки системы оптимальности, которые показывают, что формальное асимптотическое решение системы оптимальности есть асимптотическое разложение искомого решения. Построено полное асимптотическое разложение в смысле Эрдейи [2, Definition 2.5] по степеням малого параметра решения системы оптимальности для рассматриваемой задачи оптимального управления.

В отличие от предыдущих работ аналогичной тематики, потенциал может обращаться в ноль в конечном числе точек.

Отметим, что рассматриваемая задача обладает большей регулярностью по сравнению с задачей исследования асимптотического разложения краевой задачи для указанного оператора. Асимптотическое разложение решения состоит из внешнего степенного разложения и внутреннего (в окрестности границы области Ω) с экспоненциально убывающими коэффициентами.

В настоящей работе используется методы, развитые в [3–5].

1. Постановка задачи и основные соотношения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ — ограниченная область с границей $\Gamma := \partial\Omega$.

Будем предполагать, что $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ есть многообразие с краем класса C^∞ (расположенное локально по одну сторону от границы Γ).

Рассматривается следующая задача оптимального распределенного управления [1, гл. 2, соотношения (2.8), (2.9)]:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon + a(x) z_\varepsilon = f + u_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \tag{1.1}$$

$$u_\varepsilon \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_r := \{u(\cdot) \in L_2(\Omega) \colon \|u(\cdot)\| \leqslant r\}, \tag{1.2}$$

$$J := \|z_\varepsilon(\cdot) - z_d(\cdot)\|^2 + \nu^{-1}\|u_\varepsilon(\cdot)\|^2 \to \inf. \tag{1.3}$$

Здесь $H_0^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций с нулевыми значениями на границе [6;7], $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(\Omega)$, а $\nu > 0$ — заданное число.

В дальнейшем через $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ будем обозначать пространство функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$ с нулевыми значениями на границе.

Предполагается, что функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $z_d(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a(\cdot),\ f(\cdot),\ z_d(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad a(x) \geqslant 0, \quad A_0 := \{x \in \overline{\Omega} \colon a(x) = 0\} \text{ конечно}, \tag{1.4}$$

а решение уравнения (1.1) понимается в слабом смысле:

$$\forall\, Z \in H_0^1(\Omega) \quad \varepsilon^2(\nabla z_\varepsilon, \nabla Z) + (a z_\varepsilon, Z) = (f + u_\varepsilon, Z), \tag{1.5}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Содержательно задача (1.1)–(1.3) состоит в том, чтобы привести управляемое состояние z_ε по возможности как можно ближе к некоторому заданному состоянию z_d, но с учетом затраченных на управление ресурсов.

В [1] для такой задачи получены условия оптимальности, если квадратичная форма из (1.5)

$$(\mathcal{L}_\varepsilon Z, Z) = \varepsilon^2 \|\nabla Z\|^2 + (aZ, Z)$$

коэрцитивна в $H_0^1(\Omega)$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

В силу неравенства Фридрихса (см., например, [8, теорема 30.2]) существует $K > 0$ такое, что при всех $Z \in H_0^1(\Omega)$

$$\|Z\|^2 + \|\nabla Z\|^2 \leqslant K\|\nabla Z\|^2. \tag{1.6}$$

Из (1.6) следует, что

$$(\mathcal{L}_\varepsilon Z, Z) = \varepsilon^2\|\nabla Z\|^2 + (aZ, Z) \overset{(1.4)}{\geqslant} \frac{\varepsilon^2}{K}\big(\|\nabla Z\|^2 + \|Z\|^2\big). \tag{1.7}$$

Тем самым задача (1.1)–(1.3) разрешима единственным образом и существует $p_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$:

$$\mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon = z_\varepsilon - z_d, \quad x \in \overline{\Omega},$$

при этом

$$\forall\, v(\cdot) \in \mathcal{U} \quad (p_\varepsilon + \nu^{-1}u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \geqslant 0 \tag{1.8}$$

(см. [1, гл. 2, соотношение (2.10)]).

Как было показано в [9, (1.9)], условие (1.8) эквивалентно следующему:

$$\exists\, \lambda_\varepsilon \in (0;\nu]\colon (u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon) \wedge (\lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\| \leqslant 1) \wedge ((\nu - \lambda_\varepsilon)(1 - \lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\|) = 0)\,. \tag{1.9}$$

Таким образом, система оптимальности для задачи (1.1)–(1.3) имеет вид

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon = f, \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \tag{1.10}$$

с дополнительным условием (1.9).

Отметим, что в силу свойств дифференциальных операторов второго порядка эллиптического типа из условий (1.4) следует, что $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Целью данной работы является получение асимптотического разложения решения системы (1.10) при $\varepsilon \to +0$.

2. Априорные оценки

В дальнейшем буквой K, возможно с индексами, мы будем обозначать различные положительные константы, зависящие только от области Ω и функции $a(\cdot)$.

Лемма. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и* $z_{\varepsilon,f}$ *— решение задачи*

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,f} = f, \quad f \in L_2(\Omega). \tag{2.1}$$

Тогда при всех $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$\max\{\, \|z_{\varepsilon,f}\|, \|\nabla z_{\varepsilon,f}\|\,\} \leqslant K\varepsilon^{-2}\|f\|. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим скалярно равенство из (2.1) на $z_{\varepsilon,f}$. Тогда

$$\|f\| \cdot \|z_{\varepsilon,f}\| \geqslant |(\mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,f}, z_{\varepsilon,f})| = \varepsilon^2\|\nabla z_{\varepsilon,f}\|^2 + (az_{\varepsilon,f}, z_{\varepsilon,f}) \overset{(1.7)}{\geqslant} K_1\varepsilon^2\|z_{\varepsilon,f}\|^2.$$

Поэтому $\|f\| \cdot \|z_{\varepsilon,f}\| \geqslant K_1\varepsilon^2\|z_{\varepsilon,f}\|^2$ и $\|f\| \cdot \|z_{\varepsilon,f}\| \geqslant K_1\varepsilon^2\|\nabla z_{\varepsilon,f}\|^2$. □

Рассмотрим подробнее краевую задачу для системы, зависящей от скалярного положительного параметра $\lambda > 0$:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,\lambda} + \lambda p_{\varepsilon,\lambda} = f_1, \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_{\varepsilon,\lambda} - z_{\varepsilon,\lambda} = f_2, \quad f_1, f_2 \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad z_{\varepsilon,\lambda}, p_{\varepsilon,\lambda} \in C_0^\infty(\overline{\Omega}). \tag{2.3}$$

Решение задачи (2.3) при $f_1 = f$ и $f_2 = -z_d$ будем обозначать через $z_{\varepsilon,\lambda,d}$ и $p_{\varepsilon,\lambda,d}$ соответственно.

Отметим, что

$$z_\varepsilon = z_{\varepsilon,\lambda_\varepsilon,d}, \quad p_\varepsilon = p_{\varepsilon,\lambda_\varepsilon,d}. \tag{2.4}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.4). *Тогда задача* (2.3) *разрешима единственным образом при любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\lambda > 0$ *и существует константа* $K > 0$ *такая, что при всех* $\lambda > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$\max\{\sqrt[4]{\lambda}\,\varepsilon\|\nabla z_{\varepsilon,\lambda}\|, \sqrt{\lambda}\,\|z_{\varepsilon,\lambda}\|, \sqrt[4]{\lambda^3}\varepsilon\|\nabla p_{\varepsilon,\lambda}\|, \lambda\|p_{\varepsilon,\lambda}\|\,\} \leqslant K(\|f_1\| + \sqrt{\lambda}\|f_2\|). \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разрешимость задачи (2.3) доказывается аналогично доказательству теоремы 1 из [10].

Получим указанные оценки. Умножив скалярно первое равенство в (2.3) на p, а второе на z и вычтя из одного получившегося равенства другое, получим

$$\lambda\|p_{\varepsilon,\lambda}\|^2 + \|z_{\varepsilon,\lambda}\|^2 = (f_1, p_{\varepsilon,\lambda}) - (f_2, z_{\varepsilon,\lambda}).$$

Отсюда в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\lambda\|p_{\varepsilon,\lambda}\|^2 + \|z_{\varepsilon,\lambda}\|^2 \leqslant \|f_1\|\cdot\|p_{\varepsilon,\lambda}\| + \|f_2\|\cdot\|z_{\varepsilon,\lambda}\|.$$

Последнее соотношение есть квадратичное неравенство относительно $\|p_{\varepsilon,\lambda}\|$ и $\|z_{\varepsilon,\lambda}\|$. Но неотрицательные решения квадратичного неравенства

$$\beta_1^2 y_1^2 + \beta_2^2 y_2^2 \leqslant B_1 y_1 + B_2 y_2$$

с коэффициентами $\beta_i > 0$, $B_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, оцениваются следующим образом:

$$y_1 \leqslant \frac{B_1}{\beta_1^2} + \frac{B_2}{2\beta_1\beta_2}, \quad y_2 \leqslant \frac{B_2}{\beta_2^2} + \frac{B_1}{2\beta_1\beta_2}.$$

Поэтому

$$\|p_{\varepsilon,\lambda}\| \leqslant \frac{\|f_1\|}{\lambda} + \frac{\|f_2\|}{2\sqrt{\lambda}}, \quad \|z_{\varepsilon,\lambda}\| \leqslant \|f_2\| + \frac{\|f_1\|}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Это дает оценки (2.5) для $\|z_{\varepsilon,\lambda}\|$ и $\|p_{\varepsilon,\lambda}\|$.

Для получения оценок норм градиентов $\|\nabla z_{\varepsilon,\lambda}\|$, $\|\nabla p_{\varepsilon,\lambda}\|$ умножим скалярно первое равенство в (2.3) на z, а второе на p. Тогда в силу (1.7) получим

$$\varepsilon^2 K\|\nabla z_{\varepsilon,\lambda}\|^2 \leqslant \|f_1\|\cdot\|z_{\varepsilon,\lambda}\| + \lambda\|p_{\varepsilon,\lambda}\|\cdot\|z_{\varepsilon,\lambda}\|, \quad \varepsilon^2 K\|\nabla p_{\varepsilon,\lambda}\|^2 \leqslant \|f_2\|\cdot\|p_{\varepsilon,\lambda}\| + \|z\|\cdot\|p_{\varepsilon,\lambda}\|,$$

откуда с учетом оценок для $\|z\|$ и $\|p\|$ следуют оставшиеся оценки. □

Положив в системе (2.3) $\varepsilon = 0$, получим равенства

$$a(x)z_{0,\lambda} - \lambda p_{0,\lambda} = f_1(x), \quad a(x)p_{0,\lambda} - z_{0,\lambda} = f_2(x),$$

из которых находим

$$z_{0,\lambda}(x) = \frac{a(x)f_1(x) - \lambda f_2(x)}{a^2(x) + \lambda}, \quad p_{0,\lambda}(x) = \frac{a(x)f_2(x) + f_1(x)}{a^2(x) + \lambda}. \tag{2.6}$$

Через $z_{0,\lambda,d}$ и $p_{0,\lambda,d}$ будем обозначать $z_{0,\lambda}$ и $p_{0,\lambda}$, полученные по формулам (2.6) при $f_1 = f$ и $f_2 = -z_d$.

Рассмотрим величину

$$\lambda^2\|p_{0,\lambda}\|^2 = \lambda^2 \int\limits_\Omega \frac{\widetilde{f}^2(x)\,dx}{\bigl(a^2(x) + \lambda\bigr)^2} = \int\limits_\Omega \frac{\widetilde{f}^2(x)\,dx}{\bigl(\lambda^{-1}a^2(x) + 1\bigr)^2},$$

где $\widetilde{f}(x) := a(x)f_2(x) + f_1(x)$.

Введем обозначение

$$\mathcal{F}(\mu) := \int\limits_\Omega \frac{\widetilde{f}^2(x)\,dx}{\bigl(\mu a^2(x) + 1\bigr)^2}. \tag{2.7}$$

Отметим, что $\mathcal{F}(\mu)$ непрерывна на $[0; +\infty)$ и дифференцирума на $(0; +\infty)$.

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и* $\widetilde{f} \neq 0$. *Тогда* $\mathcal{F}(\mu)$ *строго убывает на* $[0;+\infty)$ *и* $\lim\limits_{\mu\to+\infty} \mathcal{F}(\mu) = 0$.

Доказательство. Поскольку

$$\mathcal{F}'(\mu) = -2 \int\limits_{\Omega} \frac{\widetilde{f}^2(x) a^2(x)\, dx}{\big(\mu a^2(x) + 1\big)^3},$$

а в силу условий доказываемого утверждения $\widetilde{f}^2(x)a^2(x) \neq 0$, то $\mathcal{F}'(\mu) < 0$.

Покажем справедливость соотношения $\lim\limits_{\mu\to+\infty} \mathcal{F}(\mu) = 0$.

Возьмем достаточно малое $\delta \in (0;1)$ и разобьем область интегрирования в (2.7) на две:

$$\Omega_{1,\delta} := \Omega \cap \bigcup_{x\in A_0} B(x,\delta), \quad \Omega_{2,\delta} := \Omega \setminus \overline{\Omega_{1,\delta}}.$$

Здесь $B(x,\delta)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиусом δ.

В силу (1.4) найдется $\alpha_\delta > 0$ такое, что $\forall\, x \in \Omega_{2,\delta} \;\; a(x) \geqslant \alpha_\delta$. Оценив подынтегральные выражения в (2.7), на этих областях в силу (1.4) придем к неравенству

$$0 \leqslant \mathcal{F}(\mu) \leqslant K\delta^n + \frac{\|\widetilde{f}\|^2}{\mu^2\alpha_\delta^2}.$$

Поэтому $0 \leqslant \liminf_{\mu\to+\infty} \mathcal{F}(\mu) \leqslant \limsup_{\mu\to+\infty} \mathcal{F}(\mu) \leqslant K\delta^n$. Но $K\delta^n \to 0$ при $\delta \to 0$. □

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия* (1.4).

Если при всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ *выполняется неравенство*

$$\nu\|p_{\varepsilon,\nu,d}\| < 1, \tag{2.8}$$

то при этих ε

$$\lambda_\varepsilon = \nu, \quad z_\varepsilon = z_{\varepsilon,\nu,d}, \quad p_\varepsilon = p_{\varepsilon,\nu,d}.$$

Если же при всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ *выполняется неравенство*

$$\nu\|p_{\varepsilon,\nu,d}\| > 1, \tag{2.9}$$

то при этих ε

$$\lambda_\varepsilon < \nu, \quad \lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\| = 1. \tag{2.10}$$

Доказательство. В первом случае при всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ $\{z_{\varepsilon,\nu,d}, p_{\varepsilon,\nu,d}, \lambda_\varepsilon = \nu\}$ удовлетворяют (1.9) и (1.10).

Во втором случае, предположив противное, найдем $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\lambda_{\varepsilon_n}\|p_{\varepsilon_n}\| < 1$. Поэтому $\lambda_{\varepsilon_n} = \nu$ и, в силу (2.4)

$$\lambda_{\varepsilon_n}\|p_{\varepsilon_n}\| = \nu\|p_{\varepsilon_n,\nu,d}\| \leqslant 1,$$

что противоречит условию утверждения. □

Таким образом, для обоснования асимптотического разложения решения задачи (1.10), (1.9) в случае (2.8) достаточно использовать оценки (2.5) с $\lambda = \nu$.

В случае (2.9) необходимо рассматривать следующую систему аппроксимации:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,\gamma} + \Lambda_\gamma p_{\varepsilon,\gamma} = f + f_{1,\gamma}, \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_{\varepsilon,\gamma} - z_{\varepsilon,\gamma} = -z_d + f_{2,\gamma}, \tag{2.11}$$

где $f_1, f_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $z_{\varepsilon,\gamma}, p_{\varepsilon,\gamma} \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ и

$$f_{i,\gamma} = O(\varepsilon^\gamma), \quad i = 1,2, \quad \Lambda_\gamma \leqslant \widetilde{\nu}, \quad \Lambda_\gamma\|p_{\varepsilon,\gamma}\| - 1 = O(\varepsilon^\gamma) \quad \text{при } \varepsilon \to +0. \tag{2.12}$$

Отметим, что при малых ε величина $r := \Lambda_\gamma\|p_{\varepsilon,\gamma}\|$ близка к 1, а $u_r := -\Lambda_\gamma p_{\varepsilon,\gamma}$ есть оптимальное управление в задаче (1.1), (1.3) с $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$, $\|u_r\| = r$ и заменой f на $\widetilde{f}_\gamma := f + f_{1,\gamma}$, z_d — на $\widetilde{z}_{d,\gamma} := z_d - f_{2,\gamma}$, а ν — на $\widetilde{\nu}$.

Утверждение 3. *Пусть выполнены условия* (1.4), *а* $u_{\varepsilon,r}$ — *решение задачи* (1.1), (1.3) *с* $\mathcal{U}=\mathcal{U}_r$ *и* $||u_{\varepsilon,r}||=r$ *при всех* $r\in[r_*;r^*]$, $r_*>0$. *Тогда при некоторых* $K>0$ *и* $\varepsilon_0>0$

$$\forall\, r,r'\in[r_*;r^*]\ \ \forall\,\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]\ \ \|u_r-u_{r'}\|\leqslant K\,|r-r'|\,\varepsilon^{-12}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Пусть $z_{\varepsilon,0}$ — решение задачи (1.1) с $u=0$, а оператор $A\colon L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ ставит в соответствие функции u_ε решение задачи (1.1) с $\widetilde{f}=0$. Тогда $z_\varepsilon=z_{\varepsilon,0}+Au_\varepsilon$ и функционал качества примет вид $J(u_\varepsilon)=\|Au_\varepsilon+v_0\|^2+\nu^{-1}\|u_\varepsilon\|^2$, где $v_0:=z_{\varepsilon,0}-\widetilde{z}_{d,\gamma}$. В силу теоремы 3 (см.: Данилин А.Р. Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления потоком через часть границы. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2014. Т. 20, № 4. С. 91–103) имеем

$$\|u_r-u_{r'}\|\leqslant K_1|r-r'|\cdot\|A\|^2\big(\|A\|+\|v_0\|\big)^4.$$

По определению $\|A\|$ в силу оценок (2.2) получим $\|A\|\leqslant K_2\varepsilon^{-2}$. При этом

$$\|v_0\|\leqslant\|z_{\varepsilon,0}\|+\|\widetilde{z}_{,\gamma}d\|\overset{(2.2)}{\leqslant}K_1\varepsilon^{-2}\big(\|f+O(\varepsilon^\gamma)\|+\|z_d+O(\varepsilon^\gamma)\|\big)\leqslant K_3\varepsilon^{-2}.$$

Тем самым

$$\|u_r-u_{r'}\|\leqslant K_4|r-r'|\,\varepsilon^{-4}\big(\varepsilon^{-2}\big)^4\leqslant K_4|r-r'|\,\varepsilon^{-12}$$

при всех достаточно малых $\varepsilon>0$. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.4). *Тогда*

$$\max\{\|z_\varepsilon-z_{\varepsilon,\gamma}\|,\|\nabla z_\varepsilon-\nabla z_{\varepsilon,\gamma}\|\}=O\big(\varepsilon^{\gamma-12}\big),$$
$$\max\{\|p_\varepsilon-p_{\varepsilon,\gamma}\|,\|\nabla p_\varepsilon-\nabla p_{\varepsilon,\gamma}\|,|\lambda_\varepsilon-\Lambda_\gamma|=O\big(\varepsilon^{\gamma-14}\big).$$

при $\varepsilon\to0$ *и* $\gamma>14$. □

Доказательство. Функции $\widetilde{z}_{\varepsilon,\gamma}:=z_{\varepsilon,\gamma}-z_\varepsilon$ и $\widetilde{p}_{\varepsilon,\gamma}:=p_{\varepsilon,\gamma}-p_\varepsilon$ являются решением системы

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_{\varepsilon,\gamma}=f_{1,\gamma}+\lambda_\varepsilon p_\varepsilon-\Lambda_\gamma p_{\varepsilon,\gamma},\quad \mathcal{L}_\varepsilon p_{\varepsilon,\gamma}=f_{2,\gamma}+z_{\varepsilon,\gamma}. \tag{2.14}$$

Поскольку в силу (2.10) и (2.12)

$$\|\lambda_\varepsilon p_\varepsilon-\Lambda_\gamma p_{\varepsilon,\gamma}\|\overset{(2.13)}{\leqslant}K\varepsilon^{-12}\Big|\lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\|-\Lambda_\gamma\|p_{\varepsilon,\gamma}\|\Big|=O\big(\varepsilon^{\gamma-14}\big) \tag{2.15}$$

при $\varepsilon\to0$, то, применяя к решению первого уравнения системы (2.14) оценки (2.2), получим оценки для $z_{\varepsilon,\gamma}$, после чего в силу (2.2) из второго уравнения системы (2.14) выводим оценки для $p_{\varepsilon,\gamma}$.

Так как $\lambda_\varepsilon\overset{(2.10)}{=}\|p_\varepsilon\|^{-1}\overset{(1.9)}{\leqslant}\nu$, то

$$\|p_\varepsilon\|\geqslant\nu^{-1}. \tag{2.16}$$

Из уже полученных оценок следует, что

$$\|p_{\varepsilon,\gamma}\|\geqslant\|p_\varepsilon\|-\|p_\varepsilon-p_{\varepsilon,\gamma}\|\overset{(2.16)}{\geqslant}\nu^{-1}+O\big(\varepsilon^{\gamma-14}\big)\overset{\gamma>14}{\geqslant}\frac{1}{2\nu} \tag{2.17}$$

при достаточно малых $\varepsilon>0$. Поэтому

$$\Lambda_\gamma\overset{(2.12)}{=}\frac{1+O\big(\varepsilon^\gamma\big)}{\|p_{\varepsilon,\gamma}\|}\overset{(2.17)}{=}O\big(1\big) \tag{2.18}$$

при $\varepsilon\to0$.

Наконец,

$$|\Lambda_\gamma-\lambda_\varepsilon|\cdot\|p_\varepsilon\|\leqslant\|\lambda_\varepsilon p_\varepsilon-\Lambda_\gamma p_{\varepsilon,\gamma}\|+|\Lambda_\gamma|\cdot\|p_\varepsilon-p_{\varepsilon,\gamma}\|\overset{(2.15),(2.18)}{=}O\big(\varepsilon^{\gamma-14}\big).$$

Отсюда в силу (2.16) получаем последнее соотношение $|\Lambda_\gamma-\lambda_\varepsilon|=O\big(\varepsilon^{\gamma-14}\big)$ при $\varepsilon\to0$. □

3. Построение асимптотических разложений

Теоремы 1 и 2 показывают, что формальные асимптотические решения (Ф.А.Р. [3, введение]) по степеням ε задачи (1.10), (1.9) будут асимптотикой ее решения как в пространстве $H_0^1(\Omega)$, так и (в силу априорных оценок Шаудера — см., например, [7, Гл.2, теорема 5.1], и теорем вложения — см., например, [6, Гл 1, п. 8]) в $C(\overline{\Omega})$. При этом оценки погрешности, завышенные в указанных теоремах, будут определяться оценками слагаемых в Ф.А.Р.

Построение Ф.А.Р. осуществляется аналогично тому, как это делается в случае одного уравнения [3; 11] (но с учетом дополнительного условия (2.12) при выполнении (2.9)).

Ф.А.Р. задачи (1.10), (1.9) будем строить в виде суммы внешнего разложения и внутреннего разложения, коэффициенты которого будут экспоненциально убывающими функциями пограничных слоев в окрестности Γ.

Внешнее разложение будем строить в виде

$$Z_\varepsilon := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(x), \quad P_\varepsilon := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x), \quad \Lambda_\varepsilon := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_{2k}, \tag{3.1}$$

где $z_0 := z_{0,\lambda_0,d}$ и $p_0 := p_{0,\lambda_0,d}$, а $\lambda_0 := \nu$ в случае (2.8), или единственное решение уравнения $\mathcal{F}(1/\lambda) = 1$ в случае (2.9) (далее будут указаны достаточные условия выполнения условий (2.8) и (2.9), а также существования единственного решения уравнения $\mathcal{F}(1/\lambda) = 1$).

Отметим, что в случае (2.8) справедливы равенства $\lambda_k = 0$ при всех k.

Коэффициенты рядов (3.1) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered} a(x)z_k + \lambda_0 p_k = -\lambda_k p_0 + \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_{k-m} p_m + \Delta z_{k-2} := -\lambda_k p_0 + f_{1,k}, \\ a(x)p_k - z_k = f_{2,k} := \Delta p_{k-2}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Как обычно, считаем, что если индекс у функции отрицателен, то она тождественно равна нулю.

В случае $\Lambda_\varepsilon \neq \nu$ коэффициенты z_k и z_k при $k > 0$ удобно представить в виде

$$z_k = z_{k,1} + \lambda_k \widehat{z}, \quad p_k = p_{k,1} + \lambda_k \widehat{p}, \tag{3.3}$$

где $z_{k,1}$, $p_{k,1}$ — решение системы (3.2) с правыми частями $f_{1,k}$, $f_{2,k}$, а $\widehat{z}$, $\widehat{p}$ — решение этой же системы с правыми частями p_0, 0. Все $z_{k,1}$, $p_{k,1}$ однозначно находятся по предыдущим z_m, p_m и λ_m по формулам (2.6) (с соответствующими заменами: λ заменяется на λ_0, f_1 — на $f_{1,k}$ и f_2 — на $f_{2,k}$). При этом $z_k,\, p_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Выпишем функции $\widehat{z}$ и $\widehat{p}$ через p_0:

$$\widehat{z}(x) = \frac{-a(x)p_0(x)}{a^2(x) + \lambda_0}, \quad \widehat{p}(x) = \frac{-p_0(x)}{a^2(x) + \lambda_0}. \tag{3.4}$$

Для аппроксимации граничных условий (и дополнительного условия (2.10)) в малой окрестности границы Γ (пограничный слой) вводятся новые переменные (это можно сделать в силу гладкости границы) (s, τ), где s — это координата на многообразии Γ, а τ — расстояние по нормали к Γ, исходящей из точки на Γ с координатой s.

Пограничный слой имеет ширину порядка ε, а поправочные функции нужны не во всей области Ω, а лишь в малой окрестности Γ. Поэтому после построения, поправочные функции нужно умножить на срезающую функцию η, т.е. функцию с носителем в малой окрестности границы и равную тождественно 1 в некоторой меньшей окрестности границы.

В пограничном слое стандартно (см., например, [11, 3, гл. I, § 2]) перейдем к растянутым переменным $\xi := \tau\varepsilon^{-1}$ и к следующему виду разложений:

Внутреннее разложение будем строить в виде

$$W_\varepsilon := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k W_k(s,\eta_i), \quad V_\varepsilon := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k V_k(s,\eta_i). \tag{3.5}$$

При переходе к новым координатам оператор $\mathcal{L}_\varepsilon z = -\varepsilon^2 \Delta z + a_1(x) z$ перейдет в оператор

$$\mathcal{M}_\varepsilon W \equiv -\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \varepsilon M_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \varepsilon^2 M_2 v + \widetilde{a}(s,\varepsilon\xi) v.$$

Здесь M_1 и M_2 — дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядка, содержащие лишь дифференцирование по переменной s, с гладкими коэффициентами от s и τ, а функция $\widetilde{a}(s,\tau)$ — это $a(x)$ в координатах (s,τ).

Подставляя в однородную систему ряды (3.5) и разлагая коэффициенты в уравнениях системы и оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ в ряды Тейлора по переменной $\tau = \varepsilon\xi$, получим следующую систему:

$$-\frac{\partial^2 W_k}{\partial \xi^2} + \widetilde{a}_0(s) W_k + \lambda_0 V_k = F_k, \quad -\frac{\partial^2 V_k}{\partial \xi^2} + \widetilde{a}_0(s) V_k - W_k = G_k, \tag{3.6}$$

где $F_0(s,\xi) = 0$, $G_0(s,\xi) = 0$, $F_k(s,\xi)$ и $G_k(s,\xi)$ линейно выражаются через предыдущие функции W_k, V_k, и их производные и полиномиально зависят от ξ и гладко от s, а функция

$$a(x) = \widetilde{a}(s,\varepsilon\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \xi^i \widetilde{a}_i(s)$$

разложена в ряд по степеням малого параметра.

Системы дополняются граничными условиями

$$\widetilde{z}_k(s,0) + W_k(0) = 0, \quad \widetilde{p}_k(s,0) + V_k(0) = 0. \tag{3.7}$$

Здесь $\widetilde{z}_k$ и $\widetilde{p}_k$ — это z_k и p_k в координатах s и ξ.

Системы (3.6), рассматриваемые как системы четырех линейных дифференциальных уравнений уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами (при каждом фиксированном s), имеют по четыре различных характеристических числа, два из которых имеют отрицательные вещественные части, не превосходящие $(-\sqrt{\lambda_0/2})$. Поэтому в классе экспоненциально убывающих при $\xi \to +\infty$ функций все W_k, V_k, удовлетворяющие (3.6) и (3.7), однозначно находятся.

Таким образом, в случае $\Lambda_\varepsilon = \nu$ Ф.А.Р. задачи (2.3) построено и тем самым построено асимптотическое разложение $z_{\varepsilon,\nu,d}$ и $p_{\varepsilon,\nu,d}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1.4). *Тогда $z_{\varepsilon,\nu,d}$ и $p_{\varepsilon,\nu,d}$ разлагаются в ряды вида* (3.1), (3.5)

$$z_{\varepsilon,\nu,d} = Z_\varepsilon + \eta W_\varepsilon, \quad p_{\varepsilon,\nu,d} = P_\varepsilon + \eta V_\varepsilon,$$

где все коэффициенты этих рядов однозначно находятся из (3.2), (3.6) *и* (3.7), *а η — срезающая функция.*

Эти разложения справедливы как в $H_0^1(\Omega)$, так и в $C(\overline{\Omega})$. □

Следствие. *Пусть выполнены условия* (1.4).
Если

$$\nu \|p_{0,\nu,d}\| < 1,$$

то найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$

$$\lambda_\varepsilon = \nu, \quad z_\varepsilon = z_{\varepsilon,\nu,d}, \quad p_\varepsilon = p_{\varepsilon,\nu,d}.$$

Если же

$$\nu\|p_{0,\nu,d}\| > 1, \tag{3.8}$$

то найдется $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при всех* $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$

$$\lambda_\varepsilon < \nu, \quad \lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\| = 1.$$

При этом

$$\|f - a(x)z_d(x)\| \geqslant 1. \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $V_0 = O(\sqrt{\varepsilon})$ при $\varepsilon \to 0$, то в силу теоремы 3

$$\nu\|p_{\varepsilon,\nu,d}\| \to \nu\|p_{0,\nu,d}\|. \tag{3.10}$$

Тем самым в первом случае в силу (3.10) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\nu\|p_{\varepsilon,\nu,d}\| < 1$. Поэтому $\{z_{\varepsilon,\nu,d}, p_{\varepsilon,\nu,d}, \lambda_\varepsilon = \nu\}$ удовлетворяют (1.9) и (1.10).

Во втором случае, предположив противное, найдем $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\lambda_{\varepsilon_n}\|p_{\varepsilon_n}\| < 1$. Поэтому $\lambda_{\varepsilon_n} = \nu$ и в силу (3.10)

$$\lambda_{\varepsilon_n}\|p_{\varepsilon_n}\| = \nu\|p_{\varepsilon_n,\nu,d}\| \to \nu\|p_{0,\nu,d}\| \leqslant 1,$$

что противоречит условию следствия.

Наконец в силу утверждения 1 $\mathcal{F}(0) = \|f - a(x)z_d(x)\|^2 \geqslant \lambda_\varepsilon^2\|p_{\varepsilon_n,\lambda_\varepsilon,d}\|^2 = \lambda_\varepsilon^2\|p_\varepsilon\|^2 = 1.$ □

Отметим, что достаточным условием выполнения (2.8) в силу утверждения 1 является неравенство $\|f - a(x)z_d(x)\| < 1$, а достаточным условием выполнения (2.9) и однозначной разрешимости уравнения $\mathcal{F}(1/\lambda) = 1$ является неравенство $\|f - a(x)z_d(x)\| > 1$.

В случае (3.9) для нахождения λ_k надо использовать условие аппроксимации (2.11) аппроксимации величины $\lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\| = 1$, которое принимает вид

$$\Lambda_\varepsilon^2\|P_\varepsilon + V_\varepsilon\|^2 = 1 + O\big(\varepsilon^{+\infty}\big), \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.11}$$

Правая часть соотношения в (3.11) есть сумма произведений вида

$$\varepsilon^k\lambda_{m_1}\lambda_{m_2}(p_{m_3} + V_{m_3}, p_{m_4} + V_{m_4}),\ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = k.$$

Но

$$(p_m, p_{m'}) = O\big(1\big), \quad (p_m, V_{m'}) = O\big(\varepsilon\big), \quad (V_m, V_{m'}) = O\big(\varepsilon\big), \quad \varepsilon \to 0$$

и все $(p_m, V_{m'})$ и $(V_m, V_{m'})$ разлагаются в степенные асимптотические ряды по $\{\varepsilon^k\}$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, условие (3.11) с учетом равенства $\lambda_0\|p_0\| = 1$ принимает вид

$$\lambda_k\|p_0\|^2 + \lambda_0(p_0, p_k) = \delta_k,$$

где δ_k — известная константа, определяемая предыдущими коэффициентами всех разложений. Учитывая (3.3), получим

$$\lambda_k\|p_0\|^2 + \lambda_0(p_0, p_{k,1}) + \lambda_0\lambda_k(p_0, \widehat{p}) = \delta_k.$$

Если $\|p_0\|^2 + \lambda_0(p_0, \widehat{p}) \neq 0$, то λ_k находится однозначно

$$\lambda_k = \frac{\delta_k - \lambda_0(p_0, p_{k,1})}{\|p_0\|^2 + \lambda_0(p_0, \widehat{p})}. \tag{3.12}$$

Утверждение 4. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и* (3.8). *Тогда* $\|p_0\|^2 + \lambda_0(p_0, \widehat{p}) \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Тогда в силу (3.4)

$$0 = \int\limits_{\Omega} \left(p_0(x)^2 - \frac{\lambda_0 p_0(x)^2}{a(x)^2 + \lambda_0} \right) dx = \int\limits_{\Omega} \frac{p_0(x)^2 a(x)^2}{a(x)^2 + \lambda_0} \, dx.$$

Отсюда следует, что $p_0(x)a(x) = 0$ на Ω. Тогда силу условия (1.4) и $p_0(x) = 0$ на Ω. Но это противоречит равенству $\lambda_0 \|p_0\| = 1$. □

Таким образом, алгоритм построения Ф.А.Р. следующий:

1. По λ_0, p_0 и z_0 однозначно находятся W_0 и V_0.

2. Если все λ_m, p_m и z_m, W_m и V_m при $m \leqslant k$ уже построены, то по ним сначала определяется $p_{k+1,1}$ и δ_{k+1}, по которым вычисляется λ_{k+1}, затем находятся z_{k+1} и p_{k+1} и, наконец, W_{k+1} и V_{k+1}.

Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и* $\|f - a(x)z_d(x)\| > 1$. *Тогда* z_ε, p_ε *и* λ_ε *разлагаются в ряды вида* (3.1), (3.5)

$$z_\varepsilon = Z_\varepsilon + \eta W_\varepsilon, \quad p_\varepsilon = P_\varepsilon + \eta V_\varepsilon \quad \lambda_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon,$$

где все коэффициенты этих рядов одназначно находятся из (3.2), (3.6), (3.7) *и* (3.12).

Эти разложения справедливы как в $H_0^1(\Omega)$, *так и в* $C(\overline{\Omega})$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
2. **Erdelyi A., Wyman M.** The asymptotic evaluation of certain integral // Arch. Ration. Mech. Anal. 1963. Vol. 14. P. 217–260.
3. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
4. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
5. **Данилин А.Р.** Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12.
6. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
7. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
8. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.
9. **Данилин А. Р.** Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Мат. сб. 1998. Т. 189, №11. С. 27–60.
10. **Данилин А.Р.** Оптимальное граничное управление в области с малой полостью // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 87–100.
11. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регуляроное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–122.

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила 20.05.2018

REFERENCES

1. Lions J.-L. *Optimal control of systems governed by Partial Differential Equations.* Berlin: Springer, 1971, 396 p. ISBN: 978-3-642-65026-0. Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami v chastnykh proizvodnykh.* Moscow: Mir Publ., 1972, 441 p.
2. Erdelyi A., Wyman M.The Asymptotic Evaluation of Certain Integral. *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 1963, vol. 14, pp. 217–260. doi: 10.1007/BF00250704.
3. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Providence: American Math. Soc., 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published in A.M. Il'in *Soglasovanie asimptoticheskih razlozhenij reshenij kraevyh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1989, 336 p.
4. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. ISBN: 978-5-9221-1056-3.
5. Danilin A.R. Approximation of a singularly perturbed elliptic problem of optimal control. *Sbornik: Math.*, 2000, vol. 191, no. 10, pp. 1421–1431. doi: 10.1070/SM2000v191n10ABEH000512.
6. Sobolev S.L. *Some applications of functional analysis in mathematical physics.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991, 286 p. ISBN: 0-8218-4549-7. Original Russian text (1st ed.) published in Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike.* Leningrad: Leningr. Gos. Univ. Publ., 1950, 255 p.
7. Lions J.-L., Magenes E. *Non-homogeneous boundary value problems and their applications.* Berlin: Springer-Verlag, 1972, 357 p. ISBN: 3540053638. Translated to Russian under the title *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya.* Moscow: Mir Publ., 1971, 371 p.
8. Rektorys Karel. *Variational methods in mathematics, science and engineering. Second edition.* Dordrecht; Boston; London: Dr. Reidel Publ. Comp., 1980, 571 p. ISBN: 9781402002977. Translated to Russian under the title *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike i tekhnike.* Moscow: Mir Publ., 1985, 590 p.
9. Danilin A.R. Asymptotic behaviour of bounded controls for a singular elliptic problem in a domain with a small cavity. *Sb. Math.*, 1998, vol. 189, no. 11, pp. 1611–1642. doi: 10.1070/SM1998v189n11ABEH000364.
10. Danilin A.R. An optimal boundary control in a domain with a small cavity. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 87–100 (in Russian).
11. Vishik M.I., Lyusternik L.A. A regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on May 20, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the state project "Development of the concept of positional control, minimax approach, and singular perturbations in the theory of differential equations."

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru.