ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 519.17+512.54

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ ЛОКАЛЬНО $pG_{s-6}(s,t)$-ГРАФЫ ДИАМЕТРА, БОЛЬШЕГО 3

В. В. Биткина, А. К. Гутнова

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением, не большим t для данного натурального числа t. Решение задачи Кулена состоит из двух этапов: первый этап — перечисление допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов; второй этап — нахождение автоморфизмов графов с полученными массивами. В настоящее время первый этап решения задачи Кулена закончен для $t=5$ (А. А. Махнев, Д. В. Падучих и А. К. Гутнова, А. А. Махнев). Завершен второй этап решения задачи Кулена для $t=3$ (А. А. Махнев, М. Х. Шерметова). Программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением r, $5<r\le 6$, состоит из трех частей. Это получение списка параметров локально искючительных подграфов с помощью теоремы редукции, перечисление массивов пересечений дистанционно регулярных локально исключительных псевдогеометрических графов, перечисление массивов пересечений дистанционно регулярных локально исключительных непсевдогеометрических графов. В данной работе перечислены массивы пересечений дистанционно регулярных локально псевдогеометрических графов для $pG_{s-6}(s,t)$ диаметра, большего 3.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, локальный подграф, собственное значение графа.

V. V. Bitkina, A. K. Gutnova. Distance-regular locally $pG_{s-6}(s,t)$-graphs of diameter greater than 3.

J. Koolen suggested the problem of studying distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with the second eigenvalue at most t for some natural t. The solution of Koolen's problem consists of two steps: the first step is the enumeration of admissible intersection arrays of such graphs, and the second step is finding the automorphisms of the graphs with these arrays. At present, the first step is complete for $t=5$ (A. Makhnev, D. Paduchikh, and A. Gutnova; A. Makhnev). The second step is complete for $t=3$ (A. Makhnev and M. Shermetova). The program of studying distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with the second eigenvalue r such that $5<r\le 6$ consists of three parts: the theorem of reduction to exceptional local subgraphs, the enumeration of intersection arrays of distance-regular locally exceptional pseudogeometric graphs, and the enumeration of intersection arrays of distance-regular locally exceptional nonpseudogeometric graphs. In this paper we enumerate intersection arrays of distance-regular locally pseudogeometric graphs for $pG_{s-6}(s,t)$ with diameter greater than 3.

Keywords: distance-regular graph, local subgraph, eigenvalue of a graph.

MSC: 05C25, 20B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-34-42

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a]=\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a, положим $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Через $k_(a)$ обозначим *степень вершины* a, т.е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $k_(a)=k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a,b верно равенство $|[a]\cap[b]|=\mu$.

Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$ [1], если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа ($k = b_0$), $c_1 = 1$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a,l) \in (P,\mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекаюших l (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается через $GQ(s,t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением, не большим t для данного натурального числа t. Заметим, что сильно регулярный граф с нецелым собственным значением является графом в половинном случае, а вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы в половинном случае, либо имеет диаметр 2, либо является графом Тэйлора. Таким образом, задача Кулена может быть решена пошагово для $t = 1, 2, \ldots$.

Решение задачи Кулена состоит из двух этапов: первый этап — перечисление допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов; второй этап — нахождение автоморфизмов графов с полученными массивами. В настоящее время первый этап решения задачи Кулена закончен для $t = 5$ (см. статью Махнев А.А., Падучих Д.В. Графы, в которых локальные подграфы сильно регулярны со вторым собственным значением 5. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. P. 188–200) и работу [2]). Завершен второй этап решения задачи Кулена для $t = 3$ [3].

Программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением r, $5 < r \le 6$, состоит из трех частей: нахождения параметров исключительных локальных подграфов с помощью теоремы редукции, перечисления массивов пересечений дистанционно регулярных локально исключительных псевдогеометрических графов, перечисления массивов пересечений дистанционно регулярных локально исключительных непсевдогеометрических графов.

В данной работе перечислены массивы пересечений дистанционно регулярных локально псевдогеометрических графов для $pG_{s-6}(s,t)$ диаметра, большего 3. Оказалось, что в этом случае редукция к исключительным локальным подграфам не нужна.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* $d \ge 4$*, в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для* $pG_{s-6}(s,t)$*,* $s \ge 8$*. Тогда* $s = 8$*,* Γ *является половинным* 10*-кубом или имеет массив пересечений* $\{81, 56, 18, 1; 1, 9, 56, 81\}$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* $d \ge 4$*, в котором окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для* $GQ(7,t)$*. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $t = 1$ *и* Γ *является графом Джонсона* $J(16,8)$ *или его стандартным частным*;

(2) $t = 5$ *и* Γ *является* $AT4(6,6)$*-графом с массивом пересечений* $\{288, 245, 48, 1; 1, 24, 245, 288\}$ *или* $\{288, 245, 36, 1; 1, 36, 245, 288\}$.

2. Вспомогательные результаты

Приведем вспомогательные леммы, необходимые для доказательства теорем.

Лемма 2.1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ) и неглавными собственными значениями η_1, η_2, Δ — регулярный подграф из Γ степени μ на w вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $(\mu-\eta_1)v/(k-\eta_1) \le w \le (\mu-\eta_2)v/(k-\eta_2)$, *если одно из равенств достигается, то каждая вершина из $\Gamma-\Delta$ смежна ровно с $(k-\mu)w/(v-w)$ вершинами из Δ;*

(2) *если X,Y — множества вершин из Γ, между которыми нет ребер, то $|X|\cdot|Y| \le (v-|X|)(v-|Y|)(\eta_1-\eta_2)^2/(2k-\eta_1-\eta_2)^2$;*

(3) *если X_i — множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i=|X_i|$, то $x_0\cdot w \le (v-x_0)(v-w)(\eta_1-\eta_2)^2/(2k-\eta_1-\eta_2)^2$;*

(3) *если $x_0=w$, то $w\le v(\eta_1-\eta_2)/(2k-2\eta_2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По [4, упражнение 3.15.2] имеем $\eta_2 \le \mu-(k-\mu)w/(v-w)\le 6$, поэтому $(\mu-6)(v-w)\le(k-\mu)w\le(\mu-\eta_2)(v-w)$. Отсюда $(\mu-6)v/(k-6)\le w\le(\mu-\eta_2)v/(k-\eta_2)$.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i=|X_i|$. По [4, предложение 4.8.1] имеем $x_0\cdot w\le(v-x_0)(v-w)(6-\eta_2)^2/(2k-6-\eta_2)^2$.

Если $x_0=w$, то $x_0(2k-6-\eta_2)\le(v-x_0)(6-\eta_2)$ и $x_0\le v(6-\eta_2)/(2k-2\eta_2)$.

Лемма 2.2 [5, теорема 4.4.3]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d, в котором окрестности вершин сильно регулярны с неглавными собственными значениями η_1, η_2. Если $k=\theta_0>\theta_1>\ldots>\theta_d$ — собственные значения графа Γ, то $\eta_2\ge b^-=-1-b_1/(\theta_1+1)$, $\eta_1\le b^+=-1-b_1/(\theta_d+1)$.*

Лемма 2.3. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d\ge 3$, содержащий индуцированный четырехугольник. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *$c_i-b_i\ge c_{i-1}-b_{i-1}+a_1+2$ для $i=2,3,\ldots,d$;*

(2) *диаметр графа Γ не больше $2k/(\lambda+2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение — это теорема 5.2.1 из [1]. Второе утверждение — это следствие 5.2.2 из [1].

3. Графы, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-6}(s,t)$

В леммах 3.1—3.3 предполагается, что Γ — вполне регулярный граф диаметра d с параметрами (v,k,λ,μ), в котором окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $pG_{s-6}(s,t)$ с параметрами $v'=k$, $k'=\lambda$, λ', μ' и собственными значениями $\eta_1=6$, $\eta_2=-(t+1)$.

Лемма 3.1. *Пусть u,w — вершины из Γ с $d(u,w)=2$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $(st+s-6t-12)(s+1)/(s-6)\le\mu\le(s-5)(st+s-6)/(s-6)$;

(2) *если X_i — множество вершин из $[w]-[u]$, смежных точно с i вершинами из $[u]\cap[w]$, $x_i=|X_i|$, то $x_0\cdot\mu\le(v'-x_0)(v'-\mu)(t+7)^2/((2s+1)(t+1)-6)^2$;*

(3) *если $x_0=\mu$, то $\mu\le(st+s-6)(t+7)/(2(s-6)(t+1))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2.1, примененной к подграфу $[u]\cap[w]$ из $[w]$, получим

(1) $(\mu'-6)v'/(k'-6)\le\mu\le(\mu'-\eta_2)v'/(k'-\eta_2)$;

(2) если X_i — множество вершин из $[w]-[u]$, смежных точно с i вершинами из $[u]\cap[w]$, $x_i=|X_i|$, то $x_0\cdot\mu\le(v'-x_0)(v'-\mu)(6-\eta_2)^2/(2k'-6-\eta_2)^2$;

(3) если $x_0=\mu$, то $\mu\le v'(6-\eta_2)/(2k'-2\eta_2)$.

Подставляя $v'=k=(s+1)(1+st/(s-6)$, $k'=\lambda=s(t+1)$, $\mu'=(s-6)(t+1)$, получим утверждения леммы.

Лемма 3.2. *Если диаметр графа* Γ $d \geq 4$, *то либо* $s = 7$ *и* $t \leq 13$, *либо* $s = 8$ *и* $t \leq 4$, *либо* $s = 9$ *и* $t = 2$.

Доказательство. Пусть Γ содержит геодезический 4-путь u, w, x, y, z. Тогда в графе $[x]$ между $[u] \cap [x]$ и $[x] \cap [z]$ нет ребер и ввиду леммы 3.1 имеем

$$(st + s - 6t - 12)(s + 1)/(s - 6) \leq \mu \leq (st + s - 6)(t + 7)/(2(s - 6)(t + 1)),$$
$$v(st - 6t + s - 12)/(st + s - 6) \leq w \leq v(t + 7)/(2st + 2s + 2t + 2).$$

Поэтому $2(st + s + t + 1)(st - 6t + s - 12) \leq (st + s - 6)(t + 7)$.

В случае $s = 7$ имеем $16(t + 1)(t - 5) \leq (7t + 1)(t + 7)$, поэтому $t \leq 13$.

В случае $s = 8$ имеем $18(t + 1)(t - 2) \leq (4t + 1)(t + 7)$, поэтому $t \leq 4$.

В случае $s = 9$ имеем $20(t + 1)(t - 1) \leq (3t + 1)(t + 7)$, поэтому $t = 2$.

В случае $s = 10$ имеем $22(t + 1)(2t - 1) \leq (5t + 2)(t + 7)$, поэтому $t \leq 2$, противоречие.

Лемма 3.3. *Если* $d \geq 4$ *и* $s \geq 8$, *то* $s = 8$ *и либо* $t = 2$, $\mu \in \{8, 9, 12\}$, *либо* $t = 1$, $\mu \in \{6, 12\}$.

Доказательство. Пусть $d \geq 4$. Если $s = 9$, то $t = 2$, окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами (70,27,10,9), число μ четно и делит $70 \cdot 42$.

Ввиду леммы 3.1 имеем

$$(st + s - 6t - 12)(s + 1)/(s - 6) \leq \mu \leq (st + s - 6)(t + 7)/(2(s - 6)(t + 1)),$$

поэтому $10 \leq \mu \leq 9(18 + 9 - 6)/18$ и $\mu = 10$. В этом случае Γ — граф Тервиллигера, противоречие.

Если $s = 8$ и $t = 4$, то по условию целочисленности для $pG_2(8, 4)$ число $2 \cdot 11$ делит $8 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 5$.

Если $s = 8$ и $t = 3$, то по условию целочисленности для $pG_2(8, 3)$ число $2 \cdot 10$ делит $8 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 4$.

Если $s = 8$ и $t = 2$, то окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами (81,24,9,6) и число μ делит $81 \cdot 56$.

Ввиду леммы 3.1 имеем $(st+s-6t-12)(s+1)/(s-6) \leq \mu \leq (st+s-6)(t+7)/(2(s-6)(t+1))$, поэтому $9(4 + 8 - 12)/2 \leq \mu \leq 9(16 + 8 - 6)/12$ и $\mu \leq 27/2$. Отсюда $\mu \in \{8, 9, 12\}$.

Если $s = 8$ и $t = 1$, то окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами (45,16,8,4) и число μ делит $45 \cdot 28$. Но единственный сильно регулярный граф с параметрами (45,16,8,4) — это треугольный граф $T(10)$, в котором μ-подграфы являются четырехугольниками. Поэтому любой μ-подграф в Γ — октаэдр или объединение двух изолированных октаэдров. Отсюда $\mu \in \{6, 12\}$. Лемма доказана.

До конца раздела будем предполагать, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 4$, в котором окрестность Δ вершины a является псевдогеометрическим графом для $pG_{s-6}(s, t)$. Тогда граф Δ сильно регулярен с параметрами (v', k', λ', μ'), $v' = k = (s + 1)(1 + st/(s - 6)$, $k' = \lambda = s(t + 1)$, $\lambda' = s - 1 + (s - 7)t$, $\mu' = (s - 6)(t + 1)$ и неглавными собственными значениями $\eta_1 = 6, \eta_2 = -(t + 1)$.

При доказательстве теорем 1 и 2 проводится используются компьютерные вычисления.

Следующий алгоритм[1] дает границу для диаметра графа гораздо более точную, чем граница Тервиллигера из леммы 2.3. Так в случаях $s = 7$, $t = 9$ и $s = 7$, $t = 5$ по лемме 2.3 диаметр графа Γ не больше 13, а по алгоритму, представленному ниже, диаметр графа Γ не больше 4. Этот алгоритм применяется в леммах 3.4 (случай $b_2 = 21$), 4.1 (случай $\mu = 32$), 4.2 (случай $\mu = 16$) и 4.3 (случай $\mu = 8$).

По [1, лемма 3.2.1] средняя степень графа не превосходит его наибольшего собственного значения, причем равенство достигается только в случае регулярного графа. Поэтому мы ищем шар наименьшего радиуса r, в котором средняя степень не меньше $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1$, где $\eta_1 > \eta_2$ — неглавные собственные значения окрестности вершины. По [1, теорема 4.4.3]

[1]См. предложение 2 статьи Махнев А.А., Падучих Д.В. Графы, в которых локальные подграфы сильно регулярны со вторым собственным значением 5. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4.

в графе Γ не может быть двух изолированных шаров радиуса r, значит, $d \leq 2r+1$. Более того, средняя степень в объединении слоев, изолированных от шара радиуса r, не превосходит $-b_1/(\eta_2+1)-1$ и равенство возможно только в сфере радиуса d. При выборе очередного значения b_i среднюю степень в шаре радиуса i можно посчитать точно: $\bar{k} = k - b_i k_i/v_i$, где v_i — число вершин в шаре.

Лемма 3.4. *Пусть* $s = 8$ *и* $t = 2$. *Тогда* Γ *имеет массив пересечений* $\{81, 56, 18, 1; 1, 9, 56, 81\}$.

Доказательство. Пусть $s = 8$ и $t = 2$. Тогда окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами (81,24,9,6). По лемме 2.2 имеем $\eta_2 \geq b^- = -1-b_1/(\theta_1+1)$, $\eta_1 \leq b^+ = -1-b_1/(\theta_d+1)$, где $\eta_1 = 6$, $\eta_2 = -3$, поэтому $\theta_1 \leq 27$ $\theta_d \geq -9$.

Если $\mu = 9$, то любой μ-подграф является регулярным графом степени 6 на 9 вершинах, а если $\mu = 8$, то любой μ-подграф является полным многодольным графом $K_{4\times 2}$. По лемме 2.3 диаметр графа Γ не больше 6 ($2k/(\lambda+2) = 162/26$).

Пусть a, b, c, d — геодезический 3-путь в Γ. Тогда между $[a] \cap [c]$ и $[c] \cap \Gamma_3(a)$ нет ребер и по лемме 2.1 имеем $b_2 \cdot \mu \leq (v'-b_2)(v'-\mu)(6-\eta_2)^2/(2k'-6-\eta_2)^2$. Поэтому $b_2 \cdot \mu \leq (81-b_2)(81-\mu)/5^2$, в случае $\mu = 8$ имеем $b_2 \leq 21$, в случае $\mu = 9$ имеем $b_2 \leq 19$ и в случае $\mu = 12$ имеем $b_2 \leq 15$.

Допустим сначала, что $\mu = 8$. Тогда $k_2 = 81 \cdot 7$, поэтому число a_2 четно и b_2 нечетно. Отсюда число c_3 нечетно и b_3, c_4 делятся на 8, в частности $b_3 \leq 16$. По лемме 2.3 имеем $c_i - b_i \geq c_{i-1} - b_{i-1} + a_1 + 2$ для $i = 2, 3, \ldots, d$.

Если $b_3 = 16$, то $c_3 - 16 \geq 34 - b_2$ и $c_3 \geq 29$. Так как c_3 делит $81 \cdot 7 \cdot b_2$, то $c_3 = 51$, $b_2 = 17$ и Γ имеет массив пересечений $\{81, 56, 17, 16; 1, 8, 51, c_4\}$. Противоречие с тем, что $\theta_1 > 56$.

Если $b_3 = 8$, то $c_3 - 8 \geq 34 - b_2$ и $c_3 \geq 21$. Отсюда $(c_3, b_2) \in \{(21, 21), (27, 21), (33, 11), (35, 15), (39, 13), (45, 15), (49, 21), (51, 17)\}$ и числа b_3, c_4 делятся на 8.

В случае $d(\Gamma) = 5$ получим $b_2 = 21$. Далее, $k_2 = 81 \cdot 56/8 = 567$, $v_2 = 589$, $b_1 = 56$, $\eta_1 = 6, \eta_2 = -3$. Если $d \geq 5$, то для шара радиуса 2 имеем $\bar{k} = k - b_2 k_2/v_2 = 81 - 567 b_2/589 \leq -b_1/(\eta_2+1) - 1 = 28$ и $b_2 \geq 589 \cdot 53/567$, противоречие. Значит, $d = 4$ и Γ имеет массив пересечений $\{81, 56, b_2, 8s; 1, 8, c_3, 8t\}$, $8t \geq c_3 - 8s + 26$ и $c_3 - 8s \geq 34 - b_2$. Противоречие с тем, что $\theta_1 > 33$.

Допустим теперь, что $\mu = 9$. Тогда $k_2 = 9 \cdot 56$ и b_2 делится на 9. Далее, $c_3 - b_3 \geq 34 - b_2 \geq 16$ и c_3 делит $9 \cdot 56 \cdot b_2$. Если $b_2 = 9$, то $c_3 - b_3 \geq 9 - 9 + 26 = 26$, $c_4 - b_4 \geq 52$ и c_3 делит $81 \cdot 56$, поэтому $c_3 \in \{36, 42, 54, 56\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{81, 56, 9, b_3; 1, 9, c_3, c_4\}$, причем в случае $c_3 = 42$ число c_4 делится на 3, а в случае $c_3 = 56$ число c_4 делится на 9. Неравенство $\theta_1 \leq 27$ выполняется только для массива $\{81, 56, 9, 1; 1, 9, 56, 81\}$, но в этом случае некоторое собственное значение имеет нецелую кратность, противоречие.

Если $b_2 = 18$, то $c_3 \geq 44$, поэтому $c_3 \in \{48, 54, 56\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{81, 56, 18, b_3; 1, 9, c_3, c_4\}$. В случае $c_3 = 48$ имеем $k_3 = 81 \cdot 7$, число a_3 четно, поэтому b_3 нечетно и c_4 делится на 3, а в случае $c_3 = 56$ число c_4 делится на 9. Если $c_3 = 48$ или $c_3 = 54$, то $\theta_1 > 29$, противоречие. Если $c_3 = 56$, то Γ имеет массив пересечений $\{81, 56, 18, 1; 1, 9, 56, 81\}$.

Допустим, что $\mu = 12$ и $d(\Gamma) \geq 4$. Тогда $k_2 = 27 \cdot 14$ и b_2 делится на 3. Если $b_2 = 12$, то $c_3 - b_3 \geq 26$, c_3 делит $81 \cdot 56$ и $c_3 = 27, 28, 36, 42, 54, 56$, а Γ имеет массив пересечений $\{81, 56, 12, b_3; 1, 12, c_3, c_4\}$. Неравенство $\theta_1 \leq 27$ выполняется только для массива $\{81, 56, 12, 1; 1, 12, 56, 81\}$, но в этом случае некоторое собственное значение имеет нецелую кратность, противоречие.

Если $b_2 = 15$, то $c_3 - b_3 \geq 23$, c_3 делит $81 \cdot 70$ и $c_3 = 27, 30, 35, 42, 45, 54$, b_3 делится на 4 и Γ имеет массив пересечений $\{81, 56, 15, b_3; 1, 12, c_3, c_4\}$. Противоречие с тем, что $\theta_1 > 40$.

Лемма 3.5. *Пусть* $s = 8$ *и* $t = 1$. *Тогда* Γ *является половинным* 10*-кубом с массивом пересечений* $\{45, 28, 15, 6, 1; 1, 6, 15, 28, 45\}$.

Доказательство. Пусть $s = 8$ и $t = 1$. Тогда окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами (45,16,8,4) (изоморфны треугольному графу $T(10)$). По лемме 2.3

диаметр графа Γ не больше 5 ($2k/(\lambda+2) = 90/18$). В случае $d = 5$ по следствию 5.2.4 из [1] Γ является 5-кубом, графом Джонсона $J(10,5)$, половинным кубом $D_{10,10}$ или графом Госсета. Отсюда Γ является половинным 10-кубом с массивом пересечений $\{45,28,15,6,1;1,6,15,28,45\}$.

По лемме 2.2 имеем $\eta_2 \geq b^- = -1 - b_1/(\theta_1+1)$, $\eta_1 \leq b^+ = -1 - b_1/(\theta_d+1)$, где $\eta_1 = 6$, $\eta_2 = -2$, поэтому $\theta_1 \leq 27$ $\theta_d \geq -5$.

Если $\mu = 12$, то μ-подграфу отвечает объединение двух изолированных $T(4)$-подграфов и $b_2 = 1$, противоречие с тем, что тогда диаметр графа не больше 3.

Допустим, что $\mu = 6$. Тогда $k_2 = 15 \cdot 14$, b_2 делится на 3 и подграф из $[w]$, изолированный от μ-подграфа $[u] \cap [w]$, является треугольным графом $T(6)$. Отсюда $b_2 \leq 15$. Если $b_2 < 15$, то для вершины y из $T(6)$, находящейся на расстоянии 2 от $[u]$, подграф $[u] \cap [y]$ — октаэдр, не пересекающий $[u] \cap [w]$.

Далее, $c_3 - b_3 \geq 24 - b_2 \geq 9$ и c_3 делит $15 \cdot 14 \cdot b_2$. Если $b_2 = 6$, то $c_3 - b_3 \geq 6 - 6 + 18 = 18$, $c_4 - b_4 \geq 36$ и c_3 делит $30 \cdot 42$, поэтому $c_3 \in \{20,21,28\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{45,28,6,b_3;1,6,c_3,c_4\}$, причем в случае $c_3 \in \{20,28\}$ число c_4 делится на 3, а в случае $c_3 = 21$ число c_4 четно.

Если $b_2 = 9$, то b_3 четно, $c_3 - b_3 \geq 6 - 9 + 18 = 15$, $c_4 - b_4 \geq 33$ и c_3 делит $45 \cdot 42$, поэтому $c_3 \in \{18,21,27,28\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{45,28,9,b_3;1,6,c_3,c_4\}$, причем в случае $c_3 = 28$ число c_4 делится на 3, а в случае $c_3 \in \{21,27\}$ число c_4 четно.

Если $b_2 = 12$, то $c_3 - b_3 \geq 6 - 12 + 18 = 12$, $c_4 - b_4 \geq 30$ и c_3 делит $60 \cdot 42$, поэтому $c_3 \in \{14,15,18,20,21,24,28\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{45,28,12,b_3;1,6,c_3,c_4\}$, причем в случае $c_3 \in \{14,20,28\}$ число c_4 делится на 3.

Если $b_2 = 15$, то b_3 четно, $c_3 - b_3 \geq 6 - 15 + 18 = 9$, $c_4 - b_4 \geq 27$ и c_3 делит $75 \cdot 42$, поэтому $c_3 \in \{14,15,18,21,25\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{45,28,15,2s;1,6,c_3,c_4\}$. причем в случае $c_3 \in \{14,20,28\}$ число c_4 делится на 3, а в случае $c_3 \in \{15,21,27\}$ число c_4 четно.

Компьютерный перебор показывает, что допустимых массивов пересечений нет. Лемма доказана.

Из лемм 3.3–3.5 следует теорема 1.

4. Графы, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $GQ(7,t)$

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 4$, в котором окрестность Δ вершины a является псевдогеометрическим графом для $GQ(7,t)$. Тогда граф Δ сильно регулярен с параметрами (v',k',λ',μ'), $v' = k = 8(1+7t)$, $k' = \lambda = 7(t+1)$, $\lambda' = 6$, $\mu' = t+1$ и неглавными собственными значениями $\eta_1 = 6, \eta_2 = -(t+1)$. По лемме 3.2 имеем $t \leq 13$. По условию целочисленности для Δ число $7+t$ делит $7t \cdot 8(t+1)$, поэтому $t \in \{1,5,7,9\}$.

Лемма 4.1. *Верно неравенство $t \neq 9$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s = 7$ и $t = 9$. Тогда окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами (512,70,6,10). По лемме 2.3 диаметр графа Γ не больше 13 ($2k/(\lambda+2) = 128/9$). Далее, μ делит $512 \cdot 441$, поэтому $\mu \in \{32,36,42,48,49,56,63,64\}$.

По лемме 2.2 имеем $\eta_2 \geq b^- = -1 - b_1/(\theta_1+1)$, $\eta_1 \leq b^+ = -1 - b_1/(\theta_d+1)$, где $\eta_1 = 6$, $\eta_2 = -10$, поэтому $\theta_1 \leq 48$ и $\theta_d \geq -64$.

Пусть a,b,c,d — геодезический 3-путь в Γ. Тогда между $[a] \cap [c]$ и $[c] \cap \Gamma_3(a)$ нет ребер и по лемме 2.1 имеем $b_2 \cdot \mu \leq (v'-b_2)(v'-\mu)(6-\eta_2)^2/(2k'-6-\eta_2)^2$. Поэтому $81 b_2 \cdot \mu \leq (512-b_2)(512-\mu)$.

В случае $\mu = 56$ имеем $b_2 \leq 46$, противоречие.

В случае $\mu = 32$ имеем $b_2 \leq 80$, число b_2 делится на 32 и $b_2 \in \{32,64\}$. Далее, $k_2 = 512 \cdot 441/32 = 7056$, $v_2 = 7569$, $b_1 = 441$, $\eta_1 = 6, \eta_2 = -10$. Если $d \geq 5$, то для шара радиуса 2 имеем $\bar{k} = k - b_2k_2/v_2 = 512 - 7056b_2/7569 \leq -b_1/(\eta_2+1) - 1 = 48$ и $b_2 \geq 7569 \cdot 464/7056$, противоречие. Значит, $d \leq 4$.

Аналогично $d \leq 4$ и в случаях $\mu \in \{36, 42, 48, 49\}$. Соответственно, b_2 не больше $71, 62, 54, 53$. Если $\mu = 36$, то $b_2 = 4s$, $9 \leq s \leq 17$, если $\mu = 42$, то $b_2 = 2s$, $21 \leq s \leq 31$, если $\mu = 48$, то $b_2 = 48$, если $\mu = 49$, то $b_2 = 49$ или $b_3 = 49$. В последнем случае $k_2 = 512 \cdot 9$, $c_3 \geq 170 - b_2$ и c_3 делит $512 \cdot 9b_2$.

Пусть $\mu = b_2 = 32$. Тогда $c_3 - b_3 \geq 72$, c_3 делит $512 \cdot 441$ и Γ имеет массив пересечений $\{512, 441, 32, b_3; 1, 32, c_3, c_4\}$.

Пусть $\mu = 32, b_2 = 64$. Тогда $c_3 - b_3 \geq 40$, c_3 делит $1024 \cdot 441$ и Γ имеет массив пересечений $\{512, 441, 64, b_3; 1, 32, c_3, c_4\}$.

Пусть $\mu = 36$. Тогда либо $b_2 = 36$, c_3 делит $512 \cdot 441$ и Γ имеет массив пересечений $\{512, 441, 36, b_3; 1, 36, c_3, c_4\}$, либо $b_2 = 12t$, $4 \leq t \leq 5$, $c_3 - b_3 \geq 36 - 12t + 72$, c_3 делит $512 \cdot 147t$ и Γ имеет массив пересечений $\{512, 441, 12t, b_3; 1, 36, c_3, c_4\}$.

Пусть $\mu = 42$. Тогда $b_2 = 2l$, $l \leq 31$, $c_3 - b_3 \geq 114 - b_2$, c_3 делит $512 \cdot 21l$ и Γ имеет массив пересечений $\{512, 441, 2l, b_3; 1, 42, c_3, c_4\}$.

Пусть $\mu = 48$. Тогда $b_2 = 48$, $c_3 - b_3 \geq 72$, c_3 делит $512 \cdot 441$ и Γ имеет массив пересечений $\{512, 441, 48, b_3; 1, 48, c_3, c_4\}$.

Пусть $\mu = 49$. Тогда либо $b_2 = 49$, c_3 делит $512 \cdot 441$ и Γ имеет массив пересечений $\{512, 441, 49, b_3; 1, 49, c_3, c_4\}$, либо $b_3 = 49$, $c_3 - 49 \geq 49 - b_2 + 72$, c_3 делит $512 \cdot 9b_2$ и Γ имеет массив пересечений $\{512, 441, b_2, 49; 1, 49, c_3, c_4\}$.

В любом случае $\theta_1 > 48$, противоречие.

Лемма 4.2. *Верно неравенство $t \neq 7$.*

Доказательство. Пусть $s = 7$ и $t = 7$. Тогда окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами (400,56,6,8). По лемме 2.3 диаметр графа Γ не больше 13 ($2k/(\lambda+2) = 400/29$). Далее, μ делит $400 \cdot 343$, поэтому $\mu \in \{16, 20, 25, 28, 35, 40, 49, 50, 56, 70, 80, 98, 100\}$.

По лемме 2.2 имеем $\eta_2 \geq b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $\eta_1 \leq b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$, где $\eta_1 = 6$, $\eta_2 = -8$, поэтому $\theta_1 \leq 48$ и $\theta_d \geq -50$.

Пусть a, b, c, d — геодезический 3-путь в Γ. Тогда между $[a] \cap [c]$ и $[c] \cap \Gamma_3(a)$ нет ребер и по лемме 2.1 имеем $b_2 \cdot \mu \leq (v' - b_2)(v' - \mu)(6 - \eta_2)^2/(2k' - 6 - \eta_2)^2$. Поэтому $57^2 b_2 \cdot \mu \leq (400 - b_2)(400 - \mu)7^2$.

В случае $\mu = 16$ имеем $b_2 \leq 106$, число b_2 делится на 16 и $b_2 \in \{16, 32, 48, 64, 80, 96\}$. Далее, $k_2 = 400 \cdot 343/16 = 8575$, $v_2 = 8976$, $b_1 = 343$, $\eta_1 = 6, \eta_2 = -8$. Если $d \geq 5$, то для шара радиуса 2 имеем $\bar{k} = k - b_2k_2/v_2 = 400 - 8575b_2/8976 \leq -b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 48$ и $b_2 \geq 8976 \cdot 352/8575$, противоречие. Значит, $d \leq 4$.

Аналогично $d \leq 4$ и в случаях $\mu = 20, 25, 28, 35, 40, 49$. Соответственно b_2 не больше $89, 73, 54, 54, 47, 39$. В последнем случае имеем противоречие. Если $\mu = 20$, то $b_2 = 20s$, $1 \leq s \leq 4$, если $\mu = 25$, то $b_2 = 25s$, $1 \leq s \leq 2$, если $\mu = 28$, то $b_2 = 4s$, $7 \leq s \leq 13$, если $\mu = 35$, то $b_2 = 5s$, $7 \leq s \leq 10$, если $\mu = 40$, то $b_2 = 40$.

Пусть $\mu = 16, b_2 = 16s$. Тогда $c_3 - b_3 \geq 74 - b_2$, c_3 делит $400 \cdot 343s$ и Γ имеет массив пересечений $\{400, 343, 16s, b_3; 1, 16, c_3, c_4\}$.

Пусть $\mu = 20, b_2 = 20s \leq 80$. Тогда $c_3 - b_3 \geq 78 - b_2$, c_3 делит $400 \cdot 343s$ и Γ имеет массив пересечений $\{400, 343, 20s, b_3; 1, 20, c_3, c_4\}$.

Пусть $\mu = 25, b_2 = 25s$. Тогда $c_3 - b_3 \geq 83 - b_2$, c_3 делит $400 \cdot 343s$ и Γ имеет массив пересечений $\{400, 343, 25s, b_3; 1, 25, c_3, c_4\}$.

Пусть $\mu = 28$. Тогда $b_2 = 4s$, $c_3 - b_3 \geq 86 - b_2$, c_3 делит $512 \cdot 63s$ и Γ имеет массив пересечений $\{400, 343, 4s, b_3; 1, 28, c_3, c_4\}$.

Пусть $\mu = 35, b_2 = 5s$, $c_3 - b_3 \geq 93 - b_2$, c_3 делит $512 \cdot 63s$ и Γ имеет массив пересечений $\{400, 343, 5s, b_3; 1, 35, c_3, c_4\}$.

Пусть $\mu = 40$. Тогда $b_2 = 40$, $c_3 - b_3 \geq 58$, c_3 делит $512 \cdot 343$ и Γ имеет массив пересечений $\{400, 343, 40, b_3; 1, 40, c_3, c_4\}$.

Компьютерный перебор показывает, что допустимых массивов пересечений нет.

Лемма 4.3. *Если* $t = 5$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{288, 245, 48, 1; 1, 24, 245, 288\}$ *или* $\{288, 245, 36, 1; 1, 36, 245, 288\}$.

Доказательство. Пусть $s = 7$ и $t = 5$. Тогда окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами (288,42,6,6). По лемме 2.3 диаметр графа Γ не больше 13 ($2k/(\lambda + 2) = 144/11$). Далее, μ делит $288{\cdot}245$, поэтому $\mu \in \{8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 35, 36\}$.

По лемме 2.2 имеем $\eta_2 \geq b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $\eta_1 \leq b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$, где $\eta_1 = 6$, $\eta_2 = -6$, поэтому $\theta_1 \leq 48$ и $\theta_d \geq -36$.

Пусть a, b, c, d — геодезический 3-путь в Γ. Тогда между $[a] \cap [c]$ и $[c] \cap \Gamma_3(a)$ нет ребер и по лемме 2.1 имеем $b_2{\cdot}\mu \leq (v'-b_2)(v'-\mu)(6-\eta_2)^2/(2k'-6-\eta_2)^2$. Поэтому $7^2 b_2{\cdot}\mu \leq (288-b_2)(288-\mu)$.

В случае $\mu = 8$ имеем $b_2 \leq 120$ и b_2 делится на 8. Далее, $k_2 = 288 \cdot 245/8 = 18 \cdot 490 = 8820$, $v_2 = 9109$, $b_1 = 245$, $\eta_1 = 6, \eta_2 = -6$. Если $d \geq 5$, то для шара радиуса 2 имеем $\bar{k} = k - b_2 k_2/v_2 = 288 - 8820 b_2/9109 \leq -b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 48$ и $b_2 \geq 9109 \cdot 240/8820$, противоречие. Значит, $d \leq 4$.

Аналогично, $d \leq 4$ и в случаях $\mu \in \{9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 35, 36\}$. Соответственно, b_2 не больше $\{111, 104, 92, 82, 78, 74, 67, 61, 59, 52, 45, 43, 40, 37, 36\}$.

Если $\mu = 9$, то $b_2 = 9l$, $1 \leq l \leq 12$, если $\mu = 10$, то $b_2 = 2l$, $5 \leq l \leq 52$, если $\mu = 12$, то $b_2 = 12l$, $1 \leq l \leq 7$, если $\mu = 14$, то $b_2 = 2l$, $7 \leq l \leq 41$, если $\mu = 15$, то $b_2 = 3l$, $5 \leq l \leq 26$, если $\mu = 16$, то $b_2 = 16l$, $1 \leq l \leq 4$.

Если $\mu = 18$, то $b_2 = 18l$, $1 \leq l \leq 3$, если $\mu = 20$, то $b_2 = 4l$, $5 \leq l \leq 15$, если $\mu = 21$, то $b_2 = 3l$, $7 \leq l \leq 19$, если $\mu = 24$, то $b_2 = 24l$, $1 \leq l \leq 2$, если $\mu = 28$, то $b_2 = 4l$, $7 \leq l \leq 10$, если $\mu = 30$, то $b_2 = 6l$, $5 \leq l \leq 7$, если $\mu = 32$, то $b_2 = 32$, если $\mu = 35$, то $35 \leq b_2 \leq 37$.

С помощью компьютерных вычислений доказано, что только следующие массивы пересечений являются допустимыми: $\{288, 245, 64, 1; 1, 8, 245, 288\}$, $\{288, 245, 63, 1; 1, 9, 245, 288\}$, $\{288, 245, 60, 1; 1, 12, 245, 288\}$, $\{288, 245, 54, 1; 1, 18, 245, 288\}$, $\{288, 245, 48, 1; 1, 24, 245, 288\}$, $\{288, 245, 36, 1; 1, 36, 245, 288\}$. В любом случае Γ является $AT4(6, 6, r)$-графом и по [6, теорема 2] имеем $r \in \{2, 3\}$.

Лемма 4.4. *Если* $t = 1$, *то* Γ *является графом Джонсона* $J(16, 8)$ *или его стандартным частным.*

Доказательство. Пусть $s = 7$ и $t = 1$. Тогда окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами (64,14,6,2) и являются 8×8-решетками. Далее, μ делит $64 \cdot 49$, поэтому $\mu \in \{4, 8, 14\}$.

По лемме 2.2 имеем $\eta_2 \geq b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $\eta_1 \leq b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$, где $\eta_1 = 6$, $\eta_2 = -2$, поэтому $\theta_1 \leq 48$ и $\theta_d \geq -8$.

Пусть a, b, c, d — геодезический 3-путь в Γ. Тогда между $[a] \cap [c]$ и $[c] \cap \Gamma_3(a)$ нет ребер и по лемме 2.1 имеем $b_2 \cdot \mu \leq (v'-b_2)(v'-\mu)(6-\eta_2)^2/(2k'-6-\eta_2)^2$. Поэтому $3^2 b_2 \cdot \mu \leq (64-b_2)(64-\mu)$.

В случае $\mu = 4$ граф Γ является графом Джонсона $J(16, 8)$ или его стандартным частным. В случае $\mu = 14$ имеем $b_2 = 1$ и диаметр графа не больше 3, противоречие. Пусть далее $\mu = 8$. Тогда $9b_2 \leq 7(64 - b_2)$ и $b_2 \leq 28$. С другой стороны, μ-подграф содержится в 4×4-подрешетке, поэтому $b_2 \leq 16$.

Пусть $b_2 = 8$. Тогда $c_3 - b_3 \geq 16$, c_3 делит $64{\cdot}49$ и Γ имеет массив пересечений $\{64, 49, 8, b_3; 1, 8, c_3, c_4\}$.

Пусть $b_2 = 16$. Тогда $c_3 - b_3 \geq 8$, c_3 делит $128{\cdot}49$ и Γ имеет массив пересечений $\{64, 49, 16, b_3; 1, 8, c_3, c_4\}$.

Компьютерный перебор показывает, что допустимых массивов пересечений нет. Лемма доказана.

Из лемм 4.1–4.4 следует теорема 2.

Авторы выражают благодарность А. А. Махневу и И. Н. Белоусову за помощь в подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 3-540-50619-5 .
2. **Гутнова А.К., Махнев А.А.** Расширения псевдогеометрических графов для $pG_{s-5}(s,t)$ // Владикавказ. мат. журн. 2016. Т. 18, № 3. С. 35–42.
3. **Махнев А.А., Шерметова М.Х.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 167–174. doi: 10.17377/semi.2018.15.016 .
4. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** Spectra of graphs Berlin etc: Springer, 2012. 250 p. doi: 10.1007/978-1-4614-1939-6 .
5. **Koolen J.H., Park J.** Distance-regular graphs with a_1 or c_2 at least half the valency // J. Comb. Theory. Ser. A. 2012. Vol. 119. P. 546–555. doi: 10.1016/j.jcta.2011.11.001 .
6. **Makhnev A.A., Paduchikh D.V.** Small $AT4$-graphs and strongly regular subgraphs corresponding to them // Proc. Steklov Institute Math. 2017. Vol. 296, Suppl. 1. P. S164–S174. doi: 10.1134/S0081543817020158 .

Биткина Виктория Васильевна
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель
Северо-Осетинский государственный университет,
г. Владикавказ
e-mail: bviktiriyav@mail.ru

Поступила 20.06.2018

Гутнова Алина Казбековна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Северо-Осетинский государственный университет,
г. Владикавказ
e-mail: gutnovaalina@mail.ru

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin etc: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 3-540-50619-5 .
2. Gutnova A.K., Makhnev A.A. Extensions of pseudogeometric graphs for $pG_{s-5}(s,t)$. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2016, vol. 18, no. 3, pp. 35–42 (in Russian).
3. Makhnev A.A., Shermetova M.Kh. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 167–174. doi: 10.17377/semi.2018.15.016 (in Russian).
4. Brouwer A.E., Haemers W.H. *Spectra of graphs.* Berlin etc: Springer, 2012, 250 p. doi: 10.1007/978-1-4614-1939-6 .
5. Koolen J.H., Park J. Distance-regular graphs with a_1 or c_2 at least half the valency. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 2012, vol. 119, pp. 546–555. doi: 10.1016/j.jcta.2011.11.001 .
6. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. Small $AT4$-graphs and strongly regular subgraphs corresponding to them. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2017, vol. 296, suppl. 1, pp. 167–174. doi: 10.1134/S0081543817020158 .

The paper was received by the Editorial Office on June 20, 2018.

Viktoriya Vasil'evna Bitkina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), North Ossetian State University, Vladikavkaz, North Ossetia-Alania, 362025 Russia, e-mail: bviktiriyav@mail.ru .

Alina Kazbekovna Gutnova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), North Ossetian State University, Vladikavkaz, North Ossetia-Alania, 362025 Russia, e-mail: gutnovaalina@mail.ru .