ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ГРУППЫ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННОЙ СПЛЕТЕННЫМИ ГРУППАМИ[1]

А. А. Шлепкин

Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Группа G называется группой Шункова (сопряженно бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. Пусть G — группа. Если все элементы конечных порядков из G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G и обозначается через $T(G)$. Как известно, группа Шункова не обязана обладать периодической частью. В работе доказано существование периодической части группы Шункова, насыщенной конечными сплетенными группами, и установлена ее структура.

Ключевые слова: группа, насыщенная множеством групп, группа Шункова.

A. A. Shlepkin. On a periodic part of a Shunkov group saturated with wreathed groups.

A group G is saturated with groups from a set of groups $\mathfrak{X}$ if any finite subgroup K of G is contained in a subgroup of G isomorphic to some group from $\mathfrak{X}$. A group G is called a Shunkov group (a conjugately biprimitively finite group) if, for any finite subgroup H of G, any two conjugate elements of prime order in the quotient group $N_G(H)/h$ generate a finite group. Let G be a group. If all elements of finite orders from G are contained in a periodic subgroup of G, then it is called a periodic part of G and is denoted by $t(G)$. It is known that a Shunkov group may have no periodic part. The existence of a periodic part of a Shunkov group saturated with finite wreathed groups is proved and the structure of the periodic part is established.

Keywords: group saturated with a set of groups, Shunkov group.

MSC: 20K01

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-281-285

1. Введение

Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Множество $\mathfrak{X}$ будем называть *насыщающим множеством для* G [1].

Условие насыщенности не предполагает периодичности группы G, поэтому вопрос о расположении элементов конечного порядка в группе G с условием насыщенности приходится решать отдельно для каждой конкретной группы.

Группа G называется *группой Шункова* (*сопряженно бипримитивно конечной группой*), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [2].

Как показано в [3], группа Шункова не обязана обладать периодической частью (если все элементы конечных порядков из группы G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется *периодической частью группы* G и обозначается через $T(G)$ [4, с. 90]). В статье [5] получена структура периодической группы Шункова, насыщенной сплетенными группами (под *сплетенной группой* будем понимать конечную группу $G = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где A — циклическая группа, $B = A^v, v$ — инволюция). Однако вопрос о существовании периодической части и ее строении для групп Шункова, насыщенных сплетенными группами, в ней не обсуждался. Эта проблема исследуется в настоящей статье.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-31-00257).

Теорема. *Пусть G — группа Шункова, насыщенная сплетенными группами. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$ и $T(G) = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где A — локально циклическая группа, v — инволюция, $A^v = B$.*

Ниже приведем обозначения, используемые в работе.

Пусть G — группа, K — подгруппа G, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 — единичная подгруппа группы G, то $\mathfrak{X}_G(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно, о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$, соответственно вместо $\mathfrak{X}_G(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.

Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Запись $G \,\widetilde{\in}\, \mathfrak{X}$ означает, что G изоморфна некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Соответственно запись $G \,\widetilde{\notin}\, \mathfrak{X}$ означает, что G не изоморфна никакой группе из $\mathfrak{X}$.

2. Доказательство теоремы

Предположим обратное, и пусть G — контрпример. Определим множество сплетенных групп $\mathfrak{M} = \{((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle t \rangle\}$, где $|t| = 2$, $|a| < \infty, a^t = b$ и $|a|$ не фиксируется.

Лемма 1. *G содержит бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Предположим обратное. По лемме Дицмана [6] и определению периодической части группа G обладает конечной периодической частью $T(G)$. По условию насыщенности $T(G) \,\widetilde{\in}\, \mathfrak{M}$. Противоречие с тем, что G — контрпример. □

Лемма 2. *Без ограничения общности можно считать, что G не содержит элементов нечетного порядка.*

Доказательство. Пусть $a \in G$, $|a| = p$ — простое нечетное число. Так как G — группа Шункова, $\langle a, a^g \rangle$ — конечная группа. По условию теоремы $\langle a, a^g \rangle < K \in \mathfrak{M}(\langle a, a^g \rangle)$. Следовательно, $K \simeq (\langle c \rangle \times \langle d \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где $c^v = d$, $v^2 = e$. Значит, $\langle a, a^g \rangle < (\langle c \rangle \times \langle d \rangle)$. Последнее означает, что $\langle a^G \rangle$ — абелева нормальная подгруппа в G. Отсюда и из определения группы Шункова нетрудно показать, что все элементы нечетных порядков образуют в G абелеву нормальную подгруппу N. Фактор-группа $\overline{G} = G/N$ является группой Шункова (см. [7, предложение 5; 8, следствие 2.4.4]), все элементы конечного порядка которой суть 2-элементы. Кроме того, $\overline{G}$ насыщена сплетенными 2-группами. Если $\overline{G}$ обладает периодической частью $T(\overline{G})$, то $T(\overline{G})$ — локально конечная группа [5]. По [4, теорема 23.1.1] полный прообраз $T(\overline{G})$ в G есть локально конечная группа, совпадающая с $T(G)$. Несложно видеть, что $T(G)$ насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. По [5] подгруппа $T(G)$ — из утверждения теоремы. Противоречие. Итак, $\overline{G}$ не обладает периодической частью. Положим $G = \overline{G}$. □

Лемма 3. *Пусть R — группа Шункова с бесконечным числом элементов конечного порядка, в которой все элементы конечного порядка являютя 2-элементами. Тогда для любой конечной подгруппы $K < R$ найдется такая конечная подгруппа $H < R$, что $K < H < R$.*

Доказательство. По лемме 1 данной статьи, лемме 1 из [9], предложению 9 из [7] все силовские 2-подгруппы в R бесконечны. Следовательно, в R найдется бесконечная 2-подгруппа M, содержащая подгруппу K. По [10, предложение 4] $N_M(K) \neq K$. Возьмем $b \in N_M(K) \setminus K$. Тогда $\langle b, K \rangle = H$ — требуемая конечная подгруппа группы R. □

Лемма 4. *Для любой конечной подгруппы $K < G$ найдется такая подгруппа $M < G$, что $K < M$ и*

$$M = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle,$$

где A — квазициклическая группа, $A^v = B$, v — инволюция.

Доказательство. По лемме 2 G — группа Шункова, все элементы конечного порядка которой являются 2-элементами. По лемме 3 $K < H < G, |H| < \infty$. По условию насыщенности $H < K_1, K_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Применяя указанную процедуру, строим бесконечную цепочку конечных подгрупп группы G $K < K_1 < \cdots < K_i < \cdots$ такую, что $K_i \mathrel{\widetilde{\in}} \mathfrak{M}(1)$ для любого значения индекса i. Положим $M = \cup K_i$. Ясно, что M — локально конечная группа с насыщающим множеством $\{K_i\}$. По [5] $M = (A \times B) \leftthreetimes \langle v \rangle$, где A — квазициклическая группа, $A^v = B$, v — инволюция. □

Лемма 5. *Пусть M — группа из леммы 4. Тогда для любого натурального n в G найдется подгруппа $M_1 \neq M$ такая, что $M_1 \simeq M$ и $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) < M_1 \cap M$, где $|a| = |b| = 2^n$.*

Доказательство. Возьмем инволюции $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, $x \in G \setminus M$. Ясно, что $\langle a_1, x \rangle = L_1$ — конечная группа [7, предложение 4]. Положим $D_1 = M \cap L_1$. Возьмем элемент $x_1 \in N_{L_1}(D_1) \setminus D_1$ такой, что $x_1^2 \in D_1$. Возьмем инволюцию $a_1 b_1 = z \in Z(M)$. Так как G — группа Шункова, то $\langle z, x_1, D_1 \rangle = L_2$ — конечная группа. Ясно, что $L_2 \not< M$. Положим $D_2 = L_2 \cap M$. Тогда $(\langle a_1 \rangle \times \langle z \rangle) = (\langle a_1 \rangle \times \langle b_1 \rangle) < D_2 = L_2 \cap M$.

Возьмем в D_2 максимальную подгруппу вида $(\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle)$, где $a_n \in A$, $b_n \in B$, со свойством

$$(\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) < (A \times B).$$

По лемме 4 $L_1 < M_1 \simeq M$. Если $k \leq n$, то все доказано. Пусть $n < k$ и для определенности a_{n+1} — такой элемент из A, что $a_{n+1}^2 = a_n$, b_{n+1} — такой элемент из B, что $b_{n+1}^2 = b_n$ и $a_{n+1} \notin D_2$. Ясно, что либо $a_{n+1} \notin D_2$, либо $b_{n+1} \notin D_2$ (так как в противном случае

$$(\langle a_{n+1} \rangle \times \langle b_{n+1} \rangle) < (A \times B) \cap D_2,$$

что невозможно ввиду выбора $\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle$). Пусть для определенности $a_{n+1} \notin D_2$. Если $D_2 < A \times B$, то $a_{n+1} \in N_G(D_2)$. Если нет, то $a_{n+1} b_{n+1} = z \in N_{A \times B}(D_2)$, $z \notin D_2$, но $z^2 = a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 = a_n b_n \in D_2$. Таким образом, всегда найдется элемент $g \in N_{(A \times B)}(\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle)$ такой, что $g^2 \in (\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle)$. Возьмем элемент $x_2 \in N_{L_2}(D_2) \setminus D_2$ такой, что $x_1^2 \in D_2$. Поскольку G — группа Шункова, то $\langle g, x_2, D_2 \rangle = L_3$ — конечная группа. Ясно, что $L_3 \not< M$. Положим $D_3 = L_3 \cap M$. Предположим, что

$$(\langle a_{n+1} \rangle \times \langle b_{n+1} \rangle) \not< D_3.$$

С другой стороны, всегда

$$\langle (\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle), g \rangle < D_3.$$

Если $D_3 < A \times B$, то $g = a_{n+1}$. Элемент $z = a_{n+1} b_{n+1} \in N_{A \times B}(D_3)$, и $z^2 \in D_3$, но $z \notin D_3$. Возьмем элемент $x_3 \in N_{L_3}(D_3) \setminus D_3$ такой, что $x_3^2 \in D_3$. Так как G — группа Шункова, то $\langle z, x_3, D_3 \rangle = L_4$ — конечная группа. Ясно, что $L_4 \not< M$. Положим $D_4 = L_4 \cap M$. Тогда

$$(\langle a_{n+1} \rangle \times \langle z \rangle) = (\langle a_{n+1} \rangle \times \langle b_{n+1} \rangle) < D_4 = L_4 \cap M.$$

По лемме 4 $L_4 < M_4 \simeq M$.

Если $D_3 \not< A \times B$, то $g = z = a_{n+1} b_{n+1}$. Элемент $a_{n+1} \in N_{A \times B}(D_3)$, и $a_{n+1}^2 \in D_3$, но $a_{n+1} \notin D_3$. Действительно, если $y \in (A \times B)$, то $y^{a_{n+1}} = y$, а для любого элемента $y \in D_3 \setminus (A \times B), y = hv$, где $h \in D_3 \cap (A \times B)$,

$$y^{a_{n+1}} = (hv)^{a_{n+1}} = h^{a_{n+1}} v^{a_{n+1}} = hv^{a_{n+1}} = h a_{n+1}^{-1} v a_{n+1} = h a_{n+1}^{-1} v a_{n+1} v v$$

$$= h a_{n+1}^{-1} b_{n+1} v = h a_{n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_{n+1} b_{n+1} v = a_{n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_{n+1} b_{n+1} hv = (a_{n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_{n+1} b_{n+1}) y.$$

Но $a_{n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} = z^{-2} \in (A \times B) \cap D_3$, $b_{n+1} b_{n+1} = b_{n+1}^2 = b_n \in (A \times B) \cap D_3$. Следовательно,

$$y^{a_{n+1}} = (a_{n+1}^{-1} b_{n+1}^{-1} b_{n+1} b_{n+1}) y \in D_3).$$

Возьмем элемент $x_3 \in N_{L_3}(D_3) \setminus D_3$ такой, что $x_3^2 \in D_3$. Так как G — группа Шункова, то $\langle a_{n+1}, x_3, D_3\rangle = L_4$ — конечная группа. Ясно, что $L_4 \not< M$. Положим $D_4 = L_4 \cap M$. Тогда

$$(\langle a_{n+1}\rangle \times \langle z\rangle) = (\langle a_{n+1}\rangle \times \langle b_{n+1}\rangle) \ < D_4 = L_4 \cap M.$$

По лемме 4 $L_4 < M_4 \simeq M$. Если $k = n+1$, то все доказано. Если нет, то, повторяя указанный выше процесс конечное число раз, получаем утверждение леммы. □

Лемма 6. *Пусть $M = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle$ — группа из условия леммы 4, a_1 — инволюция из A, b_1 — инволюция из B, $R = \langle a_1\rangle \times \langle b_1\rangle$. Тогда $C_G(R)$ обладает периодической частью $T(C_G(R))$ и $T(C_G(R)) = A \times B$.*

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа из $C_G(R)$. Тогда $K_1 = \langle R,\ K\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $K_1 < K_2 \widetilde{\in} \mathfrak{M}$. Ясно, что $C_{K_2}(R)$ — абелева группа. Поскольку $K_1 < C_{K_2}(R)$, то K_1 — абелева группа. Следовательно, $C_G(R)$ обладает насыщающим множеством, состоящим из конечных абелевых групп. По [7, предложение 7] $C_G(R)$ обладает периодической частью $T(C_G(R))$, которая является локально конечной абелевой группой 2-ранга 2. Так как $(A \times B) < C_G(R)$, то $T(C_G(R)) = A \times B$. □

Лемма 7. *Пусть R — группа из условия леммы 6. Тогда $N_G(R)$ обладает периодической частью $T(N_G(R))$ и $T(N_G(R)) = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle$ — группа из условия леммы 4.*

Доказательство. Ввиду леммы 6 $N_G(R)$ обладает характеристической подгруппой $A \times B$. Фактор-группа $\overline{N_G(R)} = N_G(R)/(A \times B)$ — группа Шункова (см. [7, предложение 5; 8, следствие 2.4]). Покажем, что все элементы из $\overline{N_G(R)}$ являются инволюциями. Действительно, пусть $\overline{y}$ — элемент порядка 4 из $\overline{N_G(R)}$, а y — его прообраз в $N_G(R)$. Так как G — 2-группа, то $y^2 \in T(C_G(R) = A \times B$. Таким образом, $\overline{y}^2 = 1$. Поскольку в группе Шункова произведение двух инволюций есть элемент конечного порядка, а G — 2-группа, то $T(\overline{N_G(R)}) = \langle v\rangle N_G(R) = \langle\overline{v}\rangle$. Следовательно, $T(N_G(R)) = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle$. □

Завершим доказательство теоремы. Пусть $M = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle$ — группа из условия леммы 4. По лемме 5 для любого натурального k в G найдется подгруппа $M_1 \neq M$ такая, что $M_1 \simeq M$ и $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \ < \ M_1 \cap M$, где $|a| = |b| = 2^k$. Следовательно, $M_1 = (A_1 \times B_1) \leftthreetimes \langle v_1\rangle$, где A_1 — квазициклическая 2-группа, $A_1^{v_1} = B_1$, v_1 — инволюция и для $k > 4$

$$R_1 < (A \times B) \cap (A_1 \times B_1).$$

По лемме 7 $M = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle = (A_1 \times B_1) \leftthreetimes \langle v_1\rangle = M_1$. Противоречие с выбором M_1. □

Заключение

При исследовании групп с условиями насыщенности важное место занимает класс групп Шункова. Отдельная проблема состоит в исследовании групп Шункова, насыщенных конечными группами лиева типа, а также другими классами конечных групп. В группах лиева типа (и не только) очень часто встречаются подгрупповые конструкции, являющиеся сплетенными группами. Таким образом, полученный результат будет востребован при исследовании групп Шункова с условиями насыщенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шлепкин А.К.** Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // 3-я Междунар. конф. по алгебре: сб. тез. Красноярск, 1993. С. 369.
2. **Шунков В.П., Сенашов В.И.** Группы с условиями конечности. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2001. 326 с. ISBN: 5-7692-0439-7.

3. **Череп А.А.** О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 518–521.
4. **Каргаполов П.Л., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
5. **Шлепкин А.А.** Периодические группы, насыщенные сплетенными группами // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. № 10. С 56–64.
6. **Дицман А.П.** О центре p-групп // Тр. семинара по теории групп. Москва, 1938. С. 30–34.
7. **Шлепкин А.А.** Группы Шункова, насыщенные линейными и унитарными группами степени 3 над полями нечетных порядков // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Vol. 13. P. 341–351.
8. **Шлепкин А.К.** Группы Шункова с дополнительными ограничениями: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 1999. 187 с.
9. **Шлепкин А.К.** О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1983. Vol. 22. P. 226–231.
10. **Лыткина Д.В., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А.** О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 395–400.

Шлепкин Алексей Анатольевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт космических и информационных технологий
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
e-mail: shlyopkin@gmail.com

Поступила 5.06.2018

REFERENCES

1. Shlepkin A.K. Conjugately biprimitive finite groups containing finite unsolvable subgroups. In: *Abstracts. III International conf. on algebra (Krasnoyarsk, 1993)*, p. 369 (in Russian).
2. Senashov V.I., Shunkov V.P. *Gruppy s usloviyami konechnosti.* [Groups with finiteness conditions]. Novosibirsk: Izdatel'stvo Rossiiskoi Akademii Nauk, Sibirskoe Otdelenie, 2001, 336 p. ISBN: 5-7692-0439-7 .
3. Cherep A.A. Set of elements of finite order in a biprimitively finite group. *Algebra and Logic*, 1987, vol. 26, no. 4, pp. 311–313. doi: 10.1007/BF01980245 .
4. Kargapolov M.I., Merzljakov Ju.I. *Fundamentals of the theory of groups.* N Y; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1979, Ser. Graduate Texts in Mathematics, vol. 62, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0 . Original Russian text (3rd ed.) published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp*, Moscow, Nauka Publ., 1982, 288 p.
5. Shlepkin A.A. Periodic groups, saturated by wreathed groups. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2013, vol. 10, pp. 56–64 (in Russian) .
6. Ditsman A.P. On the center of p-groups. *Proceedings of the seminar on group theory.* Moscow, 1938, pp. 30–34.
7. Shlepkin A.A. On Shunkov groups, saturated with linear and unitary groups of dimension 3 over fields of odd orders. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 341–351 (in Russian) . doi: 10.17377/semi.2016.13.029 .
8. Shlepkin A.K. *Gruppy Shunkova s dopolnitel'nymi ogranicheniyami. doktorskaya dissertatsiya.* [Shunkov groups with additional restrictions. Doctoral dissertation]. Krasnoyarsk, 1999, 187 p.
9. Shlepkin A.K. Conjugately biprimitively finite groups with the primary minimal condition. *Algebra Logic*, 1983, vol. 22, no. 2, pp. 165–169. doi: 10.1007/BF01978669 .
10. Lytkina D.V., Tukhvatullina L.R., Filippov K.A. *Sib. Math. J.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 317–321. doi: 10.1007/s11202-008-0031-y .

The paper was received by the Editorial Office on Juny 5, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336).

Aleksei Anatolievich Shlepkin, Cand. Sci (Phys.-Math.), Institute of Space and Information Technologies of Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660074 Russia, e-mail: shlyopkin@gmail.com .