ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 517.53

НЕРАВЕНСТВО ПЛАНШЕРЕЛЯ — ПОЛИА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В $L^2(\mathbb{R}^n)$[1]

Е. В. Берестова

Пусть $\mathfrak{M}^p_{\sigma,n}$, $p>0$, есть множество целых функций f от n комплексных переменных, имеющих экспоненциальный тип $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, $\sigma_k>0$, сужение которых на $\mathbb{R}^n$ принадлежит $L^p(\mathbb{R}^n)$. В 1937 г. Планшерель и Полиа показали, что справедливо неравенство $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|f(k)|^p\leqslant c_p(\sigma,n)\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, $f\in\mathfrak{M}^p_{\sigma,n}$, с конечной константой $c_p(\sigma,n)$. В работе изучается неравенство Планшереля — Полиа при $p=2$. Если $0<\sigma_k\leqslant\pi$, то в силу теоремы отсчетов Уиттекера — Котельникова — Шеннона и ее обобщения на многомерный случай, установленного Планшерелем и Полиа, $c_2(\sigma,n)=1$ и любая функция $f\in\mathfrak{M}^2_{\sigma,n}$ является экстремальной. В общем случае в работе доказано, что $c_2(\sigma,n)=\prod_{k=1}^n\lceil\sigma_k/\pi\rceil$, и описан класс экстремальных функций. Также выписана двойственная задача $\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(g*g)(k)\right|\leqslant d_2(\sigma,n)\|g\|_2^2$, $g\in L^2(\Omega)$. Доказано равенство $c_2(\sigma,n)=d_2(\sigma,n)$ и описан класс экстремальных функций.

Ключевые слова: неравенство Планшереля – Полиа, пространство Пэли – Винера, целая функция экспоненциального типа, преобразование Фурье.

E. V. Berestova. Plancherel–Pólya inequality for entire functions of exponential type in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Let $\mathfrak{M}^p_{\sigma,n}$, $p>0$, be a set of entire functions f of n complex variables with exponential type $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, $\sigma_k>0$, such that their restrictions to $\mathbb{R}^n$ belong to $L^p(\mathbb{R}^n)$. In 1937 Plancherel and Pólya showed that $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|f(k)|^p\leqslant c_p(\sigma,n)\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ for $f\in\mathfrak{M}^p_{\sigma,n}$, where $c_p(\sigma,n)$ is a finite constant. We study the Plancherel–Pólya inequality for $p=2$. If $0<\sigma_k\leqslant\pi$, then, by the Whittaker–Kotelnikov–Shannon theorem and its generalization to the multidimensional case established by Plancherel and Pólya, we have $c_2(\sigma,n)=1$ and any function $f\in\mathfrak{M}^2_{\sigma,n}$ is extremal. In the general case, we prove that $c_2(\sigma,n)=\prod_{k=1}^n\lceil\sigma_k/\pi\rceil$ and describe the class of extremal functions. We also write the dual problem $\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(g*g)(k)\right|\leqslant d_2(\sigma,n)\|g\|_2^2$, $g\in L^2(\Omega)$, prove that $c_2(\sigma,n)=d_2(\sigma,n)$, and describe the class of extremal functions.

Keywords: Plancherel–Pólya inequality, Paley–Wiener space, entire function of exponential type, Fourier transform.

MSC: 30D10, 30D15, 42A99

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-27-33

1. Введение

Пусть $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ есть вектор с неотрицательными координатами $\sigma_k\geqslant 0$. Целая функция $f(z)$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, имеет экспоненциальный тип σ [1, п. 3.1; 2, Ch. 4.1], если для любого $\varepsilon>0$ существует положительная константа A_ε такая, что

$$|f(z)|\leqslant A_\varepsilon\exp\Big(\sum_{k=1}^n(\sigma_k+\varepsilon)|z_k|\Big),\quad z\in\mathbb{C}^n.$$

Для $0<p<\infty$ обозначим через $\mathfrak{M}^p_{\sigma,n}$ множество целых функций f экспоненциального типа σ со свойством

$$\|f\|_p^p=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx<\infty.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (Постановление Правительства РФ № 211 от 16 марта 2013 г., соглашение № 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

Если $\sigma = (a, \ldots, a)$, то для $\mathfrak{M}^p_{\sigma,n}$ будем также использовать обозначение $\mathfrak{M}^p_{a,n}$. Неравенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|^p \leqslant c_p(\sigma, n)\|f\|_p^p, \quad f \in \mathfrak{M}^p_{\sigma,n}, \tag{1.1}$$

известно как неравенство Планшереля — Полиа. В работе мы хотим найти наименьшую возможную константу $c_2(\sigma, n)$ и экстремальные функции в неравенстве (1.1) для $p = 2$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|^2 \leqslant c_2(\sigma, n)\|f\|_2^2, \quad f \in \mathfrak{M}^2_{\sigma,n}. \tag{1.2}$$

Задача о точной константе в неравенстве (1.1) была поставлена профессором Г. Тамбергом из Таллиннского технического университета в личной беседе с П. Ю. Глазыриной из Уральского федерального университета.

Классическая теорема отсчетов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для $n = 1$ [3, § 20.2, Theorem 1] и ее обобщение, доказанное Планшерелем и Полиа для $n > 1$ [4, n° 24, (52), p. 116], утверждают, что для всех σ со свойством $\sigma_k \leqslant \pi$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и функции $f \in \mathfrak{M}^2_{\sigma,n}$ справедливо равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx. \tag{1.3}$$

Как следствие,

$$c_2(\sigma, n) = 1 \ \text{ при } \ 0 < \sigma_k \leqslant \pi, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{1.4}$$

и неравенство (1.2) обращается в равенство для любой функции $f \in \mathfrak{M}^2_{\sigma,n}$. Аналогичный результат справедлив для функции $f \in \mathfrak{M}^{2p}_{\sigma,n}$, $p \in \mathbb{N}$, $0 < \sigma_k \leqslant \pi/p$ (см. теорему 3). Таким образом, мы должны изучить случай, когда $\sigma_k > \pi$ хотя бы для одного k.

М. Планшерель и Г. Полиа [4, n° 47, (127), p. 149; n° 48, (132), p. 152] установили конечность величины $c_p(\sigma, n)$ для всех $p > 0$. Для $1 < p < \infty$ и $0 \leqslant \sigma_k \leqslant \pi$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ они доказали интерполяционную формулу

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k) \frac{\sin(\pi(z_1 - k_1))}{\pi(z_1 - k_1)} \cdots \frac{\sin(\pi(z_n - k_n))}{\pi(z_n - k_n)}, \tag{1.5}$$

где ряд (1.5) сходится к f в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$, и, кроме того, сходится ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|^p$.

Планшерель и Полиа [4, n° 31, p. 126], Р. П. Боас [5], Д. Л. Донохо и Б. Ф. Логан [6], С. Норвидас [7] и другие авторы изучали более общие задачи. В частности, для $n = 1$ вместо значений $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ рассматривались значения $\{f(\lambda_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, в точках равномерно дискретной последовательности $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, т. е. $\inf_{k\neq m} |\lambda_k - \lambda_m| > 0$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$. В работах Боаса, Донохо и Логана сумма в левой части неравенства (1.1) заменялась на интеграл от $|f(x)|^p$ по некоторой мере.

Для $\lambda_k = k$ Планшерель и Полиа [4, n° 31, (76), (77), p. 126] получили оценку

$$c_p(\sigma, 1) \leqslant \frac{8}{\pi} \frac{e^{pc/2} - 1}{pc}, \quad 0 < p < \infty, \tag{1.6}$$

где c — кардинальный рост функции f; оценка (1.6) влечет неравенство.

$$c_p(\sigma, 1) \leqslant \frac{8}{\pi} \frac{e^{p\sigma/2} - 1}{p\sigma}, \quad 0 < p < \infty.$$

Результат Норвидаса [7, Theorem 1] при $\lambda_k = k$ может быть записан в виде[2]

$$c_p(\sigma, 1) \leqslant \frac{[\delta] + 1}{2\delta \|\cos(\sigma\delta\cdot)\|^p_{L^p[0,1/2]}}, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \tag{1.7}$$

[2]Здесь и далее $[x]$ – наибольшее целое число, не превышающее x, а $\lceil x\rceil$ – наименьшее целое число, которое больше или равно x. Отметим, что $[x] \leqslant x \leqslant \lceil x\rceil$.

где $\sigma > 0$ и $\delta \in (0, \pi/\sigma)$ — произвольное число. Для $p = 2$ и $p = 1$ оценка (1.7) принимает вид

$$c_2(\sigma, 1) \leqslant \frac{2\sigma([\delta]+1)}{\sigma\delta + \sin(\sigma\delta)}, \qquad c_1(\sigma, 1) \leqslant \frac{\sigma([\delta]+1)}{2\sin(\sigma\delta/2)}. \tag{1.8}$$

Отношения (1.8) также следуют из более ранней работы Донохо и Логана [6, Theorems 4, 7].

Отметим также оценку С. М. Никольского [1, Ch. 3.3; 8, § 1]

$$c_p(\sigma, n) \leqslant \Big(\prod_{k=1}^{n}(1+\sigma_k)\Big)^p, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

и работу Д. С. Любинского [9], который изучал связь между неравенством (1.1) и неравенством Марцинкевича – Зигмуда для алгебраических многочленов.

Найдем инфимум оценки (1.8) относительно δ для $p = 2$ и $\sigma > \pi$. В соответствии с вышеприведенными предположениями $0 < \delta < \pi/\sigma < 1$; следовательно, $[\delta] = 0$. Функция $x + \sin x$ возрастает, отсюда

$$c_2(\sigma, 1) \leqslant \lim_{\delta \to (\pi/\sigma)^-} \frac{2\sigma}{\sigma\delta + \sin(\sigma\delta)} = \lim_{\delta \to (\pi/\sigma)^-} \frac{2}{\delta\Big(1 + \dfrac{\sin(\sigma\delta)}{\sigma\delta}\Big)} = \frac{2\sigma}{\pi}.$$

Отметим, что если $f \in \mathfrak{M}^p_{0,n}$, то f тождественно равна нулю [1, Ch. 3.2.2; 10]. Потому, естественно рассматривать только $\sigma_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Определим преобразование Фурье функции $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ как

$$\mathcal{F}g(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i (z,x)}\, dx.$$

Оператор преобразования Фурье в пространствах $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$ обозначим $\mathcal{F}$. Для $m \in \mathbb{R}^n$ оператор сдвига τ_m определим по формуле

$$\tau_m g(\cdot) = g(\cdot - m).$$

Для формулировки результатов нам необходимо ввести дополнительные обозначения.

Рассмотрим множества индексов

$$I_o = \{k \mid \lceil \sigma_k/\pi \rceil = 2s_k + 1,\ s_k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad I_e = \{k \mid \lceil \sigma_k/\pi \rceil = 2s_k,\ s_k \in \mathbb{N}\}.$$

По множествам I_o и I_e построим вектор сдвига

$$t = (t_1, \ldots, t_n), \qquad t_k = \begin{cases} 0, & k \in I_o; \\ 1/2, & k \in I_e, \end{cases}$$

и множество

$$M = M_1 \times \ldots \times M_n, \qquad M_k = \begin{cases} \{-s_k, \ldots, s_k\}, & k \in I_o; \\ \{-s_k, \ldots, s_k - 1\}, & k \in I_e. \end{cases}$$

Также положим $\Omega = \prod_{k=1}^n \left[-\sigma_k/(2\pi), \sigma_k/(2\pi)\right]$.

Теорема 1. *Для $n \in \mathbb{N}$ и для всех σ со свойством $\sigma_k > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)|^2 \leqslant \prod_{k=1}^n \lceil \sigma_k/\pi \rceil \, \|f\|_2^2, \quad f \in \mathfrak{M}^2_{\sigma,n}. \tag{1.9}$$

Неравенство (1.9) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда $f = \mathcal{F}g$, где*

$$g(x) = \sum_{m \in M} h(x - m - t), \quad h \in L^2\Big(\prod_{k=1}^n [-\nu_k, \nu_k]\Big), \quad \nu_k = \frac{1}{2}(1 - (\lceil \sigma_k/\pi \rceil - \sigma_k/\pi)). \tag{1.10}$$

Наряду с неравенством (1.2) мы изучаем неравенство

$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(g*g)(k)\Big| \leqslant d_2(\sigma,n)\|g\|_2^2, \quad g\in L^2(\Omega), \tag{1.11}$$

с наилучшей константой $d_2(\sigma,n)$. Используя свойства преобразования Фурье, можно показать, что $d_2(\sigma,n)\leqslant c_2(\sigma,n)$ (см. лемму ниже).

Теорема 2. *Для всех σ со свойством $\sigma_k>0$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ справедливо равенство*

$$d_2(\sigma,n)=c_2(\sigma,n).$$

Неравенство (1.11) обращается в равенство тогда и только тогда, когда функция g удовлетворяет условию (1.10) и для некоторого $\theta\in\mathbb{R}$ соответствующая функция h обладает свойством $h(x)=\overline{h(-x)}e^{i\theta}$ для почти всех $x\in\prod_{k=1}^n[-\nu_k,\nu_k]$.

В одномерном случае теоремы 1, 2 установлены в работе [11].

2. Доказательство теоремы 1

Согласно теореме Пэли — Винера [12, Ch. III, Theorem 4.1; 2, Ch. III, § 4, p. 156] функция $f\in\mathfrak{M}^2_{\sigma,n}$ есть преобразование Фурье функции $g\in L^2(\Omega)$, т. е. $f=\mathcal{F}g$ и [12, Ch. I, Theorems 2.3, 2.4]

$$\|f\|_2=\|\mathcal{F}g\|_2=\|g\|_2. \tag{2.1}$$

Поскольку $[-\sigma_k/(2\pi),\sigma_k/(2\pi)]\subset[-s_k-1/2+t_k,\, s_k+1/2-t_k]$, $1\leqslant k\leqslant n$, функцию f можно представить в виде

$$f(z)=\sum_{m\in M}\mathcal{F}g_m(z)=\sum_{m\in M}\mathcal{F}h_m(z)e^{-2\pi i(m+t,z)}, \tag{2.2}$$

где g_m есть сужение функции g на $\Omega_m=\prod_{i=1}^n[m_i+t_i-1/2,\, m_i+t_i+1/2]$ и h_m — сдвиг функции g_m на $-m-t$, т. е.

$$g_m=g\big|_{\Omega_m}, \quad h_m(z)=\tau_{-(m+t)}g_m(z)=g_m(z+m+t).$$

Таким образом, $\operatorname{supp}h_m\subset[-1/2,1/2]^n$ и $\mathcal{F}h_m\in\mathfrak{M}^2_{\pi,n}$ для всех $m\in M$.

Применяя неравенство Коши [13, Ch. 2.4, Theorem 6], равенства (1.3) и (2.1), мы получаем оценку

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|f(k)|^2&=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big|\sum_{m\in M}(\mathcal{F}h_m)(k)e^{-2\pi i(m+t,k)}\Big|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big|e^{-2\pi i(t,k)}\sum_{m\in M}(\mathcal{F}h_m)(k)\Big|^2\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\Big|\sum_{m\in M}(\mathcal{F}h_m)(k)\Big|^2\leqslant\prod_{k\in I_o}(2s_k+1)\prod_{k\in I_e}(2s_k)\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\sum_{m\in M}|(\mathcal{F}h_m)(k)|^2\\&=\prod_{k=1}^n\lceil\sigma_k/\pi\rceil\sum_{m\in M}\|\mathcal{F}h_m\|_2^2=\prod_{k=1}^n\lceil\sigma_k/\pi\rceil\sum_{m\in M}\|h_m\|_2^2\\&=\prod_{k=1}^n\lceil\sigma_k/\pi\rceil\sum_{m\in M}\|g_m\|_2^2=\prod_{k=1}^n\lceil\sigma_k/\pi\rceil\,\|g\|_2^2=\prod_{k=1}^n\lceil\sigma_k/\pi\rceil\,\|f\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Следовательно, $c_2(\sigma,n)\leqslant\prod\limits_{k=1}^n\lceil\sigma_k/\pi\rceil$.

Исследуем случай равенства в (2.3). Неравенство (2.3) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}h_m(k) = \mathcal{F}h_0(k)$ для всех $m \in M$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Поскольку $\mathcal{F}h_m \in \mathfrak{M}^2_{\pi,n}$, формула (1.5) дает $\mathcal{F}h_m = \mathcal{F}h_0$, и, следовательно,

$$h_m = h_0 = g_0, \quad m \in M. \tag{2.4}$$

Остается сделать следующее наблюдение. Носитель g_m содержится в $\Omega_m \cap \Omega$. Это пересечение можно записать в виде $\Omega_m \cap \Omega = \prod_{k=1}^n I_{m,k}$, $I_{m,k} = [a_{m,k}, b_{m,k}]$. Определим $\overline{m}_k = \max M_k$ и $\underline{m}_k = \min M_k$. Если у вектора m ни одна из координат не равна $\overline{m}_k$ или $\underline{m}_k$, то $\Omega_m \subset \Omega$. Если $m_k = \overline{m}_k$, то $I_{m,k} = [s_k - t_k - 1/2,\, \sigma_k/(2\pi)]$, если $m_k = \underline{m}_k$, то $I_{m,k} = [-\sigma_k/(2\pi),\, -s_k + t_k + 1/2]$. Из этих соотношений получаются условия на носитель h_m:

$$\operatorname{supp} h_m \subset \prod_{k=1}^n \Big[-\frac{\sigma_k}{2\pi} + s_k - t_k, \frac{\sigma_k}{2\pi} - s_k + t_k\Big] = \prod_{k=1}^n [-\nu_k, \nu_k], \quad m \in M.$$

Подставляя равенства (2.4) в (2.2) и принимая во внимание последнее условие, мы видим, что неравенство (1.9) обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \sum_{m \in M} (\mathcal{F}h_0(\cdot - m - t))(z),\ h_0 \in L^2\Big(\prod_{k=1}^n [-\nu_k, \nu_k]\Big).$$

Доказательство завершено.

3. Доказательство теоремы 2

В этом разделе мы установим связь между неравенствами (1.2) и (1.11) и докажем теорему 2.

Лемма. *Пусть $\sigma_k > 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Тогда следующее равенство справедливо для всякой функции $g \in L^2(\Omega)$ и $f = \mathcal{F}g$:*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (g * g)(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f^2(k), \text{ где } (g * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(t) g(x - t)\,dt. \tag{3.1}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 из [11] при замене $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n$.

По лемме, если функция $f = \mathcal{F}g$, то

$$\Big|\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (g * g)(k)\Big| = \Big|\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f^2(k)\Big| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)|^2 \leqslant c_2(\sigma, n)\|f\|_2^2 = c_2(\sigma, n)\|g\|_2^2; \tag{3.2}$$

следовательно, $d_2(\sigma, n) \leqslant c_2(\sigma, n)$.

Доказательство теоремы. Начнем с доказательства равенства $d_2(\sigma, n) = c_2(\sigma, n)$. Действительно, рассмотрим произвольную функцию g, удовлетворяющую (1.10), и такую, что соответствующая функция h является четной и вещественной. Тогда g также есть четная и вещественная функция, и, следовательно, $f(x) = \mathcal{F}g(x)$ вещественна для $x \in \mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что все неравенства в (3.2) обращаются в равенство; таким образом, $c_2(\sigma, n) = d_2(\sigma, n)$. Более того, мы видим, что если g есть экстремальная функция в (1.11), то $f = \mathcal{F}g$ является экстремальной функцией в (1.2). Таким образом, любая экстремальная функция в (1.11) должна удовлетворять условию (1.10).

Предположим теперь, что функция g удовлетворяет (1.10). Поскольку $\operatorname{supp} h \subset [-1/2, 1/2]^n$, то

$$\left(h(\cdot - m - t) * h(\cdot - \ell - t)\right)(k) = \begin{cases} (h * h)(0), & k = m + \ell, \\ 0, & k \neq m + \ell. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(g*g)(k)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\sum_{m\in M}\sum_{\ell\in M}\left(h(\cdot-m-t)*h(\cdot-\ell-t)\right)(k)$$

$$=\sum_{m\in M}\sum_{\ell\in M}\left(h(\cdot-m-t)*h(\cdot-\ell-t)\right)(m+\ell)=\Big(\prod_{k=1}^{n}\lceil\sigma_k/\pi\rceil\Big)^2(h*h)(0).$$

Неравенство Гельдера дает оценку

$$|(h*h)(0)|=\left|\int\limits_{\prod_{k=1}^n[-\nu_k,\nu_k]}h(x)h(-x)dx\right|\leqslant\|h\|_2^2,$$

которая превращается в равенство тогда и только тогда, когда для некоторого $\theta\in\mathbb{R}$ функция h удовлетворяет равенству $h(x)=\overline{h(-x)}e^{i\theta}$ для почти всех $x\in\prod_{k=1}^n[-\nu_k,\nu_k]$. В результате

$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(g*g)(k)\Big|=\Big(\prod_{k=1}^{n}\lceil\sigma_k/\pi\rceil\Big)^2|(h*h)(0)|\leqslant\Big(\prod_{k=1}^{n}\lceil\sigma_k/\pi\rceil\Big)^2\|h\|_2^2=\prod_{k=1}^{n}\lceil\sigma_k/\pi\rceil\,\|g\|_2^2,\qquad(3.3)$$

и неравенство (3.3) обращается в равенство, если функция h удовлетворяет сформулированному выше условию. Доказательство завершено.

В заключение приведем простое следствие из (1.3) для четных показателей.

Теорема 3. *Пусть* p, $n\in\mathbb{N}$. *Для всех* σ *со свойством* $0<\sigma_k\leqslant\pi/p$ $(1\leqslant k\leqslant n)$, *выполняется равенство* $c_{2p}(\sigma,n)=1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функции $f\in\mathfrak{M}^{2p}_{\sigma,n}$ и $g=f^p$. Ясно, что g имеет экспоненциальный тип $p\sigma$ и принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $p\sigma_k\leqslant\pi$ $(1\leqslant k\leqslant n)$, то для g справедливо равенство (1.4) и, значит, $c_{2p}(\sigma,n)=c_2(p\sigma,n)=1$. Доказательство завершено.

Автор благодарит профессора Г. Тамберга за постановку задачи, а также П. Ю. Глазырину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
2. **Gel'fand I. M., Shilov G. E.** Generalized functions: Spaces of fundamental and generalized functions. N Y, London: Acad. Press, 1968. 261 p.
3. **Levin B. Ya.** Lectures on entire functions. Providence, Rhode Island: American Math. Soc., 1996. 248 p.
4. **Plancherel M., Pólya G.** Fontions entières et intégrales de Fourier multiples // Commentarii Mathematici Helvetici. 1937–1938. Vol. 10. P. 110–163.
5. **Boas R. P., Jr** Entire functions bounded on a line // Duke Math. J. 1940. No. 6. P. 148–169. doi: 10.1215/S0012-7094-40-00613-5 .
6. **Donoho D. L., Logan B. F.** Signal recovery and the large sieve // SIAM J. Appl. Math. 1992. Vol. 52, no. 2. P. 577–591. doi: 10.1137/0152031 .
7. **Norvidas S.** Concentration of L^p-bandlimited functions on discrete sets // Lithuanian Math. J. 2014. Vol. 54, no. 4. P. 471–481. doi: 10.1007/s10986-014-9258-4 .
8. **Никольский С. М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН. 1951. Т. 38. С. 244–278.
9. **Lubinsky D. S.** On sharp constants in Marcinkiewicz – Zygmund and Plancherel – Polya inequalities // Proc. American Math. Soc. 2014. Vol. 142, no. 10. P. 3575–3584. doi: 10.1090/S0002-9939-2014-12270-2 .
10. **Pólya G.** Über ganze Funktionen vom Minimaltypus der Ordnung 1, Aufgabe 105 // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung. 1931. Vol. 40. P. 9–12.

11. **Berestova E. V.** Plancherel – Pólya inequality for entire functions of exponential type in $L^2(\mathbb{R})$ // Analysis Math. 2018. Vol. 44, no. 1. P. 43–50. doi: 10.1007/s10476-018-0104-5 .
12. **Stein E., Weiss G.** Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton: Princeton University Press, 1971. 297 p.
13. **Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G.** Inequalities. Cambridge: Cambridge University Press, 1934. 340 p.

Берестова Екатерина Владимировна
младший науч. сотрудник
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: e.v.berestova@urfu.ru

Поступила 23.06.2018

REFERENCES

1. Nikol'skii S.M. *Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems.* Berlin; N Y: Springer-Verlag, 1975, 420 p. doi: 10.1007/978-3-642-65711-5 . Original Russian text (2nd ed.) published in Nikol'skii S.M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 456 p.
2. Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Generalized functions: Spaces of fundamental and generalized functions.* N Y; London: Acad. Press, 1968, 261 p. ISBN: 9781483262307 .
3. Levin B.Ya. *Lectures on entire functions.* Providence: American Math. Soc., 1996, 248 p. ISBN: 0-8218-0282-8 .
4. Plancherel M., Pólya G. Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1937, vol. 10, no. 1, pp. 110–163. doi: 10.1007/BF01214286 .
5. Boas R.P., Jr. Entire functions bounded on a line. *Duke Math. J.*, 1940, no. 6, pp. 148–169. doi: 10.1215/S0012-7094-40-00613-5 .
6. Donoho D.L., Logan B.F. Signal recovery and the large sieve. *SIAM J. Appl. Math.*, 1992, vol. 52, no. 2, pp. 577–591. doi: 10.1137/0152031 .
7. Norvidas S. Concentration of L^p-bandlimited functions on discrete sets. *Lithuanian Math. J.*, 2014, vol. 54, no. 4, pp. 471–481. doi: 10.1007/s10986-014-9258-4 .
8. Nikol'skii S.M. Inequalities for entire functions of finite degree and their application to the theory of differentiable functions of several variables. In: Azarin V.S. et al (eds.), *Thirteen papers on functions of real and complex variables.* Providence: American Math. Soc., 1969, 278 p. (pp. 1–38.) ISBN: 978-1-4704-3291-1 .
9. Lubinsky D.S. On sharp constants in Marcinkiewicz–Zygmund and Plancherel–Pólya inequalities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2014, vol. 142, no. 10, pp. 3575–3584. doi: 10.1090/S0002-9939-2014-12270-2 .
10. Pólya G. Über ganze Funktionen vom Minimaltypus der Ordnung 1, Aufgabe 105. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 1931, vol. 40, pp. 9–12.
11. Berestova E. V. Plancherel – Pólya inequality for entire functions of exponential type in $L^2(\mathbb{R})$. *Analysis Math.*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 43–50. doi: 10.1007/s10476-018-0104-5 .
12. Stein E., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1971, 297 p. ISBN: 9780691080789 .
13. Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. *Inequalities.* Cambridge: Cambridge University Press, 1934, 340 p. ISBN(2nd ed.): 0-521-05206-8 .
14. Folland G.B. *A Course in Abstract Harmonic Analysis.* London; Tokyo: CRC Press, 1995, 305 p. ISBN: 0849384907 .

The paper was received by the Editorial Office on June 23, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Ekaterina Vladimirovna Berestova, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: e.v.berestova@urfu.ru .