ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 519.176

АЛГОРИТМ ДЛЯ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ЦИКЛОВОМ ПОКРЫТИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА КОЛИЧЕСТВО И ДЛИНУ ЦИКЛОВ[1]

В. В. Шенмайер

Цикловым покрытием графа называется остовный подграф, компоненты связности которого являются простыми циклами. Рассматривается труднорешаемая задача отыскания в полном взвешенном ориентированном графе циклового покрытия максимального веса, которое удовлетворяет верхнему ограничению на количество входящих в него циклов и нижнему ограничению на количество дуг в каждом цикле. Предложен полиномиальный алгоритм решения этой задачи в геометрическом случае, когда вершины заданного графа являются точками в многомерном вещественном пространстве, а расстояния между ними индуцированы положительно однородной функцией, единичный шар которой является произвольным выпуклым политопом с фиксированным числом фасет. Полученный результат развивает идеи, лежащие в основе известного алгоритма для полиэдральной задачи коммивояжера на максимум.

Ключевые слова: цикловое покрытие, задача коммивояжера, полиэдральная метрика, оптимальное решение, полиномиальный алгоритм.

V. V. Shenmaier. An algorithm for the polyhedral cycle cover problem with restrictions on the number and length of cycles.

A cycle cover of a graph is a spanning subgraph whose connected components are simple cycles. Given a complete weighted directed graph, consider the intractable problem of finding a maximum-weight cycle cover which satisfies an upper bound on the number of cycles and a lower bound on the number of edges in each cycle. We suggest a polynomial-time algorithm for solving this problem in the geometric case when the vertices of the graph are points in a multidimensional real space and the distances between them are induced by a positively homogeneous function whose unit ball is an arbitrary convex polytope with a fixed number of facets. The obtained result extends the ideas underlying the well-known algorithm for the polyhedral Max TSP.

Keywords: cycle cover, Max TSP, polyhedral metric, optimal solution, polynomial-time algorithm.

MSC: 05C38, 05C70, 05C85, 68R05, 90B06, 90B10, 90C27

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-272-280

Введение

Цикловым покрытием графа называется остовный подграф этого графа, каждая компонента связности которого является простым циклом. Рассматривается следующая задача.

З а д а ч а “Maximum-weight directed (c,k)-cycle cover” (Max-(c,k)-DCC).
Даны: полный ориентированный граф $G=(V,E)$ с заданными весами дуг и натуральные числа c и k. Найти цикловое покрытие C графа G с максимальным суммарным весом дуг, удовлетворяющее ограничениям:

(P1) количество циклов в C не превосходит c;

(P2) количество дуг в каждом цикле из C не меньше k.

Одним из ее частных случаев является задача “Maximum-weight directed k-cycle cover” (Max-k-DCC), которая заключается в поиске оптимального циклового покрытия, удовлетворяющего ограничению (P2). Другим известным случаем является задача коммивояжера на максимум (Max TSP), соответствующая комбинации $c=1$, $k=n$, где $n=|V|$.

В статье исследуется версия задачи Max-(c,k)-DCC, в которой вершины графа G являются точками в пространстве $\mathbb{R}^d$, а веса дуг индуцированы *полиэдральной метрикой*. Под этим

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект 16-11-10041).

понимается, что для некоторого набора векторов $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^d$ вес каждой дуги $(x, y) \in E$ равен величине

$$P(z) = \max\{\langle z, v_1\rangle, \dots, \langle z, v_m\rangle\},$$

где $z = y - x$ и $\langle .\,, .\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$. Отметим, что функция P удовлетворяет аксиомам несимметричных полунорм: неравенству треугольника и положительной однородности. Если выполнены остальные аксиомы векторных норм (тождества и симметрии), функция P называется *полиэдральной нормой*. Наиболее известными примерами таких норм являются нормы ℓ_1 и ℓ_∞. В общем случае единичным шаром несимметричной полунормы P является произвольный, возможно, несимметричный и неограниченный выпуклый политоп, содержащий начало координат и имеющий не более m фасет.

Известные результаты. Задача Max-k-DCC полиномиально разрешима при $k = 2$ [9] и APX-трудна при любом $k \geq 3$, даже если веса дуг графа G принадлежат множеству $\{1, 2\}$ [5]. В случае симметричных весов, когда вес каждой дуги (x, y) равен весу дуги (y, x), задача Max-k-DCC называется задачей “Maximum-weight undirected k-cycle cover” (Max-k-UCC). Эта задача полиномиально разрешима при $k = 3$ и $k = 4$ (по крайней мере, для булевых весов), NP-трудна, если $k \geq 5$, и APX-трудна при любом $k \geq 7$, даже если веса всех дуг равны 1 и 2 (см. обзор и результаты из [5]). Приближенные алгоритмы с константными оценками точности для задачи Max-k-DCC предложены, в частности, в [5; 10].

Задача Max TSP также является APX-трудной в случае и симметричных, и несимметричных весов, даже если они принадлежат множеству $\{1, 2\}$ (см. [7]). Приближенные алгоритмы с константными оценками точности для этой задачи предложены в [8; 11] и цитируемых в этих статьях работах. Заметим, что задача Max TSP остается NP-трудной, если веса дуг графа G индуцированы евклидовой нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$ (см. [4]). Однако в [1] получен асимптотически точный алгоритм для случая евклидовых пространств любой фиксированной размерности. В [3] этот алгоритм обобщен на случай произвольных норм. Отсюда следует, что в случае фиксированной размерности пространства геометрическая задача Max TSP может быть аппроксимирована с помощью приближенной схемы PTAS.

Отметим, что любой n-вершинный граф с симметричными весами дуг, равными 1 и 2, может быть представлен в виде графа, вершины которого являются точками в пространстве $\mathbb{R}^n$, а веса дуг индуцированы нормой ℓ_∞ (см., например, [13], секция 3.2). Таким образом, обе задачи Max-k-DCC и Max TSP являются APX-трудными в пространствах с полиэдральной нормой, если число фасет m ее единичного шара равно $O(n)$.

В [2] предложен алгоритм приближенного решения полиэдральной задачи Max TSP с точностью $1 - (\lfloor m/2 \rfloor - 1)/n$. Отсюда следует, что эта задача может быть решена за полиномиальное время с любой заданной точностью, если число фасет m равно $o(n)$. Аналогичный результат получен для задачи о нескольких реберно непересекающихся гамильтоновых циклах максимального веса (Max-c-PSP) [12]. Наконец, в [4] предложен алгоритм точного решения задачи Max TSP в пространствах с полиэдральной несимметричной полунормой с фиксированным числом фасет. Трудоемкость алгоритма равна величине $O(n^{2m-2} \log n)$. В случае симметричных весов трудоемкость алгоритма сокращается до величины $O(n^{m-2} \log n)$.

Результат статьи. В статье показано, что алгоритм для полиэдральной задачи Max TSP из [4] может быть модифицирован для решения более общей задачи Max-(c, k)-DCC. Если веса дуг графа G индуцированы полиэдральной несимметричной полунормой с фиксированным числом фасет, то предложенный алгоритм позволяет получать точное решение этой задачи за полиномиальное время, несущественно отличающееся от трудоемкости алгоритма из [4].

Идея алгоритма заключается в следующем. Нетрудно показать, что полиэдральная задача Max-(c, k)-DCC, как и задача Max TSP, сводится к аналогичной задаче с так называемой *тоннельной метрикой*, которая эквивалентна задаче нахождения подграфа максимального веса с определенным набором свойств в мультиграфе соответствующей тоннельной транспортной системы (см. разд. 1 и 2). При фиксированном m поиск такого подграфа сводится к полиномиальному множеству полиномиально разрешимых задач о нахождении подграфа с заданными степенями вершин. Отличие предложенного алгоритма от алгоритма для задачи Max TSP из [4] состоит в более общем наборе свойств, характеризующих искомый подграф в терминах тоннельных систем (см. леммы 1 и 2), и более широком множестве вспомогательных задач для поиска этого подграфа (см. замечание 2).

1. Тоннельные метрики

Как показано в [4], функция расстояния, индуцированная полиэдральной несимметричной полунормой P, является частным случаем *несимметричной тоннельной метрики*, определяемой по правилу

$$\operatorname{dist}(x, y) = \max\{F(i, x) + B(i, y) \mid i = 1, \dots, p\}, \tag{1}$$

где $x, y \in V$, p — натуральное число, F и B — произвольные вещественные функции на множестве $\{1, \dots, p\} \times V$. Действительно, легко видеть, что $P(y - x) = \operatorname{dist}(x, y)$ в случае, когда $p = m$, $F(i, x) = \langle x, -v_i \rangle$ и $B(i, x) = \langle x, v_i \rangle$ для всех $x \in V$ и $i = 1, \dots, p$. Моделью для несимметричной тоннельной метрики является следующая транспортная система. Представим, что вершины графа G связаны между собой не напрямую, а через дополнительные промежуточные объекты $t_i, \dots, t_p$, называемые *тоннелями*. Каждый тоннель t_i соединен с каждой вершиной $x \in V$ ребрами $f(i, x)$ и $b(i, x)$ с весами $F(i, x)$ и $B(i, x)$ соответственно. Для наглядности можно считать, что первое ребро выходит из одного входа тоннеля (“forward”), второе — из другого (“backward”). Для каждой дуги $(x, y) \in E$ допустимым переходом из x в y считается один из маршрутов вида $(x, f(i, x), t_i, b(i, y), y)$, $i = 1, \dots, p$, с максимальным суммарным весом двух входящих в него ребер, что соответствует функции (1).

Если функция P обладает свойством симметрии, т. е. является полунормой в пространстве $\mathbb{R}^d$, и при этом ее единичный шар имеет m фасет, то она может быть представлена в виде

$$P(z) = \max\{\langle z, v_1 \rangle, \dots, \langle z, v_{m/2} \rangle, \langle z, -v_1 \rangle, \dots, \langle z, -v_{m/2} \rangle\}$$

для некоторых векторов $v_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, m/2$. Отсюда следует, что функция расстояния, индуцированная полунормой P, является частным случаем *симметричной тоннельной метрики*, определяемой по правилу

$$\operatorname{dist}(x, y) = \max\{F(i, x) + B(i, y),\ F(i, y) + B(i, x) \mid i = 1, \dots, p\}. \tag{2}$$

Действительно, если положить $p = m/2$, $F(i, x) = \langle x, -v_i \rangle$ и $B(i, x) = \langle x, v_i \rangle$ для всех $x \in V$ и $i = 1, \dots, p$, то величина $P(y - x)$ становится равной $\operatorname{dist}(x, y)$. Моделью для симметричной тоннельной метрики является транспортная система, в которой имеется $m/2$ тоннелей, а допустимым переходом между вершинами x и y считается один из маршрутов вида $(x, f(i, x), t_i, b(i, y), y)$ и $(x, b(i, x), t_i, f(i, y), y)$, $i = 1, \dots, p$, с максимальным суммарным весом двух входящих в него ребер, что соответствует функции (2).

Далее будет доказана следующая теорема.

Теорема. *Если для некоторой константы p и некоторых вещественных функций F и B на множестве $\{1, \dots, p\} \times V$ веса дуг графа G определяются равенством* (1)*, то оптимальное решение задачи* Max-(c, k)-DCC *может быть найдено за время $O(n^{2p-2} \log n)$. Такое же время требуется для решения задачи* Max-(c, k)-DCC *в случае, когда веса дуг графа G определяются равенством* (2).

Следствие. *Если веса дуг графа G индуцированы полиэдральной несимметричной полунормой с фиксированным числом фасет m, то задача* Max-(c, k)-DCC *разрешима за время $O(n^{2m-2} \log n)$. В случае симметричных весов время решения задачи равно $O(n^{m-2} \log n)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы будет описано для случая симметричной метрики (2). В случае метрики (1) доказательство теоремы повторяет доказательство для симметричного случая за исключением незначительных отличий, описанных в замечании 3 в конце разд. 3.

2. Характеризация допустимых решений в терминах тоннельных систем

Предположим, что веса дуг графа G индуцированы симметричной тоннельной метрикой, определяемой равенством (2). Обозначим через G' двудольный неориентированный мультиграф соответствующей тоннельной транспортной системы, описанной в предыдущем разделе. Вершинами мультиграфа G' являются вершины исходного графа G и тоннели t_i, $i = 1, \dots, p$. Для удобства изложения вершины графа G будем называть *городами*. Ребрами мультиграфа G' являются ребра $f(i,x)$ и $b(i,x)$, соединяющие каждый тоннель t_i, $i = 1, \dots, p$, с каждым городом $x \in V$. Вес ребер $f(i,x)$ и $b(i,x)$ равен $F(i,x)$ и $B(i,x)$ соответственно. В дальнейшем будем считать, что мультиграф G' содержит две копии каждого из этих ребер.

Лемма 1. *Пусть C — цикловое покрытие графа G со свойствами $(P1)$, $(P2)$. Тогда существует подграф C' мультиграфа G' такой, что вес C' равен весу C и выполнены свойства*:
(Q1) *для каждого города $x \in V$ степень x в C' равна* 2;
(Q2) *для каждого $i = 1, \dots, p$ число ребер вида $f(i,.)$ в C' равно числу ребер вида $b(i,.)$*;
(Q3) *количество компонент связности в C' не превосходит c*;
(Q4) *сумма степеней тоннелей в каждой компоненте связности в C' не меньше $2k$.*

Доказательство. Подграф C' может быть построен следующим образом. Для каждой дуги (x,y), принадлежащей цикловому покрытию C, найдем индекс $i \in \{1, \dots, p\}$, на котором достигается равенство (2). Если $\mathrm{dist}(x,y) = F(i,x) + B(i,y)$, то добавляем в C' ребра $f(i,x)$ и $b(i,y)$. Если $\mathrm{dist}(x,y) = F(i,y) + B(i,x)$, то добавляем в C' ребра $f(i,y)$ и $b(i,x)$. Поскольку каждая вершина x графа G инцидентна ровно двум дугам из C, в C' войдет не более двух копий каждого из ребер $f(i,x)$, $b(i,x)$. Следовательно, полученный мультиграф C' — действительно подграф мультиграфа G'. По выбору добавляемых ребер вес C' равен весу C. Свойства (Q1)–(Q4) легко следуют из способа построения подграфа C' и свойств (P1), (P2) циклового покрытия C. □

Лемма 2. *Пусть C' — подграф мультиграфа G' со свойствами* (Q1)–(Q4). *Тогда существует и может быть найдено за время $O(n^2)$ цикловое покрытие C графа G такое, что вес C не меньше веса C' и выполнены свойства* (P1), (P2).

Доказательство. Согласно свойствам (Q1), (Q2) каждая компонента связности S подграфа C' является связным мультиграфом с четными степенями вершин. Тогда согласно базовым фактам из теории графов в S существует эйлеров цикл E_S, который может быть найден за время $O(m_S)$, где m_S — длина цикла E_S.

Покажем, что цикл E_S можно перестроить таким образом, что если он последовательно проходит ребро g, тоннель t и ребро h, то g и h принадлежат разным типам ребер $f(.,.)$ и $b(.,.)$. Действительно, с учетом того что G' — двудольный мультиграф, последовательность ребер E_S можно записать в виде $(g_1, h_1, g_2, h_2, \dots)$, где g_i, h_i — ребра цикла, следующие после i-го пройденного города. Если для некоторого номера i ребра g_i, h_i являются ребрами одного типа — для определенности, типа $f(.,.)$, то с учетом свойства (Q2) для некоторого номера j ребра g_j, h_j должны принадлежать типу $b(.,.)$ и проходить через тот же тоннель, что и ребра g_i, h_i. Не нарушая общности, можно считать, что $j > i$. Заменив сегмент $(h_i, g_{i+1}, \dots, h_{j-1}, g_j)$ цикла E_S на инвертированный сегмент $(g_j, h_{j-1}, \dots, g_{i+1}, h_i)$, получим эйлеров цикл с меньшим количеством пар однотипных ребер между соседними городами. Проделав аналогичную замену для всех таких пар, получим искомый эйлеров цикл. Трудоемкость этой операции оценивается величиной $O(m_S^2)$, следовательно, общее время выполнения таких операций для всех компонент связности равно $O(n^2)$.

Пусть C_S — цикл в исходном графе G, проходящий через города компоненты S в той же последовательности, что и полученный описанным образом эйлеров цикл E_S. Заметим, что каждая пара следующих друг за другом ребер g, h между соседними городами в цикле E_S

образует маршрут вида (x, g, t_i, h, y), где $x, y \in V$, $i \in \{1, \ldots, p\}$. Поскольку g и h принадлежат разным типам ребер $f(.,.)$ и $b(.,.)$, их суммарный вес равен либо $F(i,x) + B(i,y)$, либо $F(i,y) + B(i,x)$, что в любом случае не превосходит величины $\mathrm{dist}(x,y)$. Отсюда следует, что вес цикла C_S не меньше веса цикла E_S.

Пусть C — совокупность циклов вида C_S для всех компонент связности S в C'. Тогда в силу свойства (Q1) эта совокупность является цикловым покрытием графа G и согласно вышесказанному вес C не меньше веса C'. В силу свойства (Q4) для каждой компоненты S число ребер в цикле E_S не меньше $2k$, следовательно, число городов в цикле C_S не меньше k. Наконец, согласно свойству (Q3) количество компонент связности в C', и тем самым в C, не превосходит c. Таким образом, выполнены оба свойства (P1) и (P2). $\square$

З а м е ч а н и е 1. Леммы 1 и 2 обобщают аналогичные утверждения о характеризации гамильтоновых циклов (случай $c = 1$, $k = n$), доказанные в [4]. В этом случае свойства (Q3), (Q4) равносильны требованию связности подграфа C'.

3. Алгоритм решения задачи Max-(c, k)-DCC

Согласно леммам 1 и 2 доказательство теоремы сводится к построению эффективного алгоритма поиска в мультиграфе G' подграфа C' максимального веса, удовлетворяющего свойствам (Q1)–(Q4).

Идея предлагаемого алгоритма аналогична идее алгоритма для тоннельной задачи Max TSP из [4] и может быть описана следующим образом. Поскольку количество тоннелей ограничено константой, существует полиномиальное число вариантов для степеней тоннелей в искомом подграфе C'. Более того, поскольку тоннели образуют одну из долей двудольного мультиграфа G', существует полиномиальное число подграфов, один из которых целиком содержится в C' и обеспечивает необходимое количество компонент связности в C'. Алгоритм основан на переборе всех возможных вариантов таких связывающих подграфов и всех вариантов степеней тоннелей в C'. Для каждого выбранного варианта нахождение множества ребер подграфа C' сводится к полиномиально разрешимой задаче поиска подграфа максимального веса с заданными степенями вершин в двудольном мультиграфе.

Работу алгоритма можно разбить на следующие этапы. На этапах 1–3 осуществляется перебор всех возможных подграфов, обеспечивающих необходимое количество компонент связности в C', а также перебор степеней тоннелей с учетом выполнимости свойства (Q4). На этапе 4 производится поиск подграфа максимального веса, который содержит выбранный связывающий подграф и соответствует выбранным степеням тоннелей.

Э т а п 1: выбор множества тоннелей, входящих в C'.
Вначале выберем непустое подмножество $T' \subseteq \{t_1, \ldots, t_p\}$, являющееся множеством тоннелей подграфа C'. Количество таких подмножеств равно $2^p - 1$. Для удобства изложения перенумеруем тоннели таким образом, что $T' = \{t_1, \ldots, t_q\}$ для некоторого $q \le p$.

Э т а п 2: выбор подграфа, связывающего тоннели.
По построению мультиграфа G' каждый тоннель t_i и каждый город x соединены в нем 4 ребрами: по две копии ребер $f(i,x)$ и $b(i,x)$. Следовательно, каждые два тоннеля связаны между собой N маршрутами длины 2, где $N = 16n$. Определим мультиграф $\Delta(T')$, вершинами которого являются тоннели из T', а множество ребер определяется путем включения в него по N копий ребер, соединяющих каждую пару тоннелей $t_i, t_j \in T'$ и соответствующих различным маршрутам длины 2 между этими тоннелями в G'.

Выберем один из остовных лесов τ мультиграфа $\Delta(T')$, содержащих не более c компонент связности, и построим подграф C_τ мультиграфа G', состоящий из ребер маршрутов длины 2 в этом мультиграфе, соответствующих ребрам леса τ. Легко видеть, что всякий подграф со свойством (Q1) на множестве вершин $V \cup T'$ в мультиграфе G' содержит не более c компонент связности тогда и только тогда, когда этот подграф включает один из подграфов вида C_τ. Количество описанных остовных лесов в мультиграфе $\Delta(T')$ и, следовательно, соответствующих им подграфов C_τ в мультиграфе G' не превосходит величины $\phi(p)N^{p-1}$, где $\phi(p)$ — количество остовных лесов на p помеченных вершинах. Из формулы Кэли о количестве остовных деревьев [6] следует, что $\phi(p) \le (p+1)^{p-1}$.

Э т а п 3: выбор степеней тоннелей в C'.
Согласно свойству (Q2) степени всех тоннелей в подграфе C' четны. Для каждого тоннеля $t_i \in T'$ выберем ненулевую степень $2d_i$ этого тоннеля в C'. С учетом свойства (Q1) набор чисел $d_1, \ldots, d_q$ должен удовлетворять равенству $d_1 + \cdots + d_q = n$. Следовательно, количество таких наборов не превосходит величины n^{p-1}. Для $i = q+1, \ldots, p$ тоннели t_i не инцидентны ребрам из C', поэтому положим $d_i = 0$.

Легко видеть, что во всяком подграфе C' со свойством (Q1) на множестве вершин $V \cup T'$ в мультиграфе G' выполнены также свойства (Q3), (Q4) тогда и только тогда, когда в C' существует подграф описанного выше вида C_τ такой, что

$$\sum \{d_i \mid t_i \text{ входит в } S\} \ge k \qquad (3)$$

для каждой компоненты связности S в C_τ. В связи с этим для дальнейшего рассмотрения оставим только те наборы $d_1, \ldots, d_q$, что удовлетворяют неравенству (3).

Э т а п 4: поиск оптимального множества ребер подграфа C'.
Обозначим через $C'(T', \tau, d_1, \ldots, d_q)$ подграф C максимального веса в мультиграфе G', обладающий свойствами:

(C1) для каждого города $x \in V$ степень x в C равна 2;

(C2) для каждого $i = 1, \ldots, p$ число ребер каждого из двух типов $f(.,.)$ и $b(.,.)$, инцидентных в C тоннелю t_i, равно d_i, если $i \le q$, либо нулю в противном случае;

(C3) в C содержатся все ребра подграфа C_τ.

Тогда наблюдения, лежащие в основе предыдущих этапов алгоритма, можно сформулировать в следующем виде.

Лемма 3. *Для любого непустого подмножества тоннелей T', любого остовного леса τ в мультиграфе $\Delta(T')$, содержащего не более c компонент связности, и любого набора положительных целых чисел $d_1, \ldots, d_q$, удовлетворяющего равенству $d_1 + \cdots + d_q = n$ и неравенству* (3), *подграф $C'(T', \tau, d_1, \ldots, d_q)$ обладает свойствами* (Q1)–(Q4) *и один из таких подграфов имеет максимальный вес среди всех подграфов, обладающих свойствами* (Q1)–(Q4). □

Задачу построения подграфа $C'(T', \tau, d_1, \ldots, d_q)$ можно записать в форме задачи о подграфе максимального веса с заданными степенями вершин. Для каждого $i = 1, \ldots, p$ обозначим через $d_i^f(C_\tau)$ (соответственно, через $d_i^b(C_\tau)$) количество ребер типа $f(.,.)$ (типа $b(.,.)$) в подграфе C_τ, инцидентных тоннелю t_i. Определим двудольный мультиграф G'', получающийся из G' удалением городов, входящих в C_τ, и разделением каждого тоннеля t_i, $i = 1, \ldots, p$, на две вершины f_i и b_i с заменой ребер вида $f(i,x)$ и $b(i,x)$, $x \in V$, на ребра того же веса, соединяющие город x с вершинами f_i и b_i соответственно. Рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а “Maximum-weight degree-constrained subgraph” (Max DCS).
Дано: определенный выше мультиграф G'' и наборы чисел d_i, $d_i^f(C_\tau)$ и $d_i^b(C_\tau)$, $i = 1, \ldots, p$. Найти подграф C'' максимального веса в мультиграфе G'' такой, что

(D1) для каждого города x мультиграфа G'' степень x в C'' равна 2;

(D2) для каждого $i = 1, \ldots, p$ степени вершин f_i и b_i в C'' равны $d_i - d_i^f(C_\tau)$ и $d_i - d_i^b(C_\tau)$ соответственно.

Легко видеть, что подграф $C'(T', \tau, d_1, \ldots, d_q)$ состоит из ребер подграфа C_τ и ребер, соответствующих ребрам оптимального решения задачи Max DCS. Тем самым справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Задача построения подграфа $C'(T', \tau, d_1, \ldots, d_q)$ полиномиально эквивалентна задаче* Max DCS. □

Согласно леммам 3 и 4 получение оптимального подграфа мультиграфа G' со свойствами (Q1)–(Q4) сводится к решению примеров задачи Max DCS, формируемых на этапах 1–4. Каждый такой пример является частным случаем полиномиально разрешимой задачи поиска подграфа максимального веса с заданными степенями вершин в двудольном мультиграфе. Поскольку размер одной из долей мультиграфа ограничен константой, эта задача может быть решена за время $O(n)$ с помощью алгоритма из [14] для транспортной задачи, включающей в себя задачу Max DCS (см. объяснение в [4], секция 3.2.2). С другой стороны, количество примеров задачи Max DCS, формируемых на этапах 1–4, оценивается величиной $O(n^{2p-2})$. Отсюда получаем алгоритм решения задачи Max-(c,k)-DCC с трудоемкостью $O(n^{2p-1})$.

Эту трудоемкость можно сократить следующим образом. На этапе 3 выберем степени тоннелей $t_1,\dots,t_{q-2}$, а степень тоннеля t_{q-1} выразим по формуле $d_{q-1}=n-d_{1,q-2}-d_q$, где $d_{1,q-2}=\sum_{i=1}^{q-2}d_i$. Далее будем рассматривать оптимальное значение $Opt(d_q)$ целевой функции задачи Max DCS как функцию от параметра d_q. Как показано в [4], эта функция — выпуклая. Определим множество допустимых значений параметра d_q. Пусть S_j — компонента связности в C_τ, содержащая тоннель t_j, и $d(S_j)=\sum\{d_i \mid t_i \text{ входит в } S_j,\ i<q-1\}$, где $j=q-1,q$. Тогда при $S_q\neq S_{q-1}$ неравенство (3), сформулированное для компонент S_q, S_{q-1}, равносильно тому, что $d_q+d(S_q)\geq k$ и $n-d_{1,q-2}-d_q+d(S_{q-1})\geq k$. При $S_q=S_{q-1}$ оно равносильно неравенству $n-d_{1,q-2}+d(S_q)\geq k$, не зависящему от значений d_q. Условие положительности степеней тоннелей t_q, t_{q-1} равносильно отношению $d_q\in[1,\, n-d_{1,q-2}-1]$. Таким образом, если при выбранных значениях $d_1,\dots,d_{q-2}$ решение задачи Max DCS существует, то множеством допустимых значений параметра d_q является один из целочисленных отрезков: либо $[\max\{d(S_q)-k,1\},\ n-d_{1,q-2}+\min\{d(S_{q-1})-k,-1\}]$, либо $[1,\, n-d_{1,q-2}-1]$. Отсюда и из выпуклости функции $Opt(d_q)$ получаем, что оптимальное значение параметра d_q может быть найдено методом дихотомии с использованием $O(\log n)$ значений этого параметра. В результате количество примеров задачи Max DCS, подлежащих решению для нахождения оптимального подграфа со свойствами (Q1)–(Q4), сокращается до величины $O(n^{2p-3}\log n)$, а трудоемкость итогового алгоритма — до величины $O(n^{2p-2}\log n)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Описанный алгоритм для задачи Max-(c,k)-DCC является обобщением алгоритма для тоннельной задачи Max TSP из [4]. Отличиями предложенного алгоритма от алгоритма из [4] являются более широкий класс связывающих подграфов, выбираемых на этапе 2, и наличие ограничения (3) при выборе степеней тоннелей, ненужного в случае задачи Max TSP. Следствием этого ограничения является более сложный диапазон допустимых значений параметра d_q при использовании дихотомии на этапе 4.

З а м е ч а н и е 3. В случае несимметричной тоннельной метрики, определяемой равенством (1), свойство (Q1) в леммах 1 и 2 соответствует следующему свойству:

(Q1') каждый город $x\in V$ инцидентен в подграфе C' одному ребру типа $f(.,.)$ и одному ребру типа $b(.,.)$.

Соответствующей мультиграф G'' во входе задачи Max DCS, формируемой на этапах 1–4, получается из G' не только разделением каждого тоннеля t_i на вершины f_i, b_i, но и аналогичным разделением городов: каждый город x, оставшийся после удаления городов из C_τ, разделяется на две вершины x^f, x^b с заменой ребер $f(i,x)$ и $b(i,x)$ на ребра того же веса, соединяющие вершину f_i с вершиной x^f и вершину b_i с вершиной x^b соответственно. Свойство (D1) в получаемом примере задачи Max DCS приобретает вид:

(D1') каждая вершина вида x^f и x^b инцидентна одному ребру подграфа C''.

Заключение

В статье предложен полиномиальный алгоритм решения задачи о цикловом покрытии максимального веса с ограничениями на количество и длину циклов в случае полиэдральной метрики с фиксированным числом фасет. Алгоритм является обобщением известного алгоритма для полиэдральной задачи Max TSP.

Одним из направлений дальнейших исследований является получение полиномиального алгоритма для модификаций рассматриваемой задачи, в которых ограничения на количество или длину циклов в искомом цикловом покрытии заданы в виде равенств. Использование описанного подхода для данных модификаций осложняется тем, что некоторые компоненты связности, сформированные на этапе 2, могут соединиться в оптимальном решении задачи Max DCS, полученном на этапе 4. Другим возможным направлением исследований является получение полиномиального алгоритма для полиэдральной задачи о нескольких реберно непересекающихся гамильтоновых циклах максимального веса (Max-c-PSP). Асимптотически точный алгоритм для этой задачи описан в [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сердюков А. И.** Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Методы целочисленной оптимизации. Управляемые системы, вып. 27. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. С. 79–87.
2. **Сердюков А. И.** Задача коммивояжера на максимум в конечномерных вещественных пространствах // Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т. 2, № 1. С. 50–56.
3. **Шенмайер В. В.** Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в конечномерном нормированном пространстве // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17, № 4. С. 84–91.
4. **Barvinok A., Fekete S. P., Johnson D. S., Tamir A., Woeginger G. J., Woodroofe R.** The geometric maximum traveling salesman problem // J. ACM. 2003. Vol. 50, no. 5. P. 641–664. doi: 10.1145/876638.876640 .
5. **Bläser M., Manthey B.** Approximating maximum weight cycle covers in directed graphs with weights zero and one // Algorithmica. 2005. Vol. 42, no. 2. P. 121–139. doi: 10.1007/s00453-004-1131-0 .
6. **Cayley A.** A theorem on trees // Quart. J. Pure Appl. Math. 1889. Vol. 23. P. 376–378.
7. **Engebretsen L., Karpinski M.** TSP with bounded metrics // J. Comp. System Sci. 2006. Vol. 72, no. 4. P. 509–546. doi: 10.1016/j.jcss.2005.12.001 .
8. **Kaplan H., Lewenstein M., Shafrir N., Sviridenko M.** Approximation algorithms for asymmetric TSP by decomposing directed regular multigraphs // J. ACM. 2005. Vol. 52, no. 4. P. 602–626. doi: 10.1145/1082036.1082041 .
9. **Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B.** The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization. N Y: Wiley, 1985. 465 p. ISBN: 0-471-90413-9 .
10. **Manthey B.** On approximating restricted cycle covers // Proc. 3rd Workshop on Approximation and Online Algorithms (WAOA 2005). Berlin: Springer, 2006. P. 282–295. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 3879.) doi: 10.1007/11671411_22 .
11. **Paluch K., Mucha M., Mądry A.** A 7/9-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem // Proc. 12th Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization (APPROX 2009). Berlin: Springer, 2009. P. 298–311. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 5687.) doi: 10.1007/978-3-642-03685-9_23 .
12. **Shenmaier V. V.** Asymptotically optimal algorithms for geometric Max TSP and Max m-PSP // Discrete Appl. Math. 2014. Vol. 163, part 2. P. 214–219. doi: 10.1016/j.dam.2012.09.007 .
13. **Shenmaier V. V.** Complexity and approximation of the smallest k-enclosing ball problem // European J. Combinatorics. 2015. Vol. 48, no. C. P. 81–87. doi: 10.1016/j.ejc.2015.02.011 .
14. **Zemel E.** An $O(n)$ algorithm for the linear multiple choice knapsack problem and related problems // Inf. Proc. Lett. 1984. Vol. 18, no. 3. P. 123–128. doi: 10.1016/0020-0190(84)90014-0 .

Шенмайер Владимир Владимирович
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
e-mail: shenmaier@mail.ru

Поступила 23.04.2018

REFERENCES

1. Serdyukov A.I. Asymptotically exact algorithm for the travelling salesman maximum problem in Euclidean space. *Upravlyaemyi sistemy*, 1987, vol. 27, pp. 79–87 (in Russian).
2. Serdyukov A.I. The maximum-weight travelling salesman problem in finite-dimensional real spaces. In: Korshunov A.D. (ed.), *Operations research and discrete analysis.*, Dordrecht: Kluwer, 1997, Ser. Mathematics and its applications, vol. 391, pp. 233–239.
3. Shenmaier V.V. An asymptotically exact algorithm for the maximum traveling salesman problem in a finite-dimensional normed space. *J. Appl. Ind. Math.*, 2011, vol. 5, no. 2, pp. 296–300. doi: 10.1134/S1990478911020177 .
4. Barvinok A., Fekete S.P., Johnson D.S., Tamir A., Woeginger G.J., Woodroofe R. The geometric maximum traveling salesman problem. *J. ACM*, 2003, vol. 50, no. 5, pp 641–664. doi: 10.1145/876638.876640 .
5. Bläser M., Manthey B. Approximating maximum weight cycle covers in directed graphs with weights zero and one. *Algorithmica*, 2005, vol. 42, no. 2, pp. 121–139. doi: 10.1007/s00453-004-1131-0 .
6. Cayley A. A theorem on trees. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 1889, vol. 23, pp. 376–378.
7. Engebretsen L., Karpinski M. TSP with bounded metrics. *J. Comp. System Sci.*, 2006, vol. 72, no. 4, pp. 509–546. doi: 10.1016/j.jcss.2005.12.001 .
8. Kaplan H., Lewenstein M., Shafrir N., Sviridenko M. Approximation algorithms for asymmetric TSP by decomposing directed regular multigraphs. *J. ACM*, 2005, vol. 52, no. 4, pp. 602–626. doi: 10.1145/1082036.1082041 .
9. Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnoy Kan A.H.G., Shmoys D.B. *The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization.* N Y: Wiley, 1985, 465 p. ISBN: 0-471-90413-9 .
10. Manthey B. On approximating restricted cycle covers. In: Erlebach T., Persinao G. (eds), *Proc. 3rd Workshop on Approximation and Online Algorithms.* WAOA 2005. Lecture Notes in Computer Science, vol. 3879. Berlin: Springer, 2006, pp. 282–295. doi: 10.1007/11671411_22 .
11. Paluch K., Mucha M., Mądry A. A 7/9-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem. In: Dinur I., Jansen K., Naor J., Rolim J. (eds), *Proc. 12th Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization* (APPROX 2009). Lecture Notes in Computer Science, vol. 5687. Berlin: Springer, 2009, pp. 298–311. doi: 10.1007/978-3-642-03685-9_23 .
12. Shenmaier V.V. Asymptotically optimal algorithms for geometric Max TSP and Max m-PSP. *Discrete Appl. Math.*, 2014, vol. 163, part 2, pp. 214–219. doi: 10.1016/j.dam.2012.09.007 .
13. Shenmaier V.V. Complexity and approximation of the smallest k-enclosing ball problem. *European J. Combinatorics*, 2015, vol. 48, no. C, pp. 81–87. doi: 10.1016/j.ejc.2015.02.011 .
14. Zemel E. An O(n) algorithm for the linear multiple choice knapsack problem and related problems. *Inf. Proc. Lett.*, 1984, vol. 18, no. 3, pp. 123–128. doi: 10.1016/0020-0190(84)90014-0 .

The paper was received by the Editorial Office on April 23, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10041).

Vladimir Vladimirovich Shenmaier, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: shenmaier@mail.ru .