ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 519.17+512.54

О ГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ $AT4(7,9,r)$-ГРАФОВ И ИХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОДГРАФОВ[1]

Л. Ю. Циовкина

Настоящая работа посвящена проблеме классификации AT4$(p,p+2,r)$-графов. Граф Сойчера с массивом пересечений $\{56,45,16,1;1,8,45,56\}$ является примером AT4$(p,p+2,r)$-графа с $p=2$. Вопрос существования AT4$(p,p+2,r)$-графов с $p>2$ открыт. Одна из задач их классификации состоит в том, чтобы описать графы из этого класса небольшой степени. В этой работе мы исследуем группы автоморфизмов гипотетического AT4$(7,9,r)$-графа и его локальных подграфов. Локальные подграфы AT4$(7,9,r)$-графа сильно регулярны с параметрами $(711,70,5,7)$. Существование сильно регулярного графа с такими параметрами неизвестно. Мы докажем, что группа автоморфизмов AT4$(7,9,r)$-графа действует интранзитивно на множестве его дуг. Более того, мы докажем, что группа автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(711,70,5,7)$ действует интранзитивно на множестве его вершин.

Ключевые слова: антиподальный плотный граф, сильно регулярный граф, автоморфизм.

L. Yu. Tsiovkina. On automorphism groups of AT4$(7,9,r)$-graphs and their local subgraphs.

The paper is devoted to the problem of classification of AT4$(p,p+2,r)$-graphs. An example of an AT4$(p,p+2,r)$-graph with $p=2$ is provided by the Soicher graph with intersection array $\{56,45,16,1;1,8,45,56\}$. The question of existence of AT4$(p,p+2,r)$-graphs with $p>2$ is still open. One task in their classification is to describe such graphs of small valency. We investigate the automorphism groups of a hypothetical AT4$(7,9,r)$-graph and of its local graphs. The local graphs of each AT4$(7,9,r)$-graph are strongly regular with parameters $(711,70,5,7)$. It is unknown whether a strongly regular graph with these parameters exists. We show that the automorphism group of each AT4$(7,9,r)$-graph acts intransitively on its arcs. Moreover, we prove that the automorphism group of each strongly regular graph with parameters $(711,70,5,7)$ acts intransitively on its vertices.

Keywords: antipodal tight graph, strongly regular graph, automorphism.

MSC: 05C12, 05E18, 05E30

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-263-271

Введение

Всюду в работе под термином "граф" понимается неориентированный граф без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим *i-окрестность* вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. *Локальным подграфом* графа Γ называется 1-окрестность некоторой его вершины. Пусть далее Γ — это связный граф диаметра d. Граф Γ называется *дистанционно регулярным*, если существуют константы c_i, a_i и b_i такие, что для любого $i \in \{0,\dots,d\}$ и любой пары вершин u и w, находящихся на расстоянии i в Γ, имеют место равенства $c_i = |\Gamma_{i-1}(u)\cap\Gamma_1(w)|$, $a_i = |\Gamma_i(u)\cap\Gamma_1(w)|$ и $b_i = |\Gamma_{i+1}(u)\cap\Gamma_1(w)|$ (полагается, что $b_d = c_0 = 0$), и в частности $|\Gamma_1(u)| = b_0 = c_i + a_i + b_i$. Последовательность $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$ называется *массивом пересечений* дистанционно регулярного графа. Граф Γ называется *антиподальным*, если бинарное отношение "совпадать или находиться на расстоянии d" на множестве его вершин является отношением эквивалентности. Классы этого отношения называются *антиподальными классами* графа Γ.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00061 П).

Пусть Γ — это недвудольный антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \theta_4$. Известно, что для параметров графа Γ выполняется *фундаментальная граница*

$$\Big(\theta_1 + \frac{b_0}{a_1+1}\Big)\Big(\theta_4 + \frac{b_0}{a_1+1}\Big) \geq -\frac{b_0 a_1 b_1}{(a_1+1)^2}.$$

Если в фундаментальной границе для графа Γ достигается равенство, то граф Γ локально сильно регулярен и его массив пересечений зависит от трех параметров: неглавных собственных значений $p = -1 - b_1/(1+\theta_4)$ и $-q = -1 - b_1/(1+\theta_1)$ локальных подграфов и размера r антиподального класса. В этом случае граф Γ называется *антиподальным плотным графом* диаметра 4 с параметрами (p, q, r) или просто $AT4(p, q, r)$*-графом*.

Настоящая работа посвящена проблеме классификации $AT4(p, p+2, r)$-графов. Примером $AT4(p, p+2, r)$-графа с $p = 2$ является граф Сойчера с массивом пересечений $\{56, 45, 16, 1; 1, 8, 45, 56\}$. Вопрос существования $AT4(p, p+2, r)$-графов с $p > 2$ открыт. Одна из задач изучения таких графов заключается в том, чтобы описать небольшие графы из этого класса, например, графы степени, не превосходящей 1000. Здесь мы исследуем группы автоморфизмов гипотетического $AT4(7, 9, r)$-графа и его локальных подграфов. Из [1, теорема 4] следует, что $r \in \{4, 8\}$ в случае, если $p = 7$. Локальные подграфы $AT4(7, 9, r)$-графа сильно регулярны с параметрами $(711, 70, 5, 7)$. Существование сильно регулярного графа с такими параметрами неизвестно [2]. Основными результатами настоящей работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\}$ *и* $r \in \{4, 8\}$. *Тогда* $\pi(\mathrm{Aut}(\Gamma)) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 79\}$ *и* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *интранзитивна на дугах графа* Γ.

Теорема 2. *Пусть* Θ *— это сильно регулярный граф с параметрами* $(711, 70, 5, 7)$. *Тогда* $\pi(\mathrm{Aut}(\Theta)) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 79\}$ *и* $\mathrm{Aut}(\Theta)$ *интранзитивна на вершинах графа* Θ.

Ниже приводятся некоторые основные определения и обозначения, используемые в статье. Для графа Γ и множества $X \subseteq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X, которое также будем отождествлять с подграфом, индуцированным Γ на $\mathrm{Fix}(X)$. Для конечной группы G через $\pi(G)$ обозначается ее простой спектр, т. е. множество простых делителей ее порядка.

Параметры b_0, a_1 и c_2 дистанционно регулярного графа будем также обозначать через k, λ и μ соответственно. Дистанционно регулярный граф диаметра 2 на v вершинах называется *сильно регулярным графом* с параметрами (v, k, λ, μ). Если один из параметров k, λ или μ определен в произвольном графе Ω, то этот параметр графа Ω будем также записывать как k_Ω, λ_Ω или μ_Ω соответственно.

Пусть Γ — антиподальный граф. Через $\mathcal{F}(\Gamma)$ обозначается множество антиподальных классов графа Γ. *Антиподальным частным* графа Γ называется граф, обозначаемый через $\bar{\Gamma}$, на $\mathcal{F}(\Gamma)$, в котором вершины F_1 и F_2 смежны тогда и только тогда, когда $\Gamma_1(a) \cap F_2 \neq \varnothing$ для некоторой вершины $a \in F_1$. Граф Γ называется *антиподальным* r*-накрытием* графа $\bar{\Gamma}$, если для любых $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\Gamma)$ имеем $r = |F_1| = |F_2|$ и подграф, индуцированный Γ на $F_1 \cup F_2$ является совершенным паросочетанием или кокликой.

Пусть Γ — это дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{b_0, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Ввиду [3, предложение 4.2.2] граф Γ антиподален тогда и только тогда, когда $b_i = c_{4-i}$ для всех $i \in \{0, 1, 3, 4\}$. В этом случае Γ является антиподальным r-накрытием графа $\bar{\Gamma}$, $r = 1 + b_2/c_2$ и граф $\bar{\Gamma}$ сильно регулярен с параметрами $(v/r, b_0, a_1, rc_2)$, где $v = r(b_0+1) + b_0 b_1/c_2$ — число вершин графа Γ.

Пусть Γ — это $AT4(7, 9, r)$-граф. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\}$ и $r \in \{4, 8\}$. Пусть a — это некоторая вершина графа Γ, $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $a \in F$,

$\Phi = \Gamma_2(a)$ и Θ^i —это i-окрестность вершины F графа $\bar\Gamma$, где $i \in \{1,2\}$. Тогда Φ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{567, 512, (r-1)112/r, 1; 1, 112/r, 512, 567\}$, $\bar\Gamma$ — сильно регулярный граф с параметрами $(3872, 711, 70, 144)$, $\Gamma_1(a) \simeq \Theta^1$ — сильно регулярный граф с параметрами $(711, 70, 5, 7)$ и $\bar\Phi \simeq \Theta^2$ — сильно регулярный граф с параметрами $(3160, 567, 54, 112)$ (см., например, [1]).

В разд. 1 исследована группа автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(711, 70, 5, 7)$. В разд. 2 получены ограничения на простой спектр группы автоморфизмов АТ4$(7,9,r)$-графа. В разд. 3 завершаются доказательства теорем 1 и 2.

1. Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(711, 70, 5, 7)$

В этом разделе Θ — сильно регулярный граф с параметрами $(711, 70, 5, 7)$, $\widetilde{G} = \mathrm{Aut}(\Theta)$ и $v = 711$. Заметим, что граф Θ имеет спектр $70^1, 7^{395}, (-9)^{315}$ и ввиду [3, предложение 1.3.2] порядок коклики в Θ не превосходит 81.

Далее применяется метод Хигмена изучения автоморфизмов дистанционно регулярного графа, представленный в монографии Камерона [4, § 3]. Обозначим через ψ матричное представление группы $\widetilde{G}$ в $GL_v(\mathbb{C})$, индуцируемое подстановочным представлением группы $\widetilde{G}$ на вершинах графа Θ, и через $\alpha_j(g)$ — число вершин x графа Θ таких, что $d(x, x^g) = j$. Пространство $\mathbb{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(\widetilde{G})$-инвариантных подпространств матрицы смежности графа Θ. Для исключения некоторых допустимых групп автоморфизмов графа Θ нам понадобятся формулы характеров проекций представления ψ на подпространства размерностей 395 и 315, вычисленные в следующей лемме.

Лемма 1. *Если $g \in \widetilde{G}$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности* 395 *и χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности* 315, *то*

$$\chi_1(g) = \frac{5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/2 - \alpha_2(g)/16}{9} \quad \text{и} \quad \chi_2(g) = \frac{35\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g)/2 + 7\alpha_2(g)/16}{79}.$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 395$ и $\chi_2(g) - 315$ делятся на p.

Доказательство. Ввиду результатов из [4, § 3.7] достаточно показать, что вторая матрица собственных значений Q графа Θ равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 395 & 79/2 & -79/16 \\ 315 & -81/2 & 63/16 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Заметим, что так как значения характеров являются целыми алгебраическими числами и правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 2. *Пусть $g \in \widetilde{G}$, $|g| = p$ — простое число и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(\widetilde{G}) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 79\}$ и справедливы следующие утверждения*:

(1) *если $\Omega = \varnothing$, то либо $p = \alpha_1(g) = 79$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 63 - 48z$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$;*

(2) *если $\Omega \neq \varnothing$, то $p \le 7$ и либо*

(*i*) *$p = 7$, $|\Omega| \equiv 4 \pmod 7$, $|\Omega| \le 76$, $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 112z + 63$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$, Ω — коклика или Ω — объединение вполне регулярного графа с параметрами $(|\Omega| - n, x_1, 3, 5)$ и n-коклики, где $x_1 \in \{14, 21\}$, либо*

(*ii*) *$p = 5$, $|\Omega| \equiv 1 \pmod 5$, $|\Omega| \le 76$, $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 80z + 63$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$, либо* (*iii*) $p = 3$, $|\Omega| \equiv 0 \pmod 3), |\Omega| \leq 75$ *и* $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 48z + 63$ *для некоторого* $z \in \mathbb{Z}$, *либо*

(*iv*) $p = 2$, $|\Omega| \equiv 1 \pmod 2), 11 \leq |\Omega| \leq 79$ *и* $\alpha_1(g) = 32z + 95 - 9|\Omega|$ *для некоторого* $z \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $\Omega = \varnothing$. Тогда $p \in \{3, 79\}$. Пусть $p = 79$. По лемме 1

$$\chi_1(g) = \frac{5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/2 - \alpha_2(g)/16}{9} = 79z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Отсюда $11376z = 8\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 8\alpha_1(g) - (711 - \alpha_1(g)) = 9\alpha_1(g) - 711$, $\alpha_1(g) = 1264z + 79$ и $z = 0$.

Пусть $p = 3$. По лемме 1

$$\chi_2(g) = \frac{35\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g)/2 + 7\alpha_2(g)/16}{79} = 3z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Отсюда $3792z = -72\alpha_1(g) + 7\alpha_2(g) = -72\alpha_1(g) + 7(711 - \alpha_1(g)) = -79\alpha_1(g) + 4977$ и $\alpha_1(g) = 63 - 48z$.

Пусть теперь $a \in \Omega \neq \varnothing$. Тогда по [5, теорема 3.2] $|\Omega| \leq 7 \cdot 711/(70 - 7) = 79$. Имеем

$$x_1 = |\Omega \cap \Theta_1(a)| \equiv 70 \pmod p,$$

$$x_2 = |\Omega \cap \Theta_2(a)| \equiv 640 \pmod p,$$

$$|\Theta - \Omega| = v - 1 - x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod p,$$

в частности если $p \notin \{2, 5, 7\}$, то $x_1 x_2 > 0$.

Пусть $p > 7$. Тогда для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \subset \Omega$ и по [3, предложение 1.1.2] Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(|\Omega|, x_1, 5, 7)$ и $|\Omega| = 1 + x_1 + x_1(x_1 - 6)/7$. Тогда $(p, x_1, x_2) = (19, 13, 13)$ и Ω — регулярный граф степени 13 на 27 вершинах, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $\lambda_\Omega = 5$ и для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{0, 5, 7\}$. Пусть Δ — связная компонента графа Ω. Если $d(\Delta) = 1$, то $\Delta \simeq K_7$, но $|\Omega(a)| \equiv 0 \pmod 7$ для $a \in \Delta$, противоречие. Предположим, что $d(\Delta) > 1$. Тогда $\lambda_\Delta = 5$ и $\mu_\Delta = 7$ и по [3, предложение 1.1.2] Δ — вполне регулярный граф с параметрами $(|\Delta|, k_\Delta, 5, 7)$ и $|\Delta| \geq 1 + k_\Delta + k_\Delta(k_\Delta - 6)/7$. Если $d(\Delta) = 2$, то $|\Delta| = 1 + k_\Delta + k_\Delta(k_\Delta - 6)/7$ и $k_\Delta = 7l$, где $l \geq 1$. Но тогда $(x_1, x_2) = (14, 16)$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(31, 14, 5, 7)$ и, учитывая [3, теорема 1.3.1], собственные значения графа Δ целые, противоречие. Значит, $d(\Delta) \geq 3$ и по [3, теорема 1.5.5] $k_\Delta(k_\Delta - 6)/7 \geq k_\Delta \geq 13$. Как и выше, получим $k_\Delta \in \{14, 21\}$ и $|\Delta| \geq 31$.

Поэтому либо Ω — n-коклика и $n \equiv 4 \pmod 7$, либо $|\Omega| \in \{32, 39, 46, 53, 60, 67, 74\}$ и Ω — дизъюнктное объединение вполне регулярного графа с параметрами $(|\Omega| - n, x_1, 5, 7)$ и n-коклики, где $x_1 \in \{14, 21\}$. По лемме 1

$$\chi_2(g) = \frac{35\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g)/2 + 7\alpha_2(g)/16}{79} = 7z$$

для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Поэтому $210|\Omega| - 72\alpha_1(g) + 7\alpha_2(g) = 8848z$. Учитывая, что $711 = |\Omega| + \alpha_1(g) + \alpha_2(g)$, получим $8848z = 560|\Omega| - 72\alpha_1(g) + 7(711 - |\Omega| - \alpha_1(g)) = 553|\Omega| - 79\alpha_1(g) + 4977$ и $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 112z + 63$.

Пусть $p = 5$. Тогда для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{0, 2, 5, 7\}$. По лемме 1

$$\chi_2(g) = \frac{35\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g)/2 + 7\alpha_2(g)/16}{79} = 5z_1$$

для некоторого $z_1 \in \mathbb{Z}$. Поэтому $560\alpha_0(g) - 72\alpha_1(g) + 7\alpha_2(g) = 6320z$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 80z + 63$.

Пусть $p = 3$. Тогда для каждой вершины $b \in \Omega - \{a\}$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{1,2,4,5,7\}$. По лемме 1

$$\chi_2(g) = \frac{35\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g)/2 + 7\alpha_2(g)/16}{79} = 3z_1$$

для некоторого $z_1 \in \mathbb{Z}$. Поэтому $560\alpha_0(g) - 72\alpha_1(g) + 7\alpha_2(g) = 3792z$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\alpha_1(g) = 7|\Omega| - 48z + 63$.

Пусть $p = 2$. Тогда для любой вершины $b \in \Theta_2(a) \cap \Omega$ имеем $\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega \neq \varnothing$ и для любой вершины $x \in \Theta - \Omega$ имеем $\Theta_1(x) \cap \Theta_1(x^g) \cap \Omega \neq \varnothing$. Поэтому $d(\Omega) \leq 2$ и $711 - |\Omega| \leq 70|\Omega|$, т.е. $|\Omega| \in \{11, 13, \dots, 79\}$. Кроме того, для каждой вершины $b \in \Omega \cap \Theta_2(a)$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{1,3,5,7\}$ и для каждой вершины $b \in \Omega_1(a)$ имеем $|\Theta_1(a) \cap \Theta_1(b) \cap \Omega| \in \{1,3,5\}$. По лемме 1

$$\chi_1(g) - 395 = \frac{5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/2 - \alpha_2(g)/16}{9} - 395 = 2z_1$$

для некоторого $z_1 \in \mathbb{Z}$. Отсюда $\alpha_1(g) = 32z + 95 - 9|\Omega|$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $p, q \in \pi(\widetilde{G})$ и $\widetilde{G}$ содержит элемент h порядка pq. Тогда $(p,q) \neq (79,7)$, $(79,5), (79,3)$ и если $(p,q) = (79,2)$, то $|\mathrm{Fix}(h^{79})| = 79$, $\alpha_1(h^p) = 632$ и каждая неодноточечная $\langle h^p \rangle$-орбита является ребром.*

Доказательство. Пусть $p, q \in \pi(\widetilde{G})$, $h \in \widetilde{G}$ и $|h| = pq$. Положим $g = h^q$ и $f = h^p$. Ясно, что $|\mathrm{Fix}(f) - \mathrm{Fix}(g)| \equiv 0 \pmod p$ и $|\mathrm{Fix}(g) - \mathrm{Fix}(f)| \equiv 0 \pmod q$.

Пусть $p = 79$ и $2 < q \leq 7$. Тогда $|\mathrm{Fix}(f)|$ делится на 79 или $\alpha_1(g)$ делится на q, противоречие с леммой 2.

Пусть $(p,q) = (79,2)$. По лемме 2 $\alpha_1(f) = 32z + 95 - 9|\mathrm{Fix}(f)|$. Так как $|\mathrm{Fix}(f)| = 79$ и $\alpha_1(f)$ делится на 79, то 79 делит $32z + 95$ и поэтому $\alpha_1(f) = 632$. $\square$

2. Автоморфизмы $AT4(7,9,r)$-графа

До конца работы Γ — это дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\}$, где $r \in \{4,8\}$, и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 4. *Пусть $g \in G$, $|g| = p$ — простое число и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если $\Omega = \varnothing$, то $p \in \{2, 11\}$*;

(2) *если $\Omega \neq \varnothing$, то либо $p \leq 73$, либо $p = 83$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{296, 296 - \lambda - 1, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, 296 - \lambda - 1, 296\}$, либо $p = 79$ и Ω — антиподальный класс.*

Доказательство. Так как Γ имеет $v = 2^5 11^2 r$ вершин, то в случае, если $\Omega = \varnothing$, получим $p \in \{2, 11\}$. Пусть далее $\Omega \neq \varnothing$ и $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$. Ясно, что если $p \geq 11$ и $F \cap \Omega \neq \varnothing$, то $F \subseteq \Omega$.

Предположим, что $p \geq 11$ и Ω содержит ровно $x > 0$ антиподальных классов, включая F. Пусть $a \in F$. Тогда $\alpha_4(g) \leq v - r(k+1)$ и $xr = v \pmod p$. Так как g индуцирует нетривиальный автоморфизм графа $\bar{\Gamma}$, то по [5, теорема 3.2] $x \leq 144 \cdot 3872/(711 - 7) = 792$.

Имеем $|\Omega \cap \Gamma_1(a)| = |\Omega \cap \Gamma_1(a')|$ для всех $a' \in F$. Поэтому $(r-1)|\Omega \cap \Gamma_1(a)| = |\Omega \cap \Gamma_3(a)|$. Далее,

$$x_1 = |\Omega \cap \Gamma_1(a)| \equiv 711 \pmod p,$$

$$x_2 = |\Omega \cap \Gamma_2(a)| \equiv 711 \cdot 640/\mu \pmod p,$$

$$x_3 = |\Omega \cap \Gamma_3(a)| \equiv 711(r-1) \pmod p,$$

$$|\Gamma - \Omega| = v - r - x_1 - x_2 - x_3 \equiv 0 \pmod p,$$

причем $(r-1)x_1 = x_3$ и, в частности, если $p \notin \{2,3,5,7,79\}$, то $x_1x_2x_3 > 0$.

Заметим, что если $p > \mu$ и $p \neq 79$, то Ω — связный граф диаметра не менее 3. Действительно, каждая вершина c из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ находится на расстоянии 2 от каждой вершины $a' \in F$ и поэтому $\Gamma_1(a') \cap \Gamma_1(c) \subset \Omega$. Кроме того, если $p > \mu$, то $\Gamma_1(a) \nsubseteq \Omega$. От противного, пусть $\Gamma_1(a) \subseteq \Omega$ и $p > \mu$. Тогда $\Gamma_3(a) \subseteq \Omega$ и каждая вершина из $\Gamma_2(a)$ лежит в $\Gamma_1(a) \cap \Gamma_1(b)$ для некоторой вершины $b \in \Gamma_3(a)$ и поэтому $\Gamma_2(a) \subseteq \Omega$, т. е. $\Omega = \Gamma$, противоречие.

Пусть $p > \max\{\lambda, \mu\}$. Предположим, что $x_1x_2x_3 > 0$. Покажем, что в этом случае $p = 83$. Имеем $\lambda_\Omega = \lambda, \mu_\Omega = \mu$ и по [3, предложение 1.1.2] Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(xr, k_\Omega, \lambda, \mu)$. Поэтому μ делит $k_\Omega(k_\Omega - \lambda - 1)$. Ввиду того что диаметр графа Ω не меньше 3, то по [3, теорема 1.5.5] $k_\Omega(k_\Omega-\lambda-1)/\mu \geq k_\Omega \geq \lambda+\mu+1$. Более того, Ω — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с массивом пересечений $\{x_1, x_1-\lambda-1, (r-1)\mu, 1; 1, \mu, x_1-\lambda-1, x_1\}$. Так как $\lambda_\Omega > 0$, то по [3, следствие 4.2.5] число ${\lambda_\Omega}^2 + 4x_1$ — квадрат, поэтому либо $r = 4$ и $(p, x_1, x_2, x_3) = (83, 296, 1850, 888)$, либо $r = 8$ и $(p, x_1, x_2, x_3) = (83, 296, 3700, 2072)$.

Пусть теперь $x_1x_2x_3 = 0$. Тогда $p = 79$. Если $x_1 = 0$, то, учитывая, что $\mu < p$, получим $x_2 = 0$, и поэтому $\Omega = F(a)$. Если $x_1 > 0$, то $x_2 = 0$ и $x_1 = pl$, где $l \leq 9$. Но тогда степень каждой вершины в Ω не меньше p, поэтому $|\Omega_2(a)| \geq p - \lambda - 1 > 0$, противоречие. $\square$

Следствие. *Если $79 \in \pi(G_{\{F\}})$ для всех $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$, то группа G действует транзитивно на $\mathcal{F}(\Gamma)$.*

Всюду далее в этом разделе $F \in \mathcal{F}(\Gamma), a \in F$, $\Phi = \Gamma_2(a)$, Θ^i — i-окрестность вершины F графа $\bar\Gamma$ и $\mathcal{F}_i$ — множество тех антиподальных классов графа Γ, которые пересекают $\Gamma_i(a)$, где $i \in \{1,2\}$.

Заметим, что граф $\bar\Gamma$ имеет спектр $711^1, 7^{3555}, (-81)^{316}$ и его дополнительный граф $\bar\Gamma_2$ сильно регулярен с параметрами $(3872, 3160, 2592, 2520)$. Через $\bar x$ будем обозначать вершину графа $\bar\Gamma$, прообраз которой в Γ содержит x.

Лемма 5. *Пусть $g \in \mathrm{Aut}(\bar\Gamma)$, $|g| = p$ — простое число и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если $\Omega = \varnothing$, то $p \in \{2, 11\}$;*

(2) *если $\Omega \neq \varnothing$, то для каждой вершины $\bar b$ графа $\bar\Gamma$ и всех $i \in \{1,2\}$ имеем $\bar\Gamma_i(\bar b) \nsubseteq \Omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar a \in \Omega \neq \varnothing$. Тогда по [5, теорема 3.2] $|\Omega| \leq 144 \cdot 3872/(711 - 7) = 792$. Поэтому $\bar\Gamma_2(\bar a) \nsubseteq \Omega$. Имеем

$$x_1 = |\Omega \cap \bar\Gamma_1(\bar a)| \equiv 711 \pmod p,$$

$$x_2 = |\Omega \cap \bar\Gamma_2(\bar a)| \equiv 3160 \pmod p,$$

$$|\bar\Gamma - \Omega| = v_{\bar\Gamma} - 1 - x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod p,$$

в частности если $p \notin \{2,3,5,79\}$, то $x_1x_2 > 0$.

Предположим, что $\bar\Gamma_1(\bar a) \subseteq \Omega$. Тогда для вершины $\bar b \in \bar\Gamma_2(\bar a) - \Omega$ получим, что $|\bar\Gamma_1(\bar b) \cap \bar\Gamma_1(\bar b^g) \cap \Omega| = 144$. Но вершины $\bar b$ и $\bar b^g$ находятся на расстоянии не более 2 в графе $\bar\Gamma_2(\bar a)$, противоречие.

Предположим теперь, что $\bar\Gamma_i(\bar b) \subseteq \Omega$ для произвольной вершины $\bar b$ графа $\bar\Gamma$ и некоторого $i \in \{1,2\}$. По доказанному выше $\bar b \notin \Omega$. Но тогда $\bar b$ и $\bar b^g$ имеют $|\bar\Gamma_1(\bar b)|$ общих соседей в графе $\bar\Gamma$ или $|\bar\Gamma_2(\bar b)|$ общих соседей в графе $\bar\Gamma_2$, откуда $\bar\Gamma$ или $\bar\Gamma_2$ — полный многодольный граф, противоречие. $\square$

Всюду далее через G_X $(G_{\{X\}})$ будем обозначать поточечный (соответственно, глобальный) стабилизатор подмножества вершин X графа Γ в G. Пусть K_i — ядро действия $G_{\{F\}}$ на $\mathcal{F}_i$, где $i \in \{1,2\}$. Тогда $K = K_1 \cap K_2$ — ядро действия G на $\mathcal{F}(\Gamma)$.

Лемма 6. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) $G/K \le \mathrm{Aut}(\bar\Gamma)$, $G_a \cap K = 1$ *и* $|K|$ *делит* r;

(2) $G_{\Gamma_i(a)} = 1$, $G_a \le \mathrm{Aut}(\Theta^i)$ *для всех* $i \in \{1,2\}$ *и* $G_a \le \mathrm{Aut}(\Phi)$;

(3) $K_1 = K_2 = K$ *и* $G_{\{F\}}/K \le \mathrm{Aut}(\bar\Phi)$.

Доказательство. Предположим, что $1 \ne g \in G_a \cap K$. Тогда $\Gamma_1(a) \subset \mathrm{Fix}(g)$. Если $b \in \Gamma_2(a) - \mathrm{Fix}(g)$, то $\Gamma_1(b) \cap \Gamma_1(b^g) \cap \mathrm{Fix}(g) \ne \varnothing$ и $\bar{b^g} = \bar b$, противоречие. Поэтому $\Gamma_2(a) \subset \mathrm{Fix}(g)$. Но тогда $\Gamma = \mathrm{Fix}(g)$, противоречие.

Пусть $i \in \{1,2\}$. Ввиду леммы 5 получим, что $K_i = K$, $G_{\Gamma_i(a)} \trianglelefteq G_a$ и $G_{\Gamma_i(a)}$ фиксирует каждый антиподальный класс графа Γ. Из утверждения (1) следует, что $G_{\Gamma_i(a)} = 1$. Таким образом, $G_a \simeq G_aK/K \le G_{\{F\}}/K \le \mathrm{Aut}(\Theta^i)$ и аналогично $G_a \le \mathrm{Aut}(\Phi)$. □

Из лемм 2, 4 и 6 заключаем, что $\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7,11,79\}$. Отметим, что существенные ограничения на простой спектр группы G дает именно строение локальных подграфов графа Γ.

3. Доказательство основных результатов

Лемма 7. *Если группа G неразрешима, то $79 \notin \pi(G)$.*

Доказательство. Пусть $S(G)$ — разрешимый радикал группы G. Ясно, что $K \le S(G)$. Пусть $\widehat G = G/S(G)$ и $\widehat T$ — цоколь группы $\widehat G$. Предположим, что группа G — неразрешима. Если 79^2 делит $|G|$, то G содержит погруппу P порядка 79^2 и $\mathrm{Fix}(P) \ne \varnothing$, противоречие с леммами 2 и 6. Если $|G|$ делится на 11^3, то G_a содержит элемент порядка 11, снова противоречие с леммами 2 и 6. Из [6, табл. 1] следует, что $79 \notin \pi(\widehat T)$.

Допустим, что $S(G)$ содержит элемент g порядка 79. По [7, теорема 1.1] для любого элемента f из G подгруппа $\langle f,g\rangle$ разрешима. Пусть f — элемент порядка $q \in \{5,7,11\}$ из G. Тогда $\langle f,g\rangle$ содержит холлову $\{79,q\}$-подгруппу P.

Пусть $q \in \{5,7\}$. Тогда можно считать, что $g \in P$ и P нормализует свою силовскую q-подгруппу S. Если $\langle g\rangle \triangleleft P$, то можно считать, что f централизует g и ввиду леммы 4 $\mathrm{Fix}(P) \ne \varnothing$, противоречие с леммой 3. Значит, $|S| \ge q^9$. Если $\mathrm{Fix}(g) \cap \mathrm{Fix}(h) = \varnothing$ для всех $h \in S - \{1\}$, то длина S-орбиты, содержащей вершину $a \in \mathrm{Fix}(g)$, не меньше $|S|$, противоречие. Значит, $\langle g,h\rangle \le G_a$ для некоторого $h \in S - \{1\}$ и подгруппа $\langle g,h\rangle$ разрешима. Тогда $\langle g,h\rangle$ содержит холлову $\{79,q\}$-подгруппу P_1. Можно считать, что $g \in P_1$ и P_1 нормализует свою силовскую q-подгруппу S_1. Если $\langle g\rangle \triangleleft P_1$, то элемент порядка q из P_1 централизует g, противоречие с леммой 3. Значит, $|S_1| \ge q^9$. Так как $\mathrm{Fix}(S_1) \cap \Gamma_1(a) \ne \varnothing$, то $|\mathrm{Fix}(S_1) \cap \Gamma_1(a)| \ge 79$, и следовательно $|\mathrm{Fix}(h_1)| \ge 79$ для некоторого элемента $h_1 \in P_1$ порядка q, противоречие с леммой 2.

Если $q = 11$, то можно считать, что $\langle g\rangle \triangleleft P$ и f централизует g, откуда $\mathrm{Fix}(g) \subseteq \mathrm{Fix}(f)$ или $|\mathrm{Fix}(g)| \ge qr$, противоречие с леммой 4.

Значит, $\widehat G - \widehat T$ содержит элемент $\hat h$ порядка 79. Пусть $\widehat S$ — минимальная нормальная подгруппа в $\widehat G$. Тогда $\widehat S$ — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп $\widehat S_1, \dots, \widehat S_l$. Так как $\mathrm{Aut}(\widehat S_1)$ не содержит элементов порядка 79, то можно считать, что $\hat h \notin N_{\widehat G}(\widehat S_1)$. Тогда $79|\widehat S_1|^{79}$ делит $|G|$. Так как 11^3 не делит $|G|$, то $\pi(\widehat S_1) \subseteq \{2,3,5,7\}$. Кроме того, по лемме 2 $|\mathrm{Fix}(G_a) \cap \Gamma_1(a)| \le 80$, поэтому $|G_a| \le 711 \cdot k_\Theta!(k_\Theta - \lambda_\Theta - 1)^9$, где $\Theta = \Gamma_1(a)$. Таким образом,

$$79|\widehat S_1|^{79}/(2^5 11^2 r) \le |G_a| \le 711 \cdot 70!(64)^9,$$

противоречие с тем, что $|\widehat S_1| \ge 60$. □

Лемма 8. *Если группа G транзитивна на вершинах графа Γ, то $79 \notin \pi(G)$.*

Доказательство. Пусть G транзитивна на вершинах графа Γ. Тогда G индуцирует транзитивную группу автоморфизмов $\bar G$ графа $\bar\Gamma$. Для вершины a графа Γ и антиподального класса F, содержащего a, имеем $|G : G_{\{F\}}| = 2^5 11^2$, $|G_{\{F\}} : G_a| = r$ и $|G : G_a| = 2^{5+e}11^2$, где $e \in \{2, 3\}$.

Предположим, что $79 \in \pi(G)$. По лемме 7 группа G разрешима. Так как $11 \in \pi(G)$, то G содержит элемент h порядка $79 \cdot 11$. Но тогда $\mathrm{Fix}(h^{11}) \subseteq \mathrm{Fix}(h^{79})$ или $|\mathrm{Fix}(h^{11})| \geq 11r$, противоречие с леммой 4. □

Завершим доказательство теоремы 1. Допустим, что G транзитивна на дугах графа Γ. Тогда G транзитивна на вершинах графа Γ и для любой вершины a группа G_a действует транзитивно на $\Gamma_1(a)$. Поэтому $|G_a : G_{a,b}| = 711$ для всех $b \in \Gamma_1(a)$, противоречие с леммой 8. □

Доказательство теоремы 2. Пусть Θ — сильно регулярный граф с параметрами $(711, 70, 5, 7)$. Тогда $\pi(\mathrm{Aut}(\Theta)) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 79\}$. Предположим, что $\mathrm{Aut}(\Theta)$ транзитивна на вершинах графа Θ. С помощью тех же рассуждений, которые применялись в доказательстве леммы 7, получим, что группа $\mathrm{Aut}(\Theta)$ разрешима и поэтому содержит холлову $\{3, 79\}$-подгруппу P. Пусть Q — подгруппа в P порядка 79. По лемме 3 $Q = C_P(Q)$. Значит, $O_{79}(P) = 1$.

Пусть N — минимальная нормальная 3-подгруппа в P. Тогда все N-орбиты на вершинах Θ имеют длину 3 или 9. Пусть $a, b_1, \ldots, b_m$ — представители $(m+1)$ попарно различных N-орбит, где $m = 8$ при $|N : N_a| = 9$ и $m = 24$ при $|N : N_a| = 3$. Тогда $|N_a : N_{a,b_1,\ldots,b_m}| \leq |N : N_a|^m$. Так как группа N абелева, то любой элемент из N, фиксирующий некоторую вершину b, фиксирует и всю N-орбиту, содержащую b, поэтому ввиду леммы 3 получим $N_{a,b_1,\ldots,b_m} = 1$. Но $|N| \geq 3^{79}$, противоречие. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А., Падучих Д.В.** О дистанционно регулярных графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны // Докл. АН. 2013. Т. 452, № 3. С. 247–251.
2. **Brouwer A.E.** Parameters of strongly regular graphs [site]. URL: http://www.win.tue.nl/˜ aeb/graphs/srg/srgtab.html.
3. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p. doi: 10.1007/978-3-642-74341-2.
4. **Cameron P.J.** Permutation Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p. ISBN-10: 0521653789.
5. **Behbahani M., Lam C.** Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. 2011. Vol. 311. P. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005.
6. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
7. Thompson-like characterizations of the solvable radical / R. Guralnick, B. Kunyavskiĭ, E. Plotkin, A. Shalev // J. Algebra. 2006. Vol. 300. P. 363–375. doi: 10.1016/j.jalgebra.2006.03.001.

Циовкина Людмила Юрьевна Поступила 04.06.2018
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: l.tsiovkina@gmail.com

REFERENCES

1. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A., Paduchikh D.V. On distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 2, pp. 532–536. doi: 10.1134/S1064562413050116.
2. Brouwer A.E. Parameters of strongly regular graphs [site]. Available on http://www.win.tue.nl/˜ aeb/graphs/srg/srgtab.html.
3. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs*, Berlin etc: Springer-Verlag, 1989, 495 p. doi: 10.1007/978-3-642-74341-2.

4. Cameron P.J. *Permutation groups*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999, 220 p. ISBN-10: 0521653789 .
5. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms. *Discrete Math.*, 2011, vol. 311, pp. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
6. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Siberian Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.
7. Guralnick R., Kunyavskiĭ B., Plotkin E., Shalev A. Thompson-like characterizations of the solvable radical. *J. Algebra*, 2006, vol. 300, pp. 363–375. doi: 10.1016/j.jalgebra.2006.03.001 .

The paper was received by the Editorial Office on June 4, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00061-П).

Lyudmila Yur'evna Tsiovkina, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: l.tsiovkina@gmail.com .