Том 24 № 3 2018

УДК 517.968.4

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ В $\mathbb{R}^n$ [1]

Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, М. О. Аветисян

В работе исследуется класс нелинейных многомерных интегральных уравнений типа свертки. Указанный класс уравнений имеет непосредственное применение в p-‑адической теории открыто-замкнутых струн. Доказывается существование n-параметрического семейства нетривиальных непрерывных и ограниченных решений. Устанавливаются дополнительные свойства построенных решений: монотонность по каждому аргументу, предельные соотношения, интегральная асимптотика. Посредством построенных решений изучается также одна нелинейная задача для многомерного уравнения теплопроводности. В конце работы приводятся частные примеры указанных уравнений, имеющие самостоятельный теоретический и прикладной интерес.

Ключевые слова: нетривиальное решение, монотонность, p-‑адическая теория, предел, последовательные приближения.

Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan, M. H. Avetisyan. Solvability issues for a class of convolution type nonlinear integral equations in $\mathbb{R}^n$.

We study a class of nonlinear multidimensional integral equations of convolution type. This class of equations is directly applied in the p-adic theory of open–closed strings. We prove the existence of an n-parametric family of nontrivial continuous bounded solutions and establish certain properties of the constructed solutions: monotonicity in each argument, limit relations, and integral asymptotics. The solutions are used to study a nonlinear problem for the multidimensional heat equation. At the end of the paper we give examples of such equations, which are of independent theoretical and practical interest.

Keywords: nontrivial solution, monotonicity, p-adic theory, limit, successive approximations.

MSC: 45G05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-247-262

1. Введение

Настоящая работа посвящена вопросам построения нетривиальных решений и исследования некоторых качественных свойств построенных решений для следующего класса нелинейных многомерных уравнений типа свертки в $\mathbb{R}^n$:

$$Q(\varphi(x_1,\dots,x_n))=\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_1(x_1-t_1)\dots K_n(x_n-t_n)\varphi(t_1,\dots,t_n)dt_n\dots dt_1, \qquad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}, \tag{1.1}$$

— относительно искомой вещественной измеримой и ограниченной на $\mathbb{R}^n$ функции $\varphi(x_1,\dots,x_n)$.

В уравнении (1.1) $Q(u)$ — определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная нечетная функция, удовлетворяющая следующим условиям: существуют числа $\eta>0,\ \xi\in(0,\eta)$ и $\alpha\in(0,1)$ такие, что

I) $Q(u)\uparrow$ на отрезке $[0,\eta]$;

II) $0\le Q(u)\le\alpha u$ при $u\in[0,\xi]$;

III) $Q(\eta)=\eta$, причем число η является первым положительным корнем функционального уравнения $Q(u)=u$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 16YR-1A002.

Ядра $\{K_i(x)\}_{i=1}^n$ определены на множестве $\mathbb{R}$ и обладают следующими свойствами:

A) $K_i(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_i(x)dx = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$

B) $K_i \in L_\infty(\mathbb{R}), \quad K_i(-x) = K_i(x),\ x \geq 0,\ K_i(x) \downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty), \quad i = 1, 2, \ldots, n;$

C) $m_i := \int\limits_0^{\infty} xK_i(x)dx < +\infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n$,

где $L_\infty(\mathbb{R})$ — пространство существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}$.

Уравнение (1.1) возникает в p-адической теории открыто-замкнутых струн (см. [1–3]). В случае, когда

$$n = 1, \quad K_i(x) := K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad Q(u) = u^p, \quad p > 2, \ \text{— нечетное число},$$

уравнением описывается динамика (роллинг) p-адических струн для скалярного поля тахионов; вопросам существования нечетных ограниченных решений для таких уравнений посвящены работы В. С. Владимирова (см. [2–5]). В работе [6] развит специальный итерационный метод для изучения и решения уравнения (1.1) в том случае, когда

$$n = 1, \quad K_i(x) := K(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{\frac{-x^2}{4a}}, \quad Q(u) = au^3 + (1-a)u, \quad a \in (0, 1].$$

Уравнение (1.1) с общим ядром $K(x)$ и с общей нелинейностью $Q(u)$ в одномерном случае ($n = 1$) изучено в недавних работах одного из авторов (см. [7–9]), где обобщены соответствующие результаты работ В. С. Владимирова и Л. В. Жуковской [2] и [6]. Соответствующая одномерная система уравнений с кубической нелинейностью вида $Q(u) = au^3 + (1-a)u$ исследована в работе [10].

В настоящей работе исследуется многомерное уравнение (1.1) в случае, когда функция $Q(u)$ удовлетворяет условиям I)–III), а функции $\{K_i(x)\}_{i=1}^n$ — условиям A)–C). Доказывается существование нетривиального непрерывного монотонного (по каждому аргументу) и ограниченного решения уравнения (1.1). Вычисляется предел построенного решения $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $x_1 \to \pm\infty,\ x_2 \to \pm\infty, \ldots, x_n \to \pm\infty$. При дополнительном ограничении на функцию Q обсуждаются вопросы построения интегральной асимптотики решения, когда $n = 2$ и $x_1 \to \pm\infty$, $x_2 \to \pm\infty$. С помощью построенных решений исследуется одна нелинейная задача для многомерного уравнения теплопроводности. В конце приводятся частные примеры уравнения (1.1), имеющие применение в p-адической теории открыто-замкнутых струн.

Отметим трудности, которые возникают при построении нетривиального решения n–мерного уравнения (1.1) ($n > 1$) :

1. Сведение уравнения (1.1) к уравнению (2.1) на $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^+ \times \ldots \times \mathbb{R}^+$ (см. лемму 2.1).

2. Доказательство нижней оценки (3.4) для последовательных приближений (3.1) (см. разд. 3., подразд. 3.2).

3. Установление непрерывности по совокупности аргументов построенного решения (в одномерном случае ($n = 1$) этот факт сразу вытекает из непрерывности свертки суммируемой и ограниченной функций).

4. Доказательство теоремы 5.1 (в одномерном случае ранее теорема была доказана иным методом только для функции Q вида $Q(u) = au^3 + (1-a)u,\ a \in [0, 1]$ (см. [8])).

2. Вспомогательные факты

2.1. Сведение интегрального уравнения (1.1) к уравнению с суммарно-разностным ядром

Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим следующее нелинейное уравнение на $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \ldots \times \mathbb{R}^+$:

$$Q(f(x_1,\ldots,x_n)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Big(\prod_{i=1}^{n} \big(K_i(x_i-t_i) - K_i(x_i+t_i)\big)\Big) f(t_1,\ldots,t_n)dt_n\ldots dt_1, \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+, \tag{2.1}$$

— относительно искомой непрерывной на $\mathbb{R}^n_+$ функции $f(x_1,\ldots,x_n)$. Прямой проверкой можно убедиться в справедливости следующей леммы, которая в дальнейшем будет использована.

Лемма 2.1. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — непрерывное на $\mathbb{R}^n_+$ решение уравнения* (2.1) *и*

1) $f_1(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} f(x_1,\ldots,x_n), & \textit{если} \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+, \\ -f(-x_1,x_2,\ldots,x_n), & \textit{если} \quad x_1<0,\ (x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}_+; \end{cases}$

2) $f_2(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n), & \textit{если} \quad x_1\in\mathbb{R},\ (x_2,x_3,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}_+, \\ -f_1(x_1,-x_2,\ldots,x_n), & \textit{если} \quad x_1\in\mathbb{R},\ x_2<0,\ (x_3,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-2}_+; \end{cases}$

....

n-1) $f_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} f_{n-2}(x_1,\ldots,x_n), & \textit{если} \ \ (x_1,\ldots,x_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-2}, \\ & x_{n-1}\in\mathbb{R}^+, \quad x_n\in\mathbb{R}^+, \\ -f_{n-2}(x_1,\ldots x_{n-2},-x_{n-1},x_n), & \textit{если} \ \ (x_1,\ldots,x_{n-2})\in\mathbb{R}^{n-2}, \\ & x_{n-1}<0, \quad x_n\in\mathbb{R}^+. \end{cases}$

Тогда если Q — непрерывная и нечетная функция на $\mathbb{R}$, а ядра $\{K_i(x)\}_{i=1}^n$ удовлетворяют условиям A)–C), *то нечетное продолжение функции $f_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ по переменной x_n на $(-\infty,0)$:*

n) $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} f_{n-1}(x_1,\ldots,x_n), & \textit{если}\ (x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n\in\mathbb{R}^+, \\ -f_{n-1}(x_1,\ldots,-x_n), & \textit{если}\ (x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad x_n<0, \end{cases}$

— будет непрерывным на $\mathbb{R}^n$ решением уравнения (1.1).

З а м е ч а н и е 2.1. Из леммы 2.1, в частности, следует, что если $f\in L_\infty(\mathbb{R}^n_+)$, то $\varphi\in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

2.2. Характеристические уравнения. Априорные оценки

Рассмотрим следующие характеристические уравнения:

$$\int\limits_0^\infty K_i(t)e^{-pt}dt = \frac{\alpha^{1/n}}{2}, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{2.2}$$

— относительно неотрицательного числа p, где $\alpha\in(0,1)$ — наперед заданное число, а ядерные функции $\{K_i(x)\}_{i=1}^n$ удовлетворяют условиям A)–C).

Имеет место

Лемма 2.2. *Пусть выполняются условия* A)–C). *Тогда для каждого $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ характеристическое уравнение* (2.2) *имеет единственное решение $p_i>0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого фиксированного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ рассмотрим функцию:

$$\chi_i(p) := \int_0^\infty K_i(t)e^{-pt}dt - \frac{1}{2}\alpha^{1/n}, \quad p \in \mathbb{R}^+. \tag{2.3}$$

Очевидно, что $\chi_i \in C(\mathbb{R}^+)$. Из условий A)–C) немедленно следует, что

$$\chi_i(0) = \int_0^\infty K_i(t)dt - \frac{1}{2}\alpha^{1/n} = \frac{1}{2}\big(1 - \alpha^{1/n}\big) > 0, \quad \chi_i(+\infty) := \lim_{p\to+\infty}\chi_i(p) = -\frac{1}{2}\alpha^{1/n} < 0.$$

Так как $K_i(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то из (2.3) вытекает, что $\chi_i(p) \downarrow$ по p на $\mathbb{R}^+$. Следовательно, согласно известной теореме Больцано (см. [11]) существует единственное положительное число $p := p_i > 0$ такое, что $\chi_i(p_i) = 0$. Лемма доказана.

Зафиксируем полученные положительные числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Следующая лемма, доказательство которой содержится в недавней работе одного из авторов (см. [8]), играет важную роль в наших дальнейших рассуждениях.

Лемма 2.3 [8]. *При условиях* A)–C) *имеют место следующие неравенства*:

$$\int_0^\infty (K_i(x-t) - K_i(x+t))\,(1 - e^{-p_i t})dt \geq \alpha^{1/n}(1 - e^{-p_i x}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

2.3. Предельный переход в операции типа свертки

Ниже приведем важный факт о предельном переходе в операции свертки.

Известно, что (см., например, [12]) если $0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, а $\psi \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$ и существует $\lambda := \lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t) < +\infty$, то существует

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^\infty K(t-\tau)\psi(\tau)d\tau = \lambda\int_{-\infty}^\infty K(u)du < +\infty. \tag{2.4}$$

Из этого предельного соотношения легко следует, что при условиях A)–C) если $\psi \in L_\infty(\mathbb{R}^+)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t) = \lambda < +\infty$, то для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеет место равенство

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^\infty [K_i(x-t) - K_i(x+t)]\,\psi(t)dt = \lambda. \tag{2.5}$$

Действительно, сперва заметим, что

$$\left|\int_0^\infty K_i(x+t)\psi(t)dt\right| \leq \int_0^\infty K_i(x+t)\,|\psi(t)|\,dt \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\big|\psi(t)\big|\int_0^\infty K_i(x+t)dt$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}^+}|\psi(t)|\int_x^\infty K_i(u)du \to 0, \text{ когда } x \to +\infty.$$

С другой стороны, в силу (2.4) и A)–C) имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^\infty K_i(x-t)\psi(t)dt = \lambda\int_{-\infty}^\infty K(x)dx = \lambda, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно (2.5) выполняется. Предельное соотношение (2.5) существенным образом будет использовано в дальнейшем.

3. О нетривиальной разрешимости уравнения (2.1)

3.1. Последовательные приближения для уравнения (2.1). Монотонность по номеру, непрерывность каждой итерации

Для уравнения (2.1) рассмотрим последовательные приближения

$$Q(f^{(m+1)}(x_1,\dots,x_n))=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\Big(\prod_{i=1}^{n}(K_i(x_i-t_i)-K_i(x_i+t_i))\Big)f^{(m)}(t_1,\dots,t_n)dt_n\dots dt_1,$$
$$f^{(0)}(x_1,\dots,x_n)=\eta,\quad m=0,1,\dots,\quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+, \tag{3.1}$$

где $\eta>0$ — первый положительный корень уравнения $Q(u)=u$. Индукцией по m убедимся, что

$$f^{(m)}(x_1,x_2,\dots,x_n)\downarrow \text{по } m \quad \text{и} \quad f^{(m)}(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge 0,$$
$$m=0,1,2,\dots,\quad (x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+. \tag{3.2}$$

В случае $m=0$ неравенство (3.2) очевидно. Из (3.1), в силу того что $Q(u)\uparrow$ по u на $[0,\eta]$ и $Q(0)=0$ (последнее вытекает из непрерывности и нечетности функции Q на $\mathbb{R}$), имеем

$$Q(f^{(1)}(x_1,x_2,\dots,x_n))=\eta\prod_{j=1}^{n}\Big(\int\limits_{-\infty}^{x_j}K_j(u)du-\int\limits_{x_j}^{\infty}K_j(u)du\Big)\ge 0=Q(0)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f^{(1)}(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge 0,$$
$$Q(f^{(1)}(x_1,x_2,\dots,x_n))\le\eta=Q(\eta)\Rightarrow f^{(1)}(x_1,x_2,\dots,x_n)\le f^{(0)}(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Предполагая, что утверждение (3.2) имеет место при некотором натуральном m, снова используя монотонность функции Q, равенство $Q(0)=0$ и следующее легко проверяемое неравенство для ядерных функций $\{K_i(x)\}_{i=1}^n$:

$$K_i(x-t)\ge K_i(x+t),\quad i=1,2,\dots,n,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{3.3}$$

(которое немедленно следует из условий A)–C)), из (3.1) будем иметь

$$Q(f^{(m+1)}(x_1,\dots,x_n))\ge 0=Q(0)\Rightarrow f^{(m+1)}(x_1,\dots,x_n)\ge 0,$$
$$Q(f^{(m+1)}(x_1,\dots,x_n))\le\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\Big(\prod_{i=1}^{n}(K_i(x_i-t_i)-K_i(x_i+t_i))\Big)f^{(m-1)}(t_1,\dots,t_n)dt_n\dots dt_1$$
$$=Q(f^{(m)}(x_1,\dots,x_n))\Rightarrow f^{(m+1)}(x_1,\dots,x_n)\le f^{(m)}(x_1,\dots,x_n).$$

Индукцией по m также можно убедиться, что $f^{(m)}\in C(\mathbb{R}^n_+)$. Действительно, в случае $m=0$ оно очевидно. Предполагая, что $f^{(m)}\in C(\mathbb{R}^n_+)$, используя при этом суммируемость и ограниченность ядерных функций $\{K_i(x)\}_{i=1}^n$ на $\mathbb{R}$, а также непрерывность и монотонность функции Q в (3.1) путем замены переменных $x_j-t_j=u_j$, $j=1,2,\dots,n$, получаем, что $f^{(m+1)}\in C(\mathbb{R}^n_+)$. Из (3.2) следует поточечная сходимость последовательности функций $\{f^{(m)}(x_1,x_2,\dots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$:

$$\lim_{m\to\infty}f^{(m)}(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Однако следует отметить, что неотрицательность каждого элемента из последовательности $\{f^{(m)}(x_1,x_2,\dots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$ вовсе не обеспечивает нетривиальность предельной функции $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$. С этой целью в следующем подразделе мы докажем одно важное неравенство для последовательности $\{f^{(m)}(x_1,x_2,\dots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$, из которого будет следовать, что

$$\text{и}\ \ f(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge 0,\ \ \text{и}\ \ f(x_1,x_2,\dots,x_n)\not\equiv 0.$$

3.2. Нижняя оценка для последовательности функций $\{f^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}_{m=0}^{\infty}$

Убедимся в справедливости следующей оценки снизу:

$$f^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \xi(1 - e^{-p_1 x_1})(1 - e^{-p_2 x_2}) \ldots (1 - e^{-p_n x_n}),$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.4}$$

где положительные числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ определяются из характеристических уравнений (2.2), а число ξ — из условий I)–III), наложенных на функцию Q.

В случае $m = 0$ неравенство (3.4) следует из принадлежности $\xi \in (0, \eta)$. Предположим, что оценка (3.4) имеет место при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда в силу леммы 2.3, неравенства (3.3), условий I)–III) из (3.1) будем иметь

$$Q(f^{(m+1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \geq \xi \prod_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} (K_j(x_j - t_j) - K_j(x_j + t_j)) (1 - e^{-p_j t_j}) dt_j$$

$$\geq \xi \prod_{j=1}^{n} \left(\alpha^{1/n}(1 - e^{-p_j x_j})\right) = \alpha\xi(1 - e^{-p_1 x_1})(1 - e^{-p_2 x_2}) \ldots (1 - e^{-p_n x_n})$$

$$\geq Q\big(\xi(1 - e^{-p_1 x_1})(1 - e^{-p_2 x_2}) \ldots (1 - e^{-p_n x_n})\big),$$

откуда ввиду монотонности функции Q получим, что

$$f^{(m+1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \xi(1 - e^{-p_1 x_1})(1 - e^{-p_2 x_2}) \ldots (1 - e^{-p_n x_n}).$$

В неравенстве (3.4), устремляя $m \to \infty$, получаем для предельной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ следующее неравенство снизу:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \xi(1 - e^{-p_1 x_1})(1 - e^{-p_2 x_2}) \ldots (1 - e^{-p_n x_n}), \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+.$$

Согласно предельной теореме Б. Леви (см. [13]) f удовлетворяет уравнению (2.1). Теперь на основе вышеизложенного можем утверждать следующее.

Теорема 3.1. *При условиях* I)–III) *и* A)–C) *уравнение* (2.1) *обладает нетривиальным ограниченным и по каждому аргументу монотонно неубывающим решением* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, причем*

$$\xi(1 - e^{-p_1 x_1})(1 - e^{-p_2 x_2}) \ldots (1 - e^{-p_n x_n}) \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \eta, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+, \tag{3.5}$$

где числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *определяются из характеристических уравнений* (2.2)*, а числа* ξ *и* η *— из условий, налагаемых на функцию* Q*.*

3.3. Монотонность предельной функции

Сперва индукцией по m докажем, что если $x_j > \tilde{x}_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$f^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \geq f^{(m)}(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \tilde{x}_j, x_{j+1}, \ldots, x_n). \tag{3.6}$$

При $m = 0$ неравенство (3.6) очевидно. Предполагая, что (3.6) имеет место при некотором $m \in \mathbb{N}$ и записывая итерации (3.1) следующим образом:

$$Q(f^{(m+1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{x_j} \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} (K_1(x_1 - t_1) - K_1(x_1 + t_1))$$

$$\times\left(K_2(x_2-t_2)-K_2(x_2+t_2)\right)\dots\left(K_{j-1}(x_{j-1}-t_{j-1})-K_{j-1}(x_{j-1}+t_{j-1})\right)$$
$$\times(K_j(u)-K_j(2x_j-u))\left(K_{j+1}(x_{j+1}-t_{j+1})-K_{j+1}(x_{j+1}+t_{j+1})\right)\dots\left(K_n(x_n-t_n)-K_n(x_n+t_n)\right)$$
$$\times f(t_1,\dots,t_{j-1},x_j-u,t_{j+1},\dots,t_n)dt_n\dots dt_{j+1}dudt_{j-1}\dots dt_1,$$
$$f^{(0)}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\eta,\quad m=0,1,2,\dots,$$

будем иметь

$$Q(f^{(m+1)}(x_1,x_2,\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n))$$
$$\geq\int\limits_0^\infty\dots\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{\tilde{x_j}}\int\limits_0^\infty\dots\int\limits_0^\infty\left(K_1(x_1-t_1)-K_1(x_1+t_1)\right)\dots\left(K_{j-1}(x_{j-1}-t_{j-1})-K_{j-1}(x_{j-1}+t_{j-1})\right)$$
$$\times(K_j(u)-K_j(2\tilde{x_j}-u))\left(K_{j+1}(x_{j+1}-t_{j+1})-K_{j+1}(x_{j+1}+t_{j+1})\right)\dots\left(K_n(x_n-t_n)-K_n(x_n+t_n)\right)$$
$$\times f^{(m)}(t_1,\dots,t_{j-1},\tilde{x_j}-u,t_{j+1},\dots,t_n)dt_n\dots dt_{j+1}dudt_{j-1}\dots dt_1$$
$$=Q(f^{(m+1)}(x_1,\dots,x_{j-1},\widetilde{x_j},x_{j+1},\dots,x_n)).$$

Из полученного неравенства с учетом монотонности функции Q выводим

$$f^{(m+1)}(x_1,\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n)\geq f^{(m+1)}(x_1,\dots,x_{j-1},\tilde{x_j},x_{j+1},\dots,x_n).$$

3.4. Непрерывность предельной функции f

Здесь мы докажем, что $f\in C(\mathbb{R}^n_+)$. Для простоты изложения доказательство проведем для случая $n=2$. Пусть $x^*=(x_1^*,x_2^*)\in\mathbb{R}^2_+$ — произвольная точка, а $\{x^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)})\}_{m=0}^\infty$ — последовательность точек из $\mathbb{R}^2_+$, пределом которой является $x^*=(x_1^*,x_2^*)$:

$$\|x^{(m)}-x^*\|=\sqrt{\left(x_1^{(m)}-x_1^*\right)^2+\left(x_2^{(m)}-x_2^*\right)^2}\to 0,\ \text{когда}\quad m\to\infty. \tag{3.7}$$

Тогда, во-первых, из (3.7) следует, что $0\leq|x_i^{(m)}-x_i^*|\leq\|x^{(m)}-x^*\|\to 0$ при $m\to\infty$, $\quad i=1,2$. Далее, учитывая A) и (3.5), из уравнения (2.1) при $n=2$ будем иметь

$$\left|Q(f(x_1^{(m)},x_2^{(m)}))-Q(f(x_1^*,x_2^*))\right|$$
$$=\Bigg|\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\left(K_1(x_1^{(m)}-t_1)-K_1(x_1^{(m)}+t_1)\right)\left(K_2(x_2^{(m)}-t_2)-K_2(x_2^{(m)}+t_2)\right)f(t_1,t_2)dt_2dt_1$$
$$-\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\left(K_1(x_1^*-t_1)-K_1(x_1^*+t_1)\right)\left(K_2(x_2^*-t_2)-K_2(x_2^*+t_2)\right)f(t_1,t_2)dt_2dt_1\Bigg|$$
$$\leq\int\limits_0^\infty\left(K_1(x_1^{(m)}-t_1)-K_1(x_1^{(m)}+t_1)\right)$$
$$\times\left|\int\limits_0^\infty\left(K_2(x_2^{(m)}-t_2)-K_2(x_2^*-t_2)+K_2(x_2^*+t_2)-K_2(x_2^{(m)}+t_2)\right)f(t_1,t_2)dt_2\right|dt_1$$
$$+\int\limits_0^\infty\left(K_2(x_2^*-t_2)-K_2(x_2^*+t_2)\right)$$

$$\times\left|\int\limits_0^\infty\Big(K_1(x_1^{(m)}-t_1)-K_1(x_1^*-t_1)+K_1(x_1^*+t_1)-K_1(x_1^{(m)}+t_1)\Big)f(t_1,t_2)dt_1\right|dt_2$$

$$\leq \eta\int\limits_0^\infty\big|K_2(x_2^{(m)}-t_2)-K_2(x_2^*-t_2)\big|dt_2+\eta\int\limits_0^\infty\big|K_2(x_2^*+t_2)-K_2(x_2^{(m)}+t_2)\big|dt_2$$

$$+\,\eta\int\limits_0^\infty\big|K_1(x_1^{(m)}-t_1)-K_1(x_1^*-t_1)\big|dt_1+\eta\int\limits_0^\infty\big|K_1(x_1^*+t_1)-K_1(x_1^{(m)}+t_1)\big|dt_1\to 0,$$

когда $\|x^m-x^*\|\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0$ в силу теоремы Лебега.

Таким образом, из вышеприведенных суждений следует, что

$$Q(f(x_1^{(m)},x_2^{(m)}))\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}Q(f(x_1^*,x_2^*)).$$

В силу непрерывности и монотонности функции Q приходим к предельному соотношению

$$\lim_{m\to+\infty}f(x_1^{(m)},x_2^{(m)})=f(x_1^*,x_2^*),$$

из которого получаем непрерывность на $\mathbb{R}_+^2$ по совокупности аргументов решения $f(x_1,x_2)$ уравнения (2.1) (при $n=2$). Доказательство непрерывности в случае $n>2$ осуществляется аналогичными рассуждениями.

Итак, справедлива

Теорема 3.2. *При условиях теоремы* 3.1 *построенное решение уравнения* (2.1) *обладает свойством монотонности по каждому аргументу и является непрерывным на* $\mathbb{R}_+^n$ *по совокупности своих аргументов.*

З а м е ч а н и е 3.1. Так как $f^{(m)}\in C(\mathbb{R}_+^n)$, $m=0,1,2,\ldots$, $f\in C(\mathbb{R}_+^n)$, то в силу известной теоремы Дини [11] можем утверждать, что сходимость последовательности функций $\{f^{(m)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}_{m=0}^\infty$ к $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в каждом компакте из $\mathbb{R}_+^n$ равномерна.

В следующем разделе мы вычислим предел решения уравнения (2.1) и сформулируем основной результат настоящей работы.

4. Основной результат

4.1. Предел решения

Из ограниченности и монотонности по каждому аргументу x_j, $j=1,2,\ldots,n$, предельной функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ следует существование предела, т. е.

$$\lambda:=\lim_{x_1\to+\infty}\lim_{x_2\to+\infty}\ldots\lim_{x_n\to+\infty}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)<+\infty.$$

Учитывая (2.5) и последовательно переходя к пределу в (2.1), когда $x_n\to+\infty$, $x_{n-1}\to+\infty,\ldots$, $x_1\to+\infty$, в силу непрерывности функции Q получим

$$Q(\lambda)=\lambda.$$

Поскольку $\lambda\in(0,\eta]$ и число η является первым положительным корнем уравнения $Q(u)=u$, то $\lambda=\eta$.

Таким образом, учитывая полученные результаты для уравнения (2.1), лемму 2.1 и нечетность функции Q, выводим, что существует нетривиальное ограниченное непрерывное и монотонное по каждому аргументу $x_j, j = 1, 2, \ldots, n$, решение уравнения (1.1), причем если хотя бы одна из координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна нулю, то $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ и

$$\lim_{|x_1|\to+\infty} \lim_{|x_2|\to+\infty} \ldots \lim_{|x_n|\to+\infty} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \eta, & \text{если} \ \ l > 0, \\ -\eta, & \text{если} \ \ l < 0, \end{cases}$$

где $l = x_1 x_2 \ldots x_n$.

4.2. n-параметрическое семейство решений уравнения (1.1)

Ниже докажем, что построенное решение $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнения (1.1) порождает n-параметрическое семейство нетривиальных решений.

С этой целью убедимся, что функция

$$F_{c_1,c_2,\ldots,c_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \varphi(x_1 + c_1, x_2 + c_2, \ldots, x_n + c_n)$$

при любых $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ также является решением уравнения (1.1). Действительно, из (1.1) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x_1 - t_1)K_2(x_2 - t_2) \ldots K_n(x_n - t_n)F_{c_1,c_2,\ldots,c_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)dt_n dt_{n-1} \ldots dt_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x_1 + c_1 - u_1)K_2(x_2 + c_2 - u_2) \ldots K_n(x_n + c_n - u_n)\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)du_n \ldots du_1$$

$$= Q(\varphi(x_1 + c_1, x_2 + c_2, \ldots, x_n + c_n)) = Q(F_{c_1,c_2,\ldots,c_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *При условиях* I)–III *и* A)–C) *уравнение* (1.1) *обладает* n*-параметрическим семейством нетривиальных непрерывных ограниченных по каждому аргументу решений* $\{F_{c_1,c_2,\ldots,c_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}_{c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{R}}$, *причем*

$$\lim_{|x_1|\to+\infty} \lim_{|x_2|\to+\infty} \ldots \lim_{|x_n|\to+\infty} F_{c_1,c_2,\ldots,c_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \eta, & \textit{если} \ \ l > 0, \\ -\eta, & \textit{если} \ \ l < 0, \end{cases} \quad \forall c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

З а м е ч а н и е 4.1. Прямой проверкой можно убедиться, что уравнение (1.1) наряду с решениями $\{F_{c_1,c_2,\ldots,c_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}_{c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{R}}$ обладает также решением вида

$$\Phi_{c_1,c_2,\ldots,c_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -F_{c_1,c_2,\ldots,c_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Этот факт сразу следует из нечетности функции Q.

5. Одно дополнительное свойство построенных решений при $n = 2$

5.1. Суммируемость последовательности функций $\{\eta - f^{(m)}(+\infty, x_2)\}_{m=0}^{\infty}$ и $\{\eta - f^{(m)}(x_1, +\infty)\}_{m=0}^{\infty}$

Рассмотрим уравнение (2.1) и последовательные приближения вида (3.1) при $n = 2$. На функцию Q вместо условия II) наложим выполнение следующего (более сильного) условия: существует число $a \in (0, 1]$ такое, что

$$0 \le Q(u) \le \frac{au^3}{\eta^2} + (1 - a)u, \quad u \in [0, \eta]. \tag{5.1}$$

При условиях I), III), (5.1) и A)–C) по индукции докажем, что

$$\eta - f^{(m)}(+\infty, x_2) \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{5.2}$$

$$\eta - f^{(m)}(x_1, +\infty) \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad m = 0, 1, 2, \dots. \tag{5.3}$$

Докажем, например, включения (5.2). При $m = 0$ включение (5.2) очевидно. Предположим, что $\eta - f^{(m)}(+\infty, x_2) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая (3.5), (5.1), (2.5) и условия A)–C), из (3.1) (при $n = 2$) будем иметь

$$0 \le \eta - \frac{a\left(f^{(m+1)}(+\infty, x_2)\right)^3}{\eta^2} + (1-a) f^{(m+1)}(+\infty, x_2) \le \eta - Q(f^{(m+1)}(+\infty, x_2))$$

$$= \eta - \int_0^\infty \big(K_2(x_2 - t_2) - K_2(x_2 + t_2)\big) f^{(m)}(+\infty, t_2) \int_{-\infty}^\infty K_1(u) du dt_2$$

$$\le 2\eta \int_{x_2}^\infty K_2(t) dt + \int_0^\infty K_2(x_2 - t_2)\big(\eta - f^{(m)}(+\infty, t_2)\big) dt_2; \quad x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Из полученного неравенства, в частности, следует, что

$$a\big(\eta^3 - \big(f^{(m+1)}(+\infty, x_2)\big)^3\big) + (1-a)\eta^2\big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty, x_2)\big)$$

$$\le 2\eta^3 \int_{x_2}^\infty K_2(t) dt + \eta^2 \int_0^\infty K_2(x_2 - t_2)\big(\eta - f^{(m)}(+\infty, t_2)\big) dt_2, \quad x_2 \in \mathbb{R}^+$$

откуда имеем

$$0 \le \eta^2 (\eta - f^{(m+1)}(+\infty, x_2))$$

$$\le (\eta - f^{(m+1)}(+\infty, x_2)) \left(\eta^2 + a\eta f^{(m+1)}(+\infty, x_2)) + a\big(f^{(m+1)}(+\infty, x_2)\big)^2\right)$$

$$\le 2\eta^3 \int_{x_2}^\infty K_2(t) dt + \eta^2 \int_0^\infty K_2(x_2 - t_2)\big(\eta - f^{(m)}(+\infty, t_2)\big) dt_2. \tag{5.4}$$

Так как в силу условия C) $\int_{x_2}^\infty K_2(t) dt \in L_1(\mathbb{R}^+)$ (последнее включение получается применением теоремы Фубини [13]), то из (5.4) в силу индукционного предположения имеем, что $\eta - f^{(m+1)}(+\infty, x_2) \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Аналогично доказываются (5.3) включения.

5.2. Равномерные интегральные оценки

Так как $K_2(x) > 0$ и $\int_{-\infty}^\infty K_2(x) dx = 1$, то для любого конечного положительного числа $r > 0$

$$h(r) := \int_{-\infty}^r K_2(u) du < 1.$$

Интегрируя обе части неравенства (5.4) по x_2 в пределах от 0 до $+\infty$, учитывая монотонность по m функциональной последовательности $\{f^{(m)}(+\infty, x_2)\}_{m=0}^\infty$, будем иметь

$$\int_0^\infty \left(\eta - f^{(m+1)}(+\infty, x_2)\right) \left(\eta^2 + a\eta f^{(m+1)}(+\infty, x_2) + a\big(f^{(m+1)}(+\infty, x_2)\big)^2\right) dx_2$$

$$\leq 2\eta^3 \int\limits_0^\infty \int\limits_{x_2}^\infty K_2(t_2)dt_2dx_2 + \eta^2 \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty K_2(x_2-t_2)\big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,t_2)\big)dt_2dx_2$$

$$\leq 2\eta^3 m_2 + \eta^2 \int\limits_0^r \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,t_2)\big) \int\limits_{-\infty}^{t_2} K_2(u)dudt_2$$

$$+ \eta^2 \int\limits_r^\infty \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,t_2)\big)dt_2 \leq 2\eta^3 m_2$$

$$+ \eta^2 h(r) \int\limits_0^r \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,t_2)\big)dt_2 + \eta^2 \int\limits_r^\infty \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,t_2)\big)dt_2.$$

Итак,

$$\int\limits_0^\infty \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,x_2)\big)\Big(\eta^2 + a\eta f^{(m+1)}(+\infty,x_2) + a\big(f^{(m+1)}(+\infty,x_2)\big)^2\Big)dx_2$$

$$\leq 2\eta^3 m_2 + \eta^2 h(r) \int\limits_0^r \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,t_2)\big)dt_2 + \eta^2 \int\limits_r^\infty \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,t_2)\big)dt_2. \tag{5.5}$$

Заметим, что из условий (5.1) следует условие II). Действительно, при выполнении условий (5.1) в качестве α можно выбрать $\alpha = 1 - \dfrac{a}{2}$, а $\xi = \dfrac{\eta}{\sqrt{2}}$. Таким образом, неравенство (3.4) примет следующий вид:

$$f^{(m)}(x_1,x_2) \geq \eta\frac{(1-e^{-p_1x_1})(1-e^{-p_2x_2})}{\sqrt{2}}, \quad m = 0,1,2,\ldots, \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{5.6}$$

В левой части неравенства (5.5), используя (5.6), получим

$$\eta^2 \int\limits_0^r \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,x_2)\big)dx_2 + \Big(\eta^2 + \frac{a\eta^2}{\sqrt{2}}(1-e^{-p_2r}) + \frac{a\eta^2}{2}(1-e^{-p_2r})^2\Big)$$

$$\times \int\limits_r^\infty \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,x_2)\big)dx_2 \leq 2\eta^3 m_2 + \eta^2 h(r) \int\limits_0^r \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,x_2)\big)dx_2$$

$$+ \eta^2 \int\limits_r^\infty \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,x_2)\big)dx_2,$$

откуда следует, что

$$[1-h(r)]\,\eta^2 \int\limits_0^r \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,x_2)\big)dx_2 + \Big(\frac{a\eta^2}{\sqrt{2}}(1-e^{-p_2r}) + \frac{a\eta^2}{2}(1-e^{-p_2r})^2\Big)$$

$$\times \int\limits_r^\infty \big(\eta - f^{(m+1)}(+\infty,x_2)\big)dx_2 \leq 2\eta^3 m_2. \tag{5.7}$$

Обозначим через

$$0 < \varepsilon(r) := \min\Big(\,(1-h(r))\,,\Big(\frac{a}{\sqrt{2}}(1-e^{-p_2r}) + \frac{a}{2}(1-e^{-p_2r})^2\Big)\Big).$$

Тогда из (5.7) получаем следующую равномерную оценку:

$$\int_0^\infty \left(\eta - f^{(m+1)}(+\infty, x_2)\right) dx_2 \le \frac{2\eta m_2}{\varepsilon(r)}. \tag{5.8}$$

Устремляя $m \to \infty$ в (5.8), с учетом теоремы Б. Леви приходим к следующему неравенству для $f(+\infty, x_2)$:

$$\int_0^\infty (\eta - f(+\infty, x_2))\, dx_2 \le \frac{2\eta m_2}{\varepsilon(r)}. \tag{5.9}$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_0^\infty (\eta - f(x_1, +\infty))\, dx_1 \le \frac{2\eta m_1}{\delta(r)}, \quad g(r) := \int_{-\infty}^r K_1(u) du < 1, \tag{5.10}$$

где

$$0 < \delta(r) := \min\left((1 - g(r)), \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1 - e^{-p_1 r}\right) + \frac{a}{2}\left(1 - e^{-p_1 r}\right)^2\right)\right).$$

Из (5.9) и (5.10), в силу того что $f(x_1, x_2) \le \eta, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$, заключаем, что $\eta - f(+\infty, x_2) \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\eta - f(x_1, +\infty) \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Таким образом, комбинируя полученные результаты разд. 5 и при этом используя лемму 2.1, для случая $n = 2$ приходим к следующей теореме.

Теорема 5.1. *При условиях* I), III), (5.1) *и* A)–C) *решение* $\varphi(x_1, x_2)$ *уравнения* (1.1) *при* $n = 2$ *обладает следующими свойствами*:

$$\eta \pm \varphi(+\infty, x_2) \in L_1(\mathbb{R}^\mp), \quad \eta \pm \varphi(-\infty, x_2) \in L_1(\mathbb{R}^\pm),$$

$$\eta \pm \varphi(x_1, +\infty) \in L_1(\mathbb{R}^\mp), \quad \eta \pm \varphi(x_1, -\infty) \in L_1(\mathbb{R}^\pm).$$

З а м е ч а н и е 5.1. Полученные результаты можно обобщить для произвольного натурального n.

6. Некоторые конкретные приложения уравнения (1.1)

6.1. Псевдодифференциальное уравнение в p-адической теории струны

Рассмотрим следующее нелинейное псевдодифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^n$:

$$Q(\psi(t, x_1, x_2, \dots x_{n-1})) = e^A \psi(t, x_1, x_2, \dots x_{n-1}), \quad t, x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \tag{6.1}$$

относительно искомой вещественнозначной функции $\psi(t, x_1, x_2, \dots x_{n-1})$, где A — n-мерный эллиптический оператор вида

$$A := \alpha_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2},$$
$$\alpha_j > 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Дадим уравнению (6.1) точный смысл. Уравнение (6.1) является псевдо-дифференциальным уравнением с символом вида

$$e^{-\alpha_0 \varkappa_0^2 - \alpha_1 \varkappa_1^2 - \cdots - \alpha_{n-1} \varkappa_{n-1}^2}, \quad \varkappa_j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

которое для положительных $\alpha_j > 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, можно представить как нелинейное интегральное уравнение (см. [2]):

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\psi}(\tau, \vec{\xi}) H_{\alpha_0}(t-\tau) e^{-\alpha_1 \xi_1^2 - \cdots - \alpha_{n-1}\xi_{n-1}^2 - i(\vec{x}, \vec{\xi})} d\tau d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1} \\ = Q(\psi(t, x_1, x_2, \ldots x_{n-1})), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,\end{gathered} \tag{6.2}$$

где введены следующие обозначения:

$$\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \quad \vec{\xi} := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}),$$

$$(\vec{x}, \vec{\xi}) := x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_{n-1}\xi_{n-1},$$

$$H_{\alpha_j}(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha_j}} e^{-\frac{u^2}{4\alpha_j}}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

а

$$\tilde{\psi}(\tau, \vec{\xi}) := \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(\tau, \vec{y}) e^{i(\vec{y}, \vec{\xi})} dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}. \tag{6.3}$$

Решение $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ уравнения (6.1) (или (6.2)) следует искать в классе обобщенных функций медленного роста $S'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$. О пространствах $S'(\mathbb{R}^n)$ и $D'(\mathbb{R}^n)$ подробно см., например, в [14]. Уравнение (6.1) возникает в p-адической теории открыто-замкнутых струн в случае, когда функция Q допускает следующие представления (см. [1; 6]):

$$Q(u) = u^p, \quad Q(u) = au^3 + (1-a)u, \quad Q(u) = au^p + (1-a)u,$$

где $p > 2$ — нечетное число, $a \in (0, 1]$ — числовой параметр.

Нетрудно проверить, что вышеприведенные частные примеры функции Q удовлетворяют условиям I)–III) и (5.1). Ниже с помощью некоторых простых выкладок уравнение (6.2) приведем к виду (1.1). С этой целью сперва вычислим следующий интеграл:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\alpha_1\xi_1^2 - \cdots - \alpha_{n-1}\xi_{n-1}^2 - i(\vec{x}, \vec{\xi}) + i(\vec{y}, \vec{\xi})} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{ \sum_{j=1}^{n-1} (-\alpha_j \xi_j^2 - i x_j \xi_j + i y_j \xi_j) \Big\} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha_j \xi_j^2 - i x_j \xi_j + i y_j \xi_j\} d\xi_j$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_j \left(\xi_j - \frac{i(x_j - y_j)}{2\alpha_j}\right)^2} e^{-\frac{(x_j - y_j)^2}{4\alpha_j}} d\xi_j = \pi^{\frac{n-1}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha_j}} e^{-\frac{(x_j - y_j)^2}{4\alpha_j}}.$$

Учитывая полученное соотношение, теорему Фубини из (6.2) и (6.3) будем иметь

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^n} H_{\alpha_0}(t-\tau) H_{\alpha_1}(x_1 - y_1) \ldots H_{\alpha_{n-1}}(x_{n-1} - y_{n-1}) \psi(\tau, y_1, \ldots y_{n-1}) d\tau dy_1 \ldots dy_{n-1} \\ = Q(\psi(t, x_1, \ldots x_{n-1})), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.\end{gathered} \tag{6.4}$$

Заметим, что ядра $\{H_{\alpha_j}(u)\}_{j=0}^{n-1}$ удовлетворяют всем условиям A)–C).

Отметим, что уравнение (6.4) исследовалось в недавней работе одного из авторов (см. [16]).

6.2. Связь с уравнением теплопроводности

Заметим, что уравнение

$$Q(\varphi(x,y,z)) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{P}_a(x-x_1)\mathcal{P}_a(y-y_1)\mathcal{P}_a(z-z_1)\varphi(x_1,y_1,z_1)dx_1dy_1dz_1,$$

$$a>0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \tag{6.5}$$

с ядром $\mathcal{P}_a(u) := \frac{1}{2a\sqrt{\pi T}}e^{-\frac{u^2}{4a^2T}}$, $u\in\mathbb{R}$, эквивалентно следующей задаче для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right), \quad 0<t<T, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$
$$u(x,y,z,T) = Q(u(x,y,z,0)), \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \tag{6.6}$$

Проверим этот простой, но важный факт. Как известно (см. [15]), функция $u(x,y,z,t)$ выражается интегралом Пуассона с помощью $\varphi(x,y,z) := u(x,y,z,0)$:

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}{4a^2t}}\varphi(x_1,y_1,z_1)dx_1dy_1dz_1.$$

В этой формуле подстановкой $t=T$ и с учетом (6.6) приходим к уравнению (6.5). Следует отметить, что этот факт для одномерного уравнения теплопроводности $u_t = a^2u_{xx}$ с функцией $Q(u) = u^p$ получен в работе [2].

Выражаем благодарность рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Volovich I.V.** p-adic string // Classical Quantum Gravity. 1987. Vol. 4, no. 4. P. L83-L87. doi: 10.1088/0264-9381/4/4/003 .
2. **Владимиров В.С., Волович Я.И.** О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Теорет. мат. физика. 2004. Т. 138, №. 3. С. 355–368.
3. **Владимиров В.С.** О нелинейных уравнениях p-адических открытых замкнутых и открыто-замкнутых струн // Теорет. мат. физика. 2006. Т. 149, № 3. С. 354–367.
4. **Владимиров В.С.** О решениях p-адических струнных уравнений // Теорет. мат. физика. 2011. Т. 167, №2. С. 163–170.
5. **Владимиров В.С.** Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2005. Т. 69, № 3. С. 55–80.
6. **Жуковская Л.В.** Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих ролинговые решения в теории струны // Теорет. мат. физика. 2006. Т. 146, №3. С. 402–409.
7. **Хачатрян Х.А.** О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнениий в теории p-адической струны // Изв. РАН. Сер. математическая. 2018. Т. 82, № 2. С. 173–194.
8. **Хачатрян Х.А.** О разрешимости одной граничной задачи в p-адической теории струн // Тр. Московского математического общества. 2018. Т. 79, № 1. С. 117–132.
9. **Khachatryan Kh.A., Avetisyan M.H.**. On solvability of one infinite nonlinear system of algebraic equations with Teoplitz-Hankel matrices // Proc. Yerevan State Univ. 2017. Vol 51, no. 2. P. 158–167.
10. **Хачатрян Х.А., Терджян Ц.Э., Аветисян М.О.** Однопараметрическое семейство ограниченных решений для одной системы нелинейных интегральных уравнений на всей прямой // Изв. НАН Армении. Математика. 2018. Том 53, №4. С. 72–86.
11. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 1966. Т. 2. 800 с.
12. **Геворгян Г.Г., Енгибарян Н.Б.** Новые теоремы для интегрального уравнения восстановления // Изв. НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32, № 1. С. 5–20.
13. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. М.:Наука, 1981. 544 с.

14. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции. Вып. 2: Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматлит, 1958. 310 p.
15. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
16. **Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A.** Solavability of a class of nonlinear pseudo-differential equations in $\mathbb{R}^n$. p // Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 2018. Vol. 10, no 2. P. 90–99. doi: 10.1134/S2070046618020024 .

Хачатрян Хачатур Агавардович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики НАН Армении, г. Ереван
e-mails: Khach82@rambler.ru, Khach82@mail.ru

Поступила 26.06.2018

Петросян Айкануш Самвеловна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Армянский национальный аграрный университет, г. Ереван
e-mail: Haykuhi25@mail.ru

Аветисян Метаксья Овнановна
магистрант
Ереванский государственный университет, г. Ереван
e-mail: avetisyan.metaqsya@mail.ru.

REFERENCES

1. Volovich I.V. p-adic string. *Classical Quantum Gravity*, 1987, vol. 4, no. 4, pp. L83–L87. doi: 10.1088/0264-9381/4/4/003 .
2. Vladimirov V.S., Volovich Ya.I. Nonlinear Dynamics Equation in p-Adic String Theory. *Theoret. Math. Phys.*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. doi: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29 .
3. Vladimirov V.S. Nonlinear equations for p-adic open, closed, and open-closed strings. *Theoret. Math. Phys.*, 2006, vol. 149, no. 3, pp. 1604–1616. doi: 10.1007/s11232-006-0144-z .
4. Vladimirov V.S. Solutions of p-adic string equations. *Theoret. Math. Phys.*, 2011, vol. 167, no. 2, pp. 539–546. doi: 10.1007/s11232-011-0040-z .
5. Vladimirov V.S. The equation of the p-adic open string for the scalar tachyon field. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 487–512. doi: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000536 .
6. Joukovskaya L.V. *Theoret. Math. Phys.*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 335–342. doi: 10.1007/s11232-006-0043-3 .
7. Khachatryan Kh.A. On the solvability of certain classes of non-linear integral equations in p-adic string theory. *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 407–427. doi: 10.1070/IM8580 .
8. Khachatryan Kh.A. On the solvability of a boundary-value problem in p-adic string theory. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 2018, vol. 79, no. 1, pp. 117–132 (in Russian).
9. Khachatryan Kh.A., Avetisyan M.H. On solvability of one infinite nonlinear system of algebraic equations with Teoplitz-Hankel matrices. *Proc. Yerevan State Univ.*, 2017, vol. 51, no. 2, pp. 158–167.
10. Khachatryan Kh.A., Terdzhyan Ts.E., Avetisyan M.O. One-parameter family of bounded solutions for a system of non-linear integral equations on the whole line. *J. Contemporary Math. Analysis* (*Armenian Academy of Sciences*), 2018, vol. 53, no. 4, pp. 201–211.
11. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T.* 2 [Course of differential and integral calculus. Vol. 2]. Moscow: Fizmatlit. Publ., 1966, 800 p. ISBN(10th ed.): 978-5-8114-0674-6 .
12. Gevorkyan G.G., Engibaryan N.B. New theorems for the renewal integral equation. *J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci.*, 1997, vol. 32, no. 1, pp. 2–16.
13. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis. Vol.* 1, 2. Mineola; N Y: Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830 . Original Russian text (5th ed.) published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza.* Moscow: Nauka Publ., 1981, 544 p.

14. Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Generalized Functions, Vol. 2: Spaces of Fundamental and Generalized Functions.* N Y: Academic Press, 1968, 261 p., ISBN: 978-0122795022 . Original Russian text published in Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Obobshchennye funktsii. Vyp. 2. Prostranstva osnovnykh i obobshchennykh funktsii*, Moscow: Fizmatlit. Publ., 1958, 310 p.
15. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 735 p.
16. Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A. Solavability of a class of nonlinear pseudo-differential equations in $\mathbb{R}^n$. *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 90–99. doi: 10.1134/S2070046618020024 .

The paper was received by the Editorial Office on June 26, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of Armenia (project no. SCS 16YR-1A002).

Khachatur Aghavardovich Khachatryan, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia, 0019, Yerevan, Republic of Armenia, e-mail: Khach82@rambler.ru, Khach82@mail.ru .

Haykanush Samvelovna Petrosyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Armenian National Agrarian University, 0009, Yerevan, Republic of Armenia, e-mail: Haykuhi25@mail.ru .

Metaksya Hovnanovna Avetisyan, graduate student, Yerevan State University, 0025, Yerevan, Republic of Armenia, e-mail: avetisyan.metaqsya@mail.ru.