ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 519.16 + 519.85

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ПРИБЛИЖЕННАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ГРУЗОПОДЪЕМНОСТЬ И ВРЕМЕННЫЕ ПРОМЕЖУТКИ ОБСЛУЖИВАНИЯ[1]

М. Ю. Хачай, Ю. Ю. Огородников

Задача маршрутизации транспорта с ограничениями на грузоподъемность и временные промежутки обслуживания (CVRPTW) является широко известной NP-трудной задачей комбинаторной оптимизации. В настоящей работе представлено дальнейшее развитие подхода, описанного впервые в работе М. Хаймовича и А. Ринной Кана. Предложенный алгоритм для произвольного $\varepsilon > 0$ за время $\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP},\rho,n)+O(n^2)+O\big(e^{O(q\,(\frac{q}{\varepsilon})^3(p\rho)^2\log(p\rho))}\big)$ находит $(1+\varepsilon)$-приближенное решение задачи CVRPTW на евклидовой плоскости, где q — верхняя оценка грузоподъемности транспортных средств, p — число промежутков обслуживания (временных окон) и $\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP},\rho,n)$ — трудоемкость поиска ρ-приближенного решения вспомогательной постановки метрической задачи коммивояжера. Тем самым алгоритм является полиномиальной приближенной схемой (PTAS) для постановки задачи CVRPTW, в которой $p^3q^4 = O(\log n)$, и эффективной полиномиальной схемой (EPTAS) при произвольных фиксированных значениях p и q.

Ключевые слова: задача маршрутизации транспорта с ограничением на грузоподъемность, временные окна, эффективная полиномиально приближенная схема.

M. Yu. Khachai, Yu. Yu. Ogorodnikov. Polynomial time approximation scheme for the capacitated vehicle routing problem with time windows.

The capacitated vehicle routing problem with time windows (CVRPTW) is a well-known NP-hard combinatorial optimization problem. We present a further development of the approach first proposed by M. Haimovich and A. H. G. Rinnooy Kan and propose an algorithm that, for an arbitrary $\varepsilon > 0$, finds a $(1+\varepsilon)$-approximate solution for the Eucidean CVRPTW in $\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP},\rho,n) + O(n^2) + O\big(e^{O(q\,(\frac{q}{\varepsilon})^3(p\rho)^2\log(p\rho))}\big)$, where q is an upper bound for the capacities of the vehicles, p is the number of time windows, and $\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP},\rho,n)$ is the complexity of finding a ρ-approximation solution of an auxiliary instance of the Euclidean TSP. Thus, the algorithm is a polynomial time approximation scheme for CVRPTW with $p^3q^4 = O(\log n)$ and an efficient polynomial time approximation scheme (EPTAS) for arbitrary fixed values of p and q.

Keywords: capacitated vehicle routing problem, time windows, efficient polynomial time approximation scheme.

MSC: 90C27, 90C59, 90B06

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-233-246

Введение

Задача маршрутизации транспорта с ограничением грузоподъемности (Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP) является широко известной задачей комбинаторной оптимизации, впервые сформулированной Г. Данцигом и Дж. Рамсером в работе 1959 г. [5]. Задача CVRP представляет теоретический интерес и обладает широким кругом практических приложений в области исследования операций (см., например, [15]).

Как известно, задача CVRP NP-трудна даже на евклидовой плоскости и слабо аппроксимируема в общем случае. Тем не менее для ряда ее геометрических постановок известны как приближенные алгоритмы с теоретическими оценками точности и полиномиальной трудоемкостью, так и аппроксимационные схемы. Большинство результатов в данном направлении восходят к классическим аппроксимационным схемам М. Хаймовича и А. Ринной Кана [7] и

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке РНФ (проект 14-11-00109).

С. Ароры [2]. Среди результатов последних лет отметим квазиполиномиальную приближенную схему (Quasi-Polynomial Time Approximation Scheme, QPTAS) [6] для постановки задачи CVRP на плоскости и эффективную полиномиальную приближенную схему (Euclidean Polynomial Time Approximation Scheme, EPTAS) [9] для случая евклидова пространства произвольной фиксированной размерности $d > 1$.

В работе исследуется специальная постановка задачи CVRP, в которой каждый из потребителей может быть обслужен не в произвольный момент, а в течение заданного (для него) промежутка времени. В литературе подобные дополнительные ограничения принято называть *временными окнами, time windows*, а саму задачу — CVRP с временными окнами (CVRP with Time Windows, CVRPTW).

В последние десятилетия наблюдается существенный прогресс в поиске решений постановок данной задачи, возникающих в практических приложениях (см. обзор [11; 15]). Однако в большинстве своем известные методы, применяемые для решения CVRPTW, имеют эвристическую природу, в то время как алгоритмы с теоретически обоснованными оценками точности и трудоемкости по-прежнему остаются достаточно редкими. По нашим сведениям, перечень таких алгоритмов исчерпывается двумя аппроксимационными схемами для планарной постановки задачи с конечным числом попарно непересекающихся временных окон: квазиполиномиальной приближенной схемой (QPTAS) [13; 14] и эффективной полиномиальной приближенной схемой (EPTAS) для произвольной фиксированной грузоподъемности [8]. Несмотря на то что предложенный в статье [8] алгоритм фактически является первой полиномиальной приближенной схемой для CVRPTW, его трудоемкость[2], равная

$$O(n^3 + \exp(\exp(1/\varepsilon))), \tag{1}$$

по-прежнему чрезвычайно быстро возрастает с увеличением точности, что существенно затрудняет использование его на практике.

Развитие подхода [3] позволило нам в этой статье обосновать аппроксимационную схему, опережающую по производительности результат [8] почти на экспоненту.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 1 посвящен обсуждению математической постановки задачи CVRPTW, а также необходимым определениям и обозначениям. Раздел 2 содержит общую идею и формальное описание предлагаемой аппроксимационной схемы; строгое обоснование оценок ее точности и трудоемкости приводятся в разд. 3. В заключении резюмируются полученные результаты и обсуждаются пути дальнейших исследований.

1. Постановка задачи

Пусть заданы множества потребителей $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ и последовательных непересекающихся промежутков обслуживания (временных окон) $T = \{t_1, \dots, t_p\}$. Множество T предполагается упорядоченным в соответствии с естественным ограничением предшествования: $t_{j_1} \preceq t_{j_2}$, справедливым для произвольных $1 \le j_1 \le j_2 \le p$. Каждый потребитель x_i обладает единичным неделимым спросом, который должен быть удовлетворен в течение заданного временного окна $t(x_i) \in T$. Обслуживание потребителей производится парком идентичных транспортных средств, обладающих одинаковой грузоподъемностью q. Маршрут каждого из задействованных транспортных средств начинается и заканчивается в точке x_0, именуемой *складом* или *депо*. Задача состоит в построении семейства маршрутов, удовлетворяющих спрос каждого из потребителей в течение соответствующего временного окна при ограничении на грузоподъемность и минимизирующих совокупные транспортные издержки.

[2]При условии, что для решения внутренней задачи коммивояжера применяется алгоритм Кристофидеса — Сердюкова [4; 12]. Всюду в дальнейшем будем предполагать это условие выполненным.

Остановимся на математической постановке задачи CVRPTW. Пусть заданы взвешенный полный ориентированный граф $G = (X \cup \{x_0\}, E, w)$, разбиение

$$X_1 \cup \ldots \cup X_p = X \tag{2}$$

и грузоподъемность $q \in \mathbb{N}$. Простой замкнутый маршрут вида $R = x_0, x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, x_0$ в орграфе G называется *допустимым*, если он удовлетворяет ограничениям на грузоподъемность и заданным значениям временных окон:

$$s \leq q, \qquad t(x_{i_j}) \preceq t(x_{i_{j+1}}).$$

Транспортные издержки $w(x_i, x_j)$ для каждой пары $(x_i, x_j) \in E$ задаются неотрицательной весовой функцией w. С ее помощью вес маршрута R может быть представлен в виде

$$w(R) = w(x_0, x_{i_1}) + \sum_{j=1}^{s-1} w(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) + w(x_{i_s}, x_0).$$

Каждый элемент разбиения (2) состоит в точности из тех потребителей x, которые должны быть обслужены в течение одного и того же временного окна $t(x) = t_j \in T$. Задача состоит в поиске множества допустимых маршрутов $S = \{R_1, \ldots, R_l\}$, посещающих каждого потребителя в точности один раз и доставляющих наименьшие суммарные транспортные издержки

$$w(S) = \sum_{i=1}^{l} w(R_i). \tag{3}$$

Если весовая функция w симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника, то задача CVRPTW называется *метрической*, а веса $w(x_i, x_j)$ — расстояниями между точками x_i и x_j. В данной работе рассматривается евклидова постановка CVRPTW, в которой $X \cup \{x_0\} \subset \mathbb{R}^2$ и $w(x_i, x_j) = \|x_i - x_j\|_2$.

2. Аппроксимационная схема

Предлагаемая в данной статье аппроксимационная схема обобщает результаты статьи [8], в основе которых лежит классический подход к поиску приближенного решения задачи CVRP, предложенный М. Хаймовичем и А. Ринной Каном в работе [7] и основанный на декомпозиции рассматриваемой задачи. В рамках этого подхода множество потребителей разбивается на два подмножества *внешних* и *внутренних* клиентов в соответствии с их удаленностью от склада x_0. Для внешних потребителей задача CVRPTW решается точно методом динамического программирования, в то время как для внутренних строится приближенное решение с помощью известной эвристики итеративного разбиения маршрутов (Iterated Tour Partition, ITP).

Развивая подход, предложенный в [3], мы обосновали аппроксимационную схему, трудоемкость которой сохраняется полиномиальной в более широкой области параметров $p^3q^4 = O(\log n)$. При произвольных фиксированных $p \geq 1$ и $q \geq 1$ трудоемкость предложенной схемы составляет

$$O(n^3 + \exp(O(1/\varepsilon^3)),$$

что представляется серьезным улучшением по сравнению с результатом (1) работы [8].

Для описания основной идеи алгоритма введем вспомогательную задачу о частичной маршрутизации транспорта с ограничениями на грузоподъемность и временные окна (задача Partial CVRPTW, PCVRPTW).

По аналогии с CVRPTW постановка задачи PCVRPTW определяется взвешенным орграфом $G = (X \cup \{x_0\}, E, w)$, разбиением множества потребителей на непересекающиеся подмножества $X_1 \cup \ldots \cup X_p = X$, соответствующие временным окнам, и фиксированной грузоподъемностью q транспортных средств. В отличие от CVRPTW цель задачи PCVRPTW состоит в посещении не всего множества потребителей X, а лишь некоторого его *привилегированного* подмножества $Q \subset X$. Посещение остальных потребителей, именуемых *опциональными*, не является обязательным, однако пропуск каждого из них штрафуется соответствующим слагаемым в целевой функции, определяемой следующим образом. Зафиксируем произвольное допустимое решение $S = \{R_1, \ldots, R_l\}$. Через $X[S]$ и $\bar{X}[S]$ обозначим множества посещенных (по условию, $Q \subseteq X[S]$) и непосещенных потребителей. Соответствующее значение целевой функции задается соотношением

$$\mathrm{cost}(S) = w(S) + \frac{2}{q} \sum_{x \in \bar{X}[S]} r(x), \tag{4}$$

где $w(S)$ соответствует совокупным транспортным издержкам (3), $r(x) = w(x_0, x)$ обозначает расстояние между необслуженным потребителем x и складом x_0.

В дальнейшем всюду, где это не будет вызывать разночтений, постановки задач CVRPTW и PCVRPTW, задаваемые множеством потребителей X и подмножеством $Q \subseteq X$, договоримся обозначать как CVRPTW(X) и PCVRPTW(X, Q), а их оптимальные значения — через CVRPTW*(X) и PCVRPTW*(X, Q) соответственно.

Изложим основную идею предлагаемой аппроксимационной схемы, формальное описание которой приведено в алгоритме 1.

1. Для заданной точности $\varepsilon > 0$ переупорядочим элементы множества X в соответствии с убыванием расстояний $r_i = r(x_i) = w(x_0, x_i)$ до склада x_0. Для фиксированных $k \leq k'$, определяемых по формулам (5) и (6) соответственно, разобьем множество X на три непересекающихся подмножества $X_{out} = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$, $X_{mid} = \{x_k, \ldots, x_{k'-1}\}$ и $X_{in} = \{x_{k'}, \ldots, x_n\}$, т. е. на *внешних*, *промежуточных* и *внутренних* потребителей. Принципиальным моментом является то, что числа k и k' определяются исключительно точностью ε, грузоподъемностью q и количеством временных окон p и не зависят от числа потребителей n и их взаимного расположения.

2. Для поиска оптимального решения U задачи PCVRPTW($X_{out} \cup X_{mid}, X_{out}$) как вспомогательной применим алгоритм 2. Как и в схеме [8], процедура поиска оптимального решения не зависит от числа потребителей n, но является более эффективной.

3. По построению множество потребителей $\bar{X}[U]$, не посещенных решением U, включает подмножество X_{in} целиком и может содержать некоторое число потребителей из X_{mid}. Применив модификацию эвристики ITP (алгоритм 3), найдем приближенное решение задачи CVRPTW($\bar{X}[U]$).

4. Таким образом, постановке CVRPTW(X) схема сопоставляет комбинированное приближенное решение $S_{APP} = U \cup S_{ITP}$.

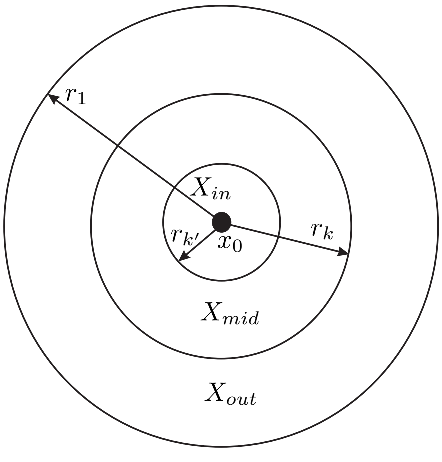


Рис. 1. Разбиение множества X на подмножества внешних, промежуточных и внутренних потребителей.

Алгоритм 1. Аппроксимационная схема для евклидовой CVRPTW

Input: постановка евклидовой задачи CVRPTW, заданная полным взвешенным орграфом $G(X \cup \{x_0\}, E, w)$, грузоподъемностью q и разбиением $X_1 \cup \ldots \cup X_p = X$
Parameters: $\varepsilon \in (0,1)$, $\rho \geq 1$
Output: $(1+\varepsilon)$-приближенное решение S_{APP} постановки CVRPTW(X)

1: упорядочить потребителей по убыванию расстояний до склада $r_1 \geq \ldots \geq r_n$

2: для заданного ε найти наименьшее целое $k \leq n$, такое что

$$r_k \leq \left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2 \frac{1}{64\pi(p\rho)^2} \sum_{i=1}^{n} r_i \tag{5}$$

3: по аналогии найти наименьшее целое $k \leq k' \leq n$, для которого

$$4(k'-1)\, r_{k'} \leq \frac{\varepsilon}{q} \sum_{i=1}^{n} r_i \tag{6}$$

4: разбить множество X на подмножества $X_{out} = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$, $X_{mid} = \{x_k, \ldots, x_{k'-1}\}$ и $X_{in} = X \setminus \{X_{out} \cup X_{mid}\}$, как показано на рис. 1

5: применив алгоритм 2, найти оптимальное решение U подзадачи PCVRPTW$(X_{out} \cup X_{mid}, X_{out})$, заданной подграфом $G\langle X_{out} \cup X_{mid} \cup \{x_0\}\rangle$, разбиением

$$(X_1 \cup \ldots \cup X_p) \cap (X_{out} \cup X_{mid})$$

и грузоподъемностью q

6: используя алгоритм 3, найти приближенное решение S_{ITP} для подзадачи CVRPTW$(\bar{X}[U])$

7: выдать решение $S_{\mathrm{APP}} = U \cup S_{\mathrm{ITP}}$.

2.1. Точный алгоритм для PCVRPTW

Зафиксируем произвольные непустые множества Y и $Q \subset Y$ и зададимся определяемой ими постановкой PCVRPTW(Y, Q) вспомогательной задачи. Основная идея алгоритма 2 базируется на следующих наблюдениях.

1. Поскольку порядок маршрутов произвольного решения $S = \{R_1, \ldots, R_l\}$ не влияет на его допустимость, без ограничения общности мы можем полагать, что маршруты упорядочены по убыванию числа посещенных потребителей $q_j \leq q$.

2. По условию, произвольный потребитель $x \in Q$ должен быть посещен в точности единожды. Кроме того, как непосредственно следует из приведенной ниже леммы 1, каждый маршрут оптимального решения задачи PCVRPTW(Y, Q) обязан посещать хотя бы одного потребителя из Q. Поэтому всюду ниже ограничимся рассмотрением решений, удовлетворяющих соотношению $l \leq b = |Q|$.

Как следует из вышеизложенных наблюдений, каждому решению S можно сопоставить *паттерн* $\lambda = \lambda(S) = q_1, \ldots, q_l$, в котором $q \geq q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_l \geq 1$ и $l \leq b$.

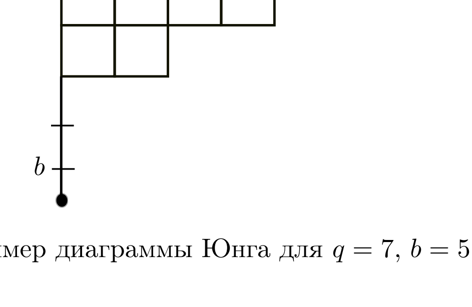


Рис. 2. Пример диаграммы Юнга для $q = 7$, $b = 5$ и $\lambda = 5, 4, 2$.

Алгоритм 2. Точный алгоритм для решения PCVRPTW(Y, Q)

Input: постановка задачи PCVRPTW, заданная полным графом $G(Y \cup \{y_0\}, E, w)$, грузоподъемностью q, разбиением $Y_1 \cup \ldots \cup Y_p = Y$ и подмножеством $Q \subset Y$ клиентов, обязательных для посещения

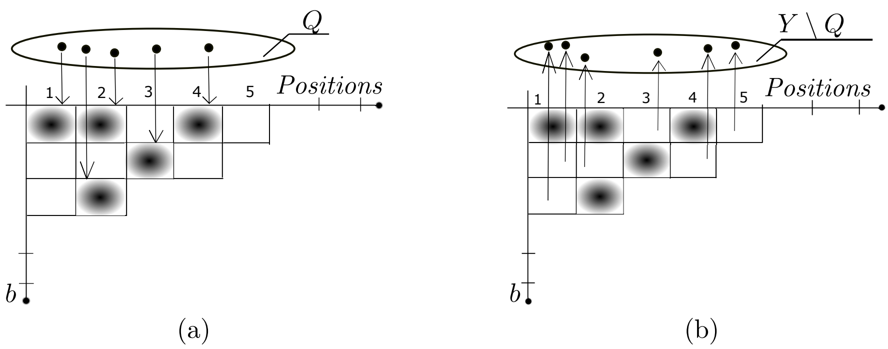
Output: точное решение U постановки PCVRPTW(Y, Q)

положить $b = |Q|$
for each паттерна $\lambda = q_1, \ldots, q_l$, т. е. $q \geq q_1 \geq \ldots q_l \geq 1$ и $1 \leq l \leq b$ **do**
  построить соответствующую диаграмму Юнга D_λ
  for each отображения $\mu\colon Q \to D_\lambda$ **do**
    if полученное частичное решение является допустимым **then**
      положить $F = D_\lambda \setminus \mu(Q)$
      for each отображения $\nu : F \to Y \setminus Q$ **do**
        получить соответствующее решение $S_{\lambda,\mu,\nu}$
        if $S_{\lambda,\mu,\nu}$ допустимо **then**
          вычислить cost$(S_{\lambda,\mu,\nu})$ по формуле (4)
        end if
      end for
    end if
  end for
end for
выдать $U = \arg\min\{\mathrm{cost}(S_{\lambda,\mu,\nu})\colon S_{\lambda,\mu,\nu}$ — допустимое решение$\}$

Назовем произвольные решения S_1 и S_2 *эквивалентными*, если $\lambda(S_1) = \lambda(S_2)$. Введенное бинарное отношение очевидным образом удовлетворяет соответствующим аксиомам, а множество допустимых решений задачи PCVRPTW(Y, Q) разбивается на классы эквивалентности. Каждому классу удобно сопоставить соответствующую диаграмму Юнга (см., например, [1]), как это показано на рис. 2. Произвольная j-я строка диаграммы Юнга соответствует маршруту R_j за исключением начальной и конечной точки x_0. Произвольному решению, представителю заданного класса эквивалентности, взаимно однозначно сопоставим *заполненную* диаграмму, указав в ее ячейках местоположения потребителей (построчно, слева направо) в порядке их посещения соответствующим маршрутом.

Алгоритм 2 состоит из нескольких простых этапов. На первом шаге перебираются все допустимые паттерны λ (и соответствующие им диаграммы) для заданных q и b. Заметим, что ввиду необходимости посещения каждого элемента множества Q не каждая диаграмма Юнга, укладывающаяся в прямоугольник $b \times q$, соответствует какому-либо допустимому классу эквивалентности.

На следующем этапе для произвольного допустимого паттерна λ перебираются всевозможные допустимые изоморфные вложения множества Q во множество ячеек соответствующей диаграммы (как в примере, изображенном на рис. 3a). При этом из рассмотрения исключаются отображения, образы которых нарушают ограничение на временные окна.



(a) (b)

Рис. 3. Примеры: (a) изоморфного вложения множества Q в диаграмму Юнга; (b) отображения множества незаполненных ячеек в $Y \setminus Q$.

На последнем шаге перечисляются допустимые инъекции подмножества незаполненных ячеек фиксированной диаграммы, частично заполненной точками из Q, во множество $Y \backslash Q$. Как и на предыдущем этапе, отображения, нарушающие ограничение на временные окна, исключаются из рассмотрения. Каждое допустимое отображение очевидным образом порождает допустимое решение задачи PCVRPTW(Y, Q). В качестве ответа выдается одно из допустимых решений минимальной стоимости (4).

2.2. Эвристика ITP для метрической задачи CVRPTW

Для поиска приближенного решения метрической задачи CVRPTW нами разработан эвристический алгоритм, являющийся простой адаптацией классической эвристики ITP [7] на случай задачи с ограничением на временные окна. Формальное описание эвристики приведено в алгоритме 3. Впервые алгоритм был опубликован в работе [8]. Мы приводим его здесь для полноты изложения.

А л г о р и т м 3. Эвристика ITP для метрической задачи CVRPTW

Input: экземпляр метрической задачи CVRPTW, заданной полным графом $G(X \cup \{x_0\}, E, w)$, грузоподъемностью q и разбиением $X_1 \cup \ldots \cup X_p = X$

Parameter: ρ-приближенный алгоритм $\mathcal{A}_\rho$ для метрической задачи коммивояжера (TSP)

Output: приближенное решение S_{ITP} заданного экземпляра CVRPTW

1: используя $\mathcal{A}_\rho$, получить ρ-приближенное метрическое TSP решение H для подграфа $G\langle X\rangle$
2: разрезом (рис. 4) разбить цикл H на меньшие циклы $H_1, \ldots, H_p$, где H_j содержит клиентов X_j, принадлежащих одному временному окну
3: **for each** цикла H_j **do**
4: **for each** $x \in X_j$ **do**
5: начиная с вершины x, разбить цикл H_j на $l_j = \lceil |X_j|/q \rceil$ цепей, таких что все, за исключением, быть может, одной, содержат q вершин
6: соединить концы каждой цепи непосредственно со складом x_0 и получить множество $S(x)$ из l_j маршрутов
7: **end for**
8: положить $S_j = \arg\min\{w(S(x)) \colon x \in X_j\}$
9: **end for**
10: выдать приближенное решение $S_{\text{ITP}} = S_1 \cup \ldots \cup S_p$.

Основная идея предлагаемого алгоритма основана на разбиении гамильтонова цикла для множества X на несколько подциклов, каждый из которых посещает исключительно представителей фиксированного подмножества $X_j \subset X$, объединенных общим промежутком обслуживания (временным окном) (см. рис. 4). Для каждого из построенных подциклов строится частичное решение классическим алгоритмом ITP.

3. Основной результат

В данном разделе мы приводим обоснование оценок точности и трудоемкости разработанной нами аппроксимационной схемы.

3.1. Оценка точности

Покажем, что для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ алгоритм 1 находит $(1+\varepsilon)$-приближенное решение для задачи CVRPTW(X). Нам потребуется несколько технических лемм. Лемма 1 устанавливает нижнюю оценку для оптимального значения произвольной задачи CVRPTW в терминах уклонений потребителей от склада x_0.

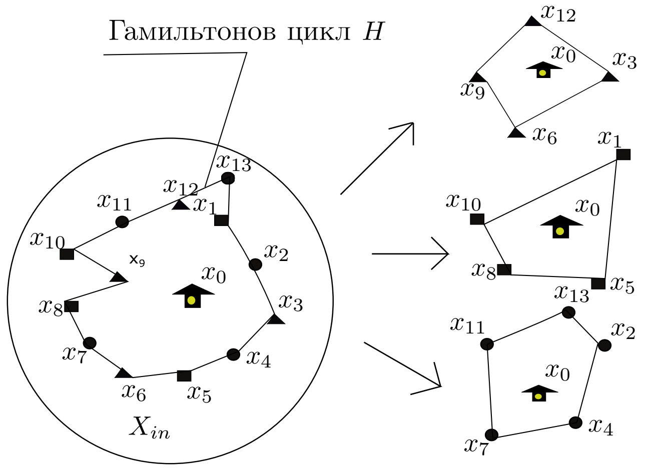


Рис. 4. Пример разбиения гамильтонова цикла; геометрическими фигурами обозначены потребители, обслуживаемые в различные временные окна.

Лемма 1. *Для произвольной неотрицательной весовой функции* w *справедливо соотношение*

$$\mathrm{CVRPTW}^*(X) \geq \frac{2}{q} \sum_{x \in X} r(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1 непосредственно следует из результатов [7; 10], полученных для общей задачи CVRP. Следующая лемма связывает оптимальные значения согласованных постановок задач CVRPTW и PCVRPTW.

Лемма 2. *Для произвольной неотрицательной функции* w *и подмножества* $Q \subset X$ *выполняется соотношение* $\mathrm{PCVRPTW}^*(X, Q) \leq \mathrm{CVRPTW}^*(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U — произвольное оптимальное решение $\mathrm{CVRPTW}(X)$ и $U' \subset U$ — минимальное по включению подмножество его маршрутов, посещающее подмножество привилегированных потребителей Q. По построению U' является допустимым решением в задаче $\mathrm{PCVRPTW}(X, Q)$. Следовательно, по лемме 1 справедлива оценка

$$\mathrm{PCVRPTW}^*(X, Q) \leq w(U') + \frac{2}{q} \sum_{x \in \bar{X}[U']} r(x) \leq w(U') + \mathrm{CVRPTW}^*(\bar{X}[U']). \tag{7}$$

В свою очередь, потребители из $\bar{X}[U']$ посещаются исключительно маршрутами из $U \setminus U'$. Следовательно, $U \setminus U'$ является допустимым решением для $\mathrm{CVRPTW}(\bar{X}[U'])$, для которого справедлива оценка $\mathrm{CVRPTW}^*(\bar{X}[U']) \leq w(U \setminus U')$. Объединяя с соотношением (7), получаем искомое неравенство

$$\mathrm{PCVRPTW}^*(X, Q) \leq w(U') + w(U \setminus U') = w(U) = \mathrm{CVRPTW}^*(X).$$

Лемма доказана.

Отметим, что результаты лемм 1 и 2 справедливы для наиболее общих случаев исследуемых задач. Всюду ниже мы ограничимся рассмотрением их метрических и даже евклидовых постановок. В статье [8] обосновывается верхняя оценка для стоимости приближенного решения, получаемого с помощью алгоритма 3.

Лемма 3 [8]. *Пусть* S_{ITP} *— приближенное решение, найденное алгоритмом* 3 *для метрической постановки* $\mathrm{CVRPTW}(X)$*, заданной графом* $G = (X \cup \{x_0\}, E, w)$*, грузоподъемностью* q *и разбиением* $X_1 \cup \ldots \cup X_p = X$*. Справедливо следующее соотношение*

$$w(S_{\mathrm{ITP}}) \leq p\left(1 - \frac{1}{q}\right) \rho \mathrm{TSP}^*(X) + \frac{2}{q} \sum_{x \in X} r(x) + 2pr_{max},$$

где $r_{max} = \max\limits_{r_1,\ldots,r_{|X|}}$, $\mathrm{TSP}^*(X)$ *— оптимальное значение вспомогательной задачи* TSP *на подграфе* $G\langle X\rangle$.

По-прежнему полагая, что потребители пронумерованы в порядке убывания их уклонений r_i от склада x_0, оценим качество решения, получаемого при декомпозиции задачи на подзадачи для внешних и внутренних потребителей, решаемые впоследствии независимо друг от друга. Зафиксируем произвольное натуральное $k \le n = |X|$ и рассмотрим разбиение множества X на подмножества $X_k = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ и $X'_k = X \setminus X_k$, соответствующие внешним и внутренним клиентам соответственно. Пользуясь рассуждениями, аналогичными проведенным в работе [7] для метрической задачи CVRP, получим следующее утверждение.

Лемма 4. *Для произвольной метрической задачи* $\mathrm{CVRPTW}(X)$ *справедливо соотношение*

$$\mathrm{CVRPTW}^*(X_k) + \mathrm{CVRPTW}^*(X'_k) \le \mathrm{CVRPTW}^*(X) + 4(k-1)r_k. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U — произвольное оптимальное решение $\mathrm{CVRPTW}(X)$ и $R \in U$ — произвольный входящий в него маршрут. Зафиксировав порядок обхода маршрута R, разобьем его на подмаршруты $R_0, R_1, \ldots, R_s$ так, чтобы все потребители, посещенные подмаршрутом R_0, были исключительно внутренними, в то время как для остальных подмаршрутов — внешними (как указано на рис. 5). Проведя подобное разбиение для каждого

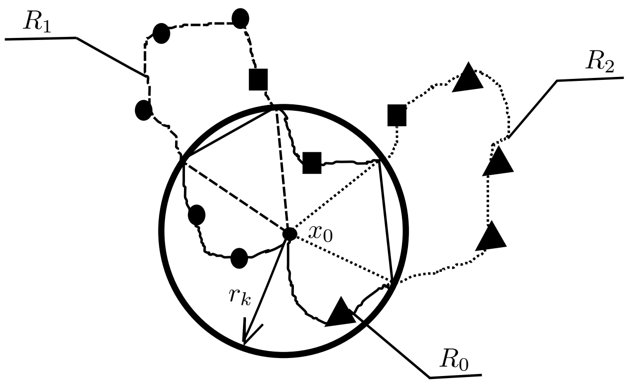


Рис. 5. Пример разбиения маршрута R.

маршрута $R \in U$ и группируя "внешние" и "внутренние" подмаршруты, получим допустимые решения S и S' для подзадач $\mathrm{CVRPTW}(X_k)$ и $\mathrm{CVRPTW}(X'_k)$ соответственно. Как видно из рис. 5, в ходе описанного выше построения точки пересечения каждого "внешнего" подмаршрута с поверхностью сферы радиуса r_k соединяются геодезическими с ее центром x_0. Поскольку общее число таких подмаршрутов не превосходит $k-1$, получаемый в результате суммарный прирост их длины не превосходит $2(k-1)r_k$. С другой стороны, длина каждой из не более чем $k-1$ хорд, добавляемых для соединения фрагментов "внутренних" подмаршрутов R_0, ограничена сверху $2r_k$ по неравенству треугольника. Таким образом, убеждаемся, что суммарная стоимость построенных маршрутов удовлетворяет соотношению

$$w(S) + w(S') \le w(U) + 4(k-1)r_k,$$

из которого справедливость неравенства (8) следует непосредственно, поскольку

$$\mathrm{CVRPTW}^*(X_k) \le w(S), \qquad \mathrm{CVRPTW}^*(X'_k) \le w(S'), \qquad w(U) = \mathrm{CVRPTW}^*(X).$$

Лемма доказана.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется верхняя оценка для оптимального значения вспомогательной евклидовой задачи коммивояжера на плоскости.

Лемма 5 [8]. *Пусть постановка евклидовой задачи* TSP *на плоскости задается конечным множеством* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, *содержащимся в сфере радиуса* $\mathcal{R}$. *Справедливо следующее соотношение:*

$$\mathrm{TSP}^*(X) \le 2\mathcal{R} + 4\sqrt{\pi\mathcal{R}\sum_{i=1}^{n} r_i},$$

где r_i *— расстояние от* x_i *до центра сферы.*

Опираясь на леммы 1–5, оценим точность решения S_{APP}, получаемого алгоритмом 1.

Лемма 6. *Для произвольной евклидовой постановки задачи* $\mathrm{CVRPTW}(X)$ *на плоскости имеем*

$$\mathrm{CVRPTW}^*(X) \le w(S_{\mathrm{APP}}) \le (1+\varepsilon)\,\mathrm{CVRPTW}^*(X).$$

Доказательство. Неравенство $\mathrm{CVRPTW}^*(X) \le w(S_{\mathrm{APP}})$ непосредственно следует из допустимости S_{APP}. Остановимся на доказательстве верхней оценки. По построению, $w(S_{\mathrm{APP}}) = w(U) + w(S_{\mathrm{ITP}})$, откуда по лемме 3 получаем

$$w(S_{\mathrm{APP}}) \le w(U) + \frac{2}{q}\sum_{x\in\bar{X}[U]} r(x) + p\rho\,\mathrm{TSP}^*(\bar{X}[U]) + 2pr_k. \tag{9}$$

Поскольку U — оптимальное решение $\mathrm{PCVRPTW}(X_{out}\cup X_{mid}, X_{out})$,

$$w(U) + \frac{2}{q}\sum_{x\in\bar{X}[U]\cap X_{mid}} r(x) = \mathrm{PCVRPTW}^*(X_{out}\cup X_{mid}, X_{out}) \le \mathrm{CVRPTW}^*(X_{out}\cup X_{mid}) \tag{10}$$

по лемме 2. Непосредственное применение леммы 1 к множеству X_{in} влечет

$$\frac{2}{q}\sum_{x\in X_{in}} r(x) \le \mathrm{CVRPTW}^*(X_{in}). \tag{11}$$

Комбинируя соотношения (9)–(11) и применяя леммы 4 и 5, получим

$$\begin{aligned} w(S_{\mathrm{APP}}) &\le w(U) + \frac{2}{q}\sum_{x\in\bar{X}[U]\cap X_{mid}} r(x) + \frac{2}{q}\sum_{x\in X_{in}} r(x) + p\rho\,\mathrm{TSP}^*(\bar{X}[U]) + 2pr_k \\ &\le \mathrm{CVRPTW}^*(X_{out}\cup X_{mid}) + \mathrm{CVRPTW}^*(X_{in}) + p\rho\,\mathrm{TSP}^*(\bar{X}[U]) + 2pr_k \\ &\le \mathrm{CVRPTW}^*(X) + 4(k'-1)r_{k'} + p\rho\,\mathrm{TSP}^*(\bar{X}[U]) + 2pr_k \\ &\le \mathrm{CVRPTW}^*(X) + 4(k'-1)r_{k'} + 4p\rho\sqrt{\pi r_k\sum_{i=1}^{n} r_i} + 2p(\rho+1)r_k. \end{aligned}$$

Учитывая, что числа k и k' определяются соотношениями (5) и (6), для произвольных $\varepsilon \in (0,1)$ и $p, q, \rho \ge 1$ имеем

$$w(S_{\mathrm{APP}}) \le \mathrm{CVRPTW}^*(X) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{2}{q}\sum_{i=1}^{n} r_i + \frac{\varepsilon}{4}\frac{2}{q}\sum_{i=1}^{n} r_i + \left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2 \frac{2p(\rho+1)}{64\pi(p\rho)^2}\sum_{i=1}^{n} r_i$$

$$\le \mathrm{CVRPTW}^*(X) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{2}{q}\sum_{i=1}^{n} r_i + \frac{\varepsilon}{4}\frac{2}{q}\sum_{i=1}^{n} r_i + \frac{\varepsilon}{96}\frac{2}{q}\sum_{i=1}^{n} r_i < \mathrm{CVRPTW}^*(X) + \frac{2\varepsilon}{q}\sum_{i=1}^{n} r_i. \tag{12}$$

В процессе преобразования выражения (12) мы воспользовались несложными соотношениями

$$(\varepsilon/q)^2 \le \varepsilon/q, \qquad \rho + 1 \le 2\rho, \qquad \frac{p(\rho+1)}{64\pi(p\rho)^2} \le \frac{2p\rho}{64\pi(p\rho)^2} = \frac{1}{32\pi p\rho} \le \frac{1}{32\pi} \le \frac{1}{96},$$

справедливыми для выбранных значений параметров. Применив к выражению (12) повторно лемму 1, получим окончательный результат

$$w(S_{\mathrm{APP}}) \le (1+\varepsilon)\,\mathrm{CVRPTW}^*(X).$$

Лемма доказана.

3.2. Оценка трудоемкости

Временная сложность алгоритма 1, определяется трудоемкостями алгоритмов 2 и 3. При этом сложность алгоритма 3 по порядку величины совпадает с известной трудоемкостью эвристики ITP (см., например, [7]):

$$\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \rho, n) + O(n^2),$$

где $\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \rho, n)$ — временная сложность поиска ρ-приближенного решения для планарной евклидовой TSP.

Чтобы оценить трудоемкость алгоритма 2, нам понадобятся несколько вспомогательных лемм. Сначала оценим мощности подмножеств X_{out} и X_{mid}.

Лемма 7. *Верно соотношение*

$$|X_{out}| = k - 1 < \left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^2 64\pi(p\rho)^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k = 1$ лемма очевидно верна. Рассмотрим случай $k > 1$. По выбору r_k на шаге 2 алгоритма 1 выполняется

$$r_1 \ge \ldots \ge r_{k-1} > \left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2 \frac{1}{64\pi(p\rho)^2} \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

Допустив, что $k - 1 \ge \left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^2 64\pi(p\rho)^2$, приходим к противоречию. В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \ge \sum_{i=1}^{k-1} r_i \ge (k-1) r_{k-1} > \left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^2 64\pi(p\rho)^2 \left(\frac{\varepsilon}{q}\right)^2 \frac{1}{64\pi(p\rho)^2} \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

Лемма доказана.

Без ограничения общности всюду ниже полагаем $k > 1$.

Лемма 8. *Верно равенство* $|X_{mid}| = k' - k$, *где* $k \le k' \le O\left(k e^{4q/\varepsilon}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k' = k$ лемма верна для любого $\varepsilon \in (0,1)$ и $q \ge 1$. Рассмотрим случай $k' > k$. По выбору $r_{k'}$ на шаге 3 алгоритма 1 выполняется

$$\frac{r_l}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} > \frac{\varepsilon}{4q(l-1)} \tag{13}$$

для произвольного $k \le l < k'$. Складывая неравенства (13), получаем

$$1 \ge \sum_{l=k}^{k'-1} \frac{r_l}{\sum\limits_{i=k}^{n} r_i} > \frac{\varepsilon}{4q} \sum_{l=k}^{k'-1} \frac{1}{l-1} = \frac{\varepsilon}{4q} \sum_{i=k-1}^{k'-2} \frac{1}{i} \ge \frac{\varepsilon}{4q} \int\limits_{k-1}^{k'-2} \frac{dx}{x} \ge \frac{\varepsilon}{4q} \log \frac{k'-2}{k-1}.$$

Тогда

$$k' < (k-1)\,e^{4q/\varepsilon} + 2 = O(k\,e^{4q/\varepsilon}).$$

Лемма доказана.

Перейдем к оценке трудоемкости алгоритма 2.

Лемма 9. *Для задачи* PCVRPTW$(X_{out} \cup X_{mid}, X_{out})$ *алгоритм* 2 *находит оптимальное решение за время*
$$e^{O(q\,(q/\varepsilon)^3\,(p\rho)^2\log(p\rho))}.$$

Доказательство. Число паттернов, перебираемых на шаге 2 алгоритма 2, ограничено сверху числом диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольник размера $b \times q$, где $b = |Q|$, которое, в свою очередь, как известно [1], не превосходит
$$\binom{b+q}{q} \le O(b^q).$$

Далее, число инъекций, перебираемых на шаге 4, не превосходит $(bq)^{|Q|} = (bq)^b$. Число отображений множества незанятых ячеек во множество $Y \setminus Q$ на шаге 7 не превосходит $|Y \setminus Q|^{bq}$. Наконец, трудоемкость шага 10, на котором проводится проверка допустимости решения и вычисляется значение целевой функции, оценивается сверху $O(bq)$.

Таким образом, алгоритм 2 находит оптимальное решение задачи PCVRPTW(Y, Q) за время
$$O(b^q)\,(bq)^{b+1}\,|Y \setminus Q|^{bq}. \tag{14}$$

В частности, применяя алгоритм 2 к постановке задачи PCVRPTW$(X_{out} \cup X_{mid}, X_{out})$, имеем $Q = X_{out}$ и $Y \setminus Q = X_{mid}$. В силу лемм 7 и 8 $b = k-1$, $|Y \setminus Q| = |X_{mid}| \le O\left(ke^{4q/\varepsilon}\right)$. Преобразовывая (14) и применяя повторно лемму 7, получаем
$$\begin{aligned} O(k^q)\,(kq)^k(ke^{4q/\varepsilon})^{kq} &= O\bigl(\exp(q\log k + k\log(qk) + qk\log k + 4kq\,q/\varepsilon)\bigr) \\ &\le O\bigl(\exp(4qk(\log k + q/\varepsilon))\bigr) = \exp\Bigl(O\Bigl(q\,\left(\tfrac{q}{\varepsilon}\right)^3(p\rho)^2\log(p\rho)\Bigr)\Bigr). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Сформулируем основной результат данной статьи, справедливость которого непосредственно следует из лемм 6 и 9.

Теорема. *Для произвольного* $\varepsilon > 0$ *алгоритм* 1 *находит* $(1+\varepsilon)$*-приближенное решение евклидовой постановки задачи* CVRPTW *на плоскости за время*
$$\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \rho, n) + O(n^2) + O\bigl(e^{O(q\,(\frac{q}{\varepsilon})^3(p\rho)^2\log(p\rho))}\bigr).$$

Следствие. *Алгоритм* 1 *является полиномиальной приближенной схемой* (PTAS) *при условии* $p^3q^4 = O(\log n)$. *Для произвольных фиксированных значений параметров* $p \ge 1$ *и* $q \ge 1$ *алгоритм* 1 *является эффективной полиномиальной приближенной схемой* (EPTAS) *с трудоемкостью* $O(n^3 + e^{O(1/\varepsilon^3)})$ *при условии, что для решения вспомогательной задачи коммивояжера в алгоритме* 3 *применяется алгоритм Кристофидеса — Сердюкова.*

Заключение

В данной статье нами предложена новая аппроксимационная схема для задачи маршрутизации транспорта с ограничениями на грузоподъемность транспортных средств и промежутки обслуживания потребителей (временные окна). Опираясь на перспективную схему декомпозиции исходной задачи, в которой множество потребителей разбивается на три части, мы добились существенного снижения трудоемкости по сравнению с результатом [8], опирающимся на классический подход Хаймовича и Ринной Кана. Предложенная схема является EPTAS для произвольных фиксированных грузоподъемности $q \ge 1$ и числа окон $p \ge 1$ с трудоемкостью $O(n^3 + \exp((1/\varepsilon)^3))$ и остается полиномиальной при $p^3q^4 = O(\log n)$.

В последующих работах мы планируем распространить наши результаты на случай евклидова пространства произвольной фиксированной размерности $d > 1$ и нескольких складов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Andrews G. E., Eriksson K.** Integer partitions. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edn., 2004. 152 p.
2. **Arora S.** Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45, no. 5. P. 753–782. doi: 10.1145/290179.290180 .
3. Covering points in the plane by k-tours: towards a polynomial time approximation scheme for general k / T. Asano, N. Katoh, H. Tamaki, T. Tokuyama // Proc. of the twenty-ninth annual ACM symposium on theory of computing (STOC '97). N Y: ACM, 1997. P. 275–283. doi: 10.1145/258533.258602 .
4. **Chrisofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the Traveling Salesman Problem. Management Sciences Research Report 388. US, Pennsylvania: Carnegie-Mellon University, 1976. 11 p.
5. **Dantzig G., Ramser J.** The truck dispatching problem // Management science. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 80–91.
6. **Das A., Mathieu C.** A quasi-polynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing // Algorithmica. 2015. Vol. 73, no. 1. P. 115–142. doi: 10.1007/s00453-014-9906-4 .
7. **Haimovich M., Rinnooy Kan A.H.G.** Bounds and heuristics for capacitated routing problems // Math. Operations Research. 1985. Vol. 10, no. 4. P. 527–542. doi: 10.1287/moor.10.4.527 .
8. **Khachay M., Ogorodnikov Y.** Efficient PTAS for the Euclidean CVRP with time windows // Analysis of Images, Social Networks and Texts: Revised Selected Papers 7th International Conf. (AIST-2018). Cham: Springer International Publishing, 2018. P. 1–11. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11179).
9. **Khachay M., Dubinin R.** PTAS for the Euclidean Capacitated Vehicle Routing Problem in R^d // Proc. DOOR 2016. Cham: Springer International Publishing, 2016. P. 193–205. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 9869). doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_16 .
10. **Khachay M., Zaytseva H.** Polynomial time approximation scheme for single-depot Euclidean Capacitated Vehicle Routing Problem // Proc. COCOA 2015. Cham: Springer International Publishing, 2015. P. 178–190. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 9486). doi: 10.1007/978-3-319-26626-8_14 .
11. **Kumar S., Panneerselvam R.** A survey on the vehicle routing problem and its variants *Intelligent Information Management.* 2012. Vol. 4, no. 3. P. 66–74. doi: 10.4236/iim.2012.43010 .
12. **Сердюков А.И.** О некоторых оптимальных обходах в графах. Управляемые системы. 1978. Вып. 17. С. 76–79.
13. **Song L., Huang H.** The Euclidean Vehicle Routing Problem with multiple depots and time windows // Proc. COCOA 2017, Part II. Cham: Springer International Publishing, 2017. P. 449–456. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 10627). doi: 10.1007/978-3-319-71147-8_31 .
14. **Song L., Huang H., Du H.** Approximation schemes for euclidean vehicle routing problems with time windows // J. Combinatorial Optim. 2016. Vol. 32, no. 4. P. 1217–1231. doi: 10.1007/s10878-015-9931-5 .
15. **Toth P., Vigo D.** Vehicle Routing: problems, methods and applications / eds. P. Toth, D. Vigo. 2 edn. 2014. 480 p. (MOS-Siam Series on Optimization, SIAM). ISBN: 978-1-611973-58-7 .

Хачай Михаил Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, зав. отделом, профессор РАН
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург;
Омский государственный технический университет,
г. Омск
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Поступила 29.05.2018

Огородников Юрий Юрьевич
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: yogorodnikov@gmail.com

REFERENCES

1. Andrews G. E., Eriksson K. *Integer partitions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2nd edn., 2004, 152 p. ISBN-10: 0521600901.
2. Arora S. Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. *J. ACM*, 1998, vol. 45, no. 5, pp. 753–782. doi: 10.1145/290179.290180.
3. Asano T., Katoh N., Tamaki H., Tokuyama T. Covering points in the plane by k-tours: towards a polynomial time approximation scheme for general k. *Proc. of the twenty-ninth annual ACM symposium on theory of computing* (STOC '97). N Y: ACM, 1997. P. 275–283. doi: 10.1145/258533.258602.
4. Chrisofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the Traveling Salesman Problem. *Management Sciences Research Report* 388, US, Pennsylvania: Carnegie-Mellon University, 1976, 11 p.
5. Dantzig G., Ramser J. The truck dispatching problem. *Management science*, 1959, vol. 6, no. 1, pp. 80–91.
6. Das A., Mathieu C. A quasi-polynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing. *Algorithmica*, 2015, vol. 73, no. 1, pp. 115–142. doi: 10.1007/s00453-014-9906-4.
7. Haimovich M., Rinnooy Kan A.H.G. Bounds and heuristics for capacitated routing problems. *Math. Operations Research*, 1985, vol. 10, no. 4, pp. 527–542. doi: 10.1287/moor.10.4.527.
8. Khachay M., Ogorodnikov Y. Efficient PTAS for the Euclidean CVRP with time windows. *Analysis of Images, Social Networks and Texts: Revised Selected Papers 7th Internat. Conf.* (AIST-2018), Cham: Springer International Publishing, 2018, Ser. Lecture Notes in Computer Science, vol. 11179, pp. 1–11.
9. Khachay M., Dubinin R. PTAS for the Euclidean Capacitated Vehicle Routing Problem in R^d. *Proc. DOOR* 2016, Cham: Springer International Publishing, 2016, Ser. Lecture Notes in Computer Science; vol. 9869, pp. 193–205. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_16.
10. Khachay M., Zaytseva H. Polynomial time approximation scheme for single-depot Euclidean Capacitated Vehicle Routing Problem. *Proc. COCOA 2015*, Cham: Springer International Publishing, 2015, Ser. Lecture Notes in Computer Science; vol. 9486, pp. 178–190. doi: 10.1007/978-3-319-26626-8_14.
11. Kumar S., Panneerselvam R. A survey on the vehicle routing problem and its variants. *Intelligent Information Management*, 2012, vol. 4, no. 3, pp. 66–74. doi: 10.4236/iim.2012.43010.
12. Serdyukov A. On some extremal routes in graphs. *Upravliaemye systemy*, 1978, iss. 17, pp. 76–79 (in Russian).
13. Song L., Huang H. The Euclidean Vehicle Routing Problem with multiple depots and time windows. *Proc. COCOA* 2017, Part II, Cham: Springer International Publishing, 2017, Ser. Lecture Notes in Computer Science, vol. 10627, pp. 449–456. doi: 10.1007/978-3-319-71147-8_31.
14. Song L., Huang H., Du H. Approximation schemes for euclidean vehicle routing problems with time windows. *J. Combinatorial Optim.*, 2016, vol. 32, no. 4, pp. 1217–1231. doi: 10.1007/s10878-015-9931-5.
15. Toth P., Vigo D. *Vehicle Routing: problems, methods and applications*, 2 edn., 2014, MOS-Siam Series on Optimization, SIAM, 480 p. ISBN: 978-1-611973-58-7.

The paper was received by the Editorial Office on May 29, 2018.

Funding Agency: The first author is supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00109).

Mikhail Yur'evich Khachai, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; Omsk State Technical University, Omsk, 644050 Russia, e-mail: mkhachay@imm.uran.ru.

Yurii Yur'evich Ogorodnikov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: yogorodnikov@gmail.com.