ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 519.17+512.54

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{196,156,1;1,39,196\}$

А. А. Токбаева

А. А. Махнев и М. С. Самойленко нашли массивы пересечений дистанционно регулярных антиподальных графов диаметра 3 с $\lambda=\mu$ степени, не большей 1000, в которых окрестности вершин сильно регулярны. Ранее были найдены автоморфизмы дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением 3, кроме графов с массивами пересечений $\{196,156,1;1,39,196\}$ и $\{205,136,1;1,68,205\}$. В работе найдены возможные простые порядки элементов группы автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{196,156,1;1,39,196\}$ и подграфы их неподвижных точек. Доказано, что группа автоморфизмов данного графа действует интранзитивно на множестве его вершин.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм.

A. A. Tokbaeva. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{196,156,1;1,39,196\}$.

A. Makhnev and M. Samoilenko found intersection arrays of antipodal distance-regular graphs of diameter 3 and degree at most 1000 in which $\lambda=\mu$ and the neighborhoods of vertices are strongly regular. Automorphisms of distance-regular graphs in which the neighborhoods of vertices are strongly regular with second eigenvalue 3 except for graphs with intersection arrays $\{196,156,1;1,39,196\}$ and $\{205,136,1;1,68,205\}$ were found earlier. We find possible prime orders of elements in the automorphism group of a distance-regular graph with intersection array $\{196,156,1;1,39,196\}$ as well as their fixed-point subgraphs. It is proved that the automorphism group of this graph acts intransitively on the vertex set.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

MSC: 05C25, 20B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-226-232

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a]=\Gamma_1(a)$, $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Пусть Γ — граф, $a,b\in\Gamma$, число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a,b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a]\cap[b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i\le d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,b_1,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u,w на расстоянии i в Γ для любого $i=0,\ldots,d$. Положим $a_i=k-b_i-c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа ($k=b_0$), $c_1=1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x)\cap\Gamma_j(y)$ для вершин x,y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x,y, обозначаются как p^l_{ij} и называются *числами пересечения графа* Γ.

В работе [1, предложение] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных антиподальных графов диаметра 3 с $\lambda=\mu$ степени, не большей 1000, в которых окрестности вершин сильно регулярны. Граф Δ из пп. (1)–(3) заключения этого предложения со вторым собственным значением 3 имеет параметры $(25, 8, 3, 2, 3)$, $(96, 19, 2, 4, 5)$, $(99, 14, 1, 2, 7)$, $(100, 33, 8, 12, 3)$, $(169, 42, 5, 12, 4)$, $(176, 25, 0, 4, 7)$, $(196, 39, 2, 9, 5)$, $(205, 68, 15, 26, 3)$, $(256, 51, 2, 12, 5)$ (здесь последний параметр — это индекс антиподальности исходного графа). Этим параметрам отвечают массивы пересечений $\{25, 16, 1; 1, 8, 25\}$, $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$, $\{99, 84, 1; 1, 14, 99\}$, $\{100, 66, 1; 1, 33, 100\}$, $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$, $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$, $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$, $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$, $\{256, 204, 1; 1, 51, 256\}$.

Для графов со следующими массивами пересечений найдены возможные автоморфизмы: $\{25, 16, 1; 1, 8, 25\}$ [2], $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$ [3], $\{99, 84, 1; 1, 14, 99\}$ [4], $\{100, 66, 1; 1, 33, 100\}$ [5], $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$ [6], $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$ [7], $\{256, 204, 1; 1, 51, 256\}$ (Л. Ю. Циовкина О локальном строении дистанционно регулярных графов Мэтона. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2016 Т. 22, № 3. С. 293–298) — в вершинно симметричном случае имеем граф Мэтона.

При решении задачи Кулена [8] для $t = 3$ не были рассмотрены массивы $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$ и $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$. Однако, если в дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$ окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(196, 39, 2, 9)$, то любой μ-подграф является регулярным графом степени $\mu' = 9$ на 39 вершинах; противоречие. Если в дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$ окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(205, 68, 15, 26)$, то $\mu \geq 943/13$, снова противоречие. Вопросы существования дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$ и $\{205, 136, 1; 1, 68, 205\}$ без дополнительных ограничений остаются открытыми.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [9, с. 431]) массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$ вершин и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения

$$x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0 \ \text{ и } \ f = m(r-1)(k+1)/(n+m), \quad g = n(r-1)(k+1)/(n+m).$$

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 196 + 784 + 4 = 985 = 5 \cdot 197$ вершин и спектр $196^1, 14^{394}, -1^{196}, -14^{394}$. Ввиду границы Дельсарта порядок клики в Γ не превосходит $1 - k/\theta_3 = 15$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ пересекает t антиподальных классов по s вершинам. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 37, 197\}$ и выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф и либо $p = 197$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 197$, либо $p = 5$, $\alpha_3(g) = 25m - 15$ и $\alpha_1(g) = 140l + 65m + 130$;*

(2) Ω *является n-кликой, $p = 2$, $n \in \{1, 3, 5, \ldots, 15\}$, $\alpha_3(g) = 4n$ и $\alpha_1(g) = 56l - n + 29$;*

(3) Ω *содержится в антиподальном классе и либо $p = 7$, $s = 5$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 196(l+1)$, либо $p = 2$, $s = 5$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 56l + 140$;*

(4) *либо $p = 37$ и Ω имеет массив пересечений $\{11, 8, 1; 1, 2, 11\}$, либо $p = 19$, Ω имеет массив пересечений $\{6, 4, 1; 1, 1, 6\}$ или $t = 26$, либо $p = 17$ и $t = 27$;*

(5) *либо $p = 13$ и $t \in \{2, 15, 28\}$, либо $p = 11$ и $t \in \{21, 32\}$, либо $p = 7$ и $t \in \{15, 22, 29, 36\}$;*

(6) *либо $p = 5$ и $t \in \{12, 17, 22, 27, 32, 37\}$, либо $p = 3$, $s \in \{2, 5\}$ и $t \in \{2, 5, \ldots, 77\}$, либо $p = 2$, $s \in \{3, 5\}$ и $t \in \{3, 5, \ldots, 65\}$.*

Следствие. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$. *Тогда группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует интранзитивно на множестве его вершин.*

Доказательство теоремы опирается на хорошо известный метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [10].

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, \dots, W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [10, § 3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$. *Тогда нетривиальные числа пересечений имеют следующие значения:*

(1) $p^1_{11} = 39$, $p^1_{12} = 156$, $p^1_{22} = 624$, $p^1_{23} = 4$, $p^1_{33} = 0$;

(2) $p^2_{11} = 39$, $p^2_{12} = 156$, $p^2_{13} = 1$, $p^2_{22} = 624$, $p^2_{23} = 3$, $p^2_{33} = 0$;

(3) $p^3_{12} = 196$, $p^3_{13} = 0$, $p^3_{22} = 588$, $p^3_{23} = 0$, $p^3_{33} = 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямые вычисления (применяется [9, лемма 4.1.7]). □

Лемма 2. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g \in G$, χ_1 — *характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 394, χ_2 — *характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 196. *Тогда* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_1(g) = (57\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - 13\alpha_3(g))/140 - 197/28$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/5 - 1$. *Если* $|g| = p$ — *простое число, то* $\chi_1(g) - 394$ *и* $\chi_2(g) - 196$ *делятся на* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 394 & 197/7 & -197/28 & -197/2 \\ 196 & -1 & -1 & 196 \\ 394 & -197/7 & 197/28 & -197/2 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (56\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 14\alpha_3(g))/140$. Подставляя $\alpha_2(g) = 985 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (57\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - 13\alpha_3(g))/140 - 197/28$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (196\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 196\alpha_3(g))/985$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 985 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/5 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [11]. □

В леммах 3–5 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Ω — непустой граф, то будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Для вершины $x \in \Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Ω — *пустой граф, то либо* $p = 197$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 197$, *либо* $p = 5$, $\alpha_3(g) = 25m - 15$ *и и* $\alpha_1(g) = 140l + 65m + 130$;

(2) *если* Ω *является* n-*кликой, то* $p = 2$, $n \in \{1, 3, \dots, 13, 15\}$, $\alpha_3(g) = 4n$ *и* $\alpha_1(g) = 56l - n + 29$;

(3) *если* Ω *содержится в антиподальном классе, то либо* $p = 7$, $s = 5$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 196(l + 1)$, *либо* $p = 2$, $s = 5$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 56l + 140$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω — пустой граф. Так как $985 = 5 \cdot 197$, то $p = 5, 197$.

Если $p = 197$, то $\alpha_3(g) = 0$, по лемме 2 имеем $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 197)/28$ и $\alpha_1(g) = 197$.

Если $p = 5$, то $\alpha_3(g) = 5w$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 13w - 197)/28$ сравнимо с -1 по модулю 5, $\alpha_1(g) = 140l + 13w + 169$ и $w + 13$ делится на 5. Отсюда $w = 5m - 3$ и $\alpha_1(g) = 140l + 65m + 130$.

Пусть Ω является n-кликой, $a \in \Omega$. Тогда g действует без неподвижных точек на $F(a) - \{a\}$, поэтому $p = 2$. Так как по лемме 1 имеем $p^1_{11} = p^2_{11} = 39$, то любая вершина $w \in \Gamma - \Omega$ со свойством $d(w, w^g) \leq 2$ попадает в окрестность вершины из Ω.

Если $n = 1$, то $\alpha_3(g) = 4$, число $\chi_1(g) = (57 + 5\alpha_1(g) - 52)/140 - 197/28 = (\alpha_1(g) - 196)/28$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 56l + 28$.

Если $n > 1$, то для различных вершин $a, b \in \Omega$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b] - \Omega$, поэтому 2 делит $41 - n$ и $n = 3, 5, \ldots, 15$. Теперь $\alpha_3(g) = 4n$, число $\chi_1(g) = (57n + 5\alpha_1(g) - 52n)/140 - 197/28 = (n + \alpha_1(g) - 197)/28$ четно и $\alpha_1(g) = 56l - n + 29$.

Пусть Ω содержится в антиподальном классе F. Тогда p делит 14^2, поэтому либо $p = 7$, $s = 5$, либо $p = 2, s = 3, 5$. Если $p = 7$, то число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 140)/28$ сравнимо с 2 по модулю 7 и $\alpha_1(g) = 196(1+l)$. Если $p = 2$, то с учетом равенств $p^1_{11} = p^2_{11} = 39$ каждая вершина из $\Gamma - F$ смежна с единственной вершиной из Ω, поэтому $s = 5$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 140)/28$ четно и $\alpha_1(g) = 56l + 140$. $\square$

Лемма 4. *Пусть Ω не является пустым графом, кликой или кокликой. Если $p > 3$, то выполняется одно из утверждений*:

(1) $p = 37$ *и* Ω *имеет массив пересечений* $\{11, 8, 1; 1, 2, 11\}$;

(2) $p = 19$, *либо* Ω *имеет массив пересечений* $\{6, 4, 1; 1, 1, 6\}$, *либо* $t = 26$;

(3) $p = 17$ *и* $t = 27$;

(4) $p = 13$ *и* $t \in \{2, 15, 28\}$;

(5) $p = 11$ *и* $t \in \{21, 32\}$;

(6) $p = 7$ *и* $t \in \{15, 22, 29, 36\}$;

(5) $p = 5$ *и* $t \in \{12, 17, 22, 27, 32, 37\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω не является пустым графом или кликой и $t > 1$. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$. В случае $s = 5$ любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t вершинами из Ω.

Если $p > 37$, то то для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ подграф $[a] \cap [b]$ содержится в Ω. Отсюда Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{t-1, 156, 1; 1, 39, t-1\}$; противоречие.

В случае $p = 37$ получаем $t = 12$ и Ω имеет массив пересечений $\{11, 8, 1; 1, 2, 11\}$.

В случае $p = 31$ получаем $t = 11$ и Ω имеет массив пересечений $\{10, 32, 1; 1, 8, 10\}$; противоречие с тем, что $b_1 > k$.

В случае $p = 29$ имеем $t = 23$ и Ω имеет массив пересечений $\{22, 40, 1; 1, 10, 22\}$; противоречие с тем, что $b_1 > k$.

В случае $p = 23$ получаем $t = 36$ и Ω имеет массив пересечений $\{35, 64, 1; 1, 16, 35\}$; противоречие с тем, что $b_1 > k$.

В случае $p = 19$ имеем $t \in \{7, 26\}$. В случае $t = 7$ подграф Ω имеет массив пересечений $\{6, 4, 1; 1, 1, 6\}$. В случае $t = 26$ имеем $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{1, 20, 39\}$.

В случае $p = 17$ получаем $t \in \{10, 27\}$. В случае $t = 10$ подграф Ω имеет массив пересечений $\{9, 20, 1; 1, 5, 9\}$; противоречие с тем, что $b_1 > k$. В случае $t = 27$ имеем $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{5, 22, 39\}$.

В случае $p = 13$ получаем $t \in \{2, 15, 28\}$. В случае $t = 15$ имеем $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{0, 13\}$. В случае $t = 28$ имеем $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{0, 13, 26\}$.

В случае $p = 11$ получаем $t \in \{10, 21, 32\}$. В случае $t = 10$ подграф Ω имеет массив пересечений $\{9, 24, 1; 1, 6, 9\}$; противоречие с тем, что $b_1 > k$. В случае $t = 21$ имеем $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{6, 17\}$. В случае $t = 32$ имеем $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{6, 17, 28\}$.

В случае $p = 7$ получаем $t \in \{8, 15, 22, 29, 36\}$. В случае $t = 8$ подграф Ω имеет массив пересечений $\{7, 16, 1; 1, 4, 7\}$; противоречие с тем, что $b_1 > k$. В случае $t = 15$ имеем $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in$

$\{4, 11\}$. В случае $t = 22$ имеем $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{4, 11, 18\}$. В случае $t = 29$ имеем $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{4, 11, 18, 25\}$. В случае $t = 36$ имеем $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{4, 11, 18, 25, 32\}$.

В случае $p = 5$ получаем $t \in \{7, 12, 17, 22, 27, 32, 37\}$. В случае $t = 7$ подграф Ω имеет массив пересечений $\{6, 16, 1; 1, 4, 6\}$; противоречие с тем, что $b_1 > k$. □

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* $p = 3$, *то либо* $s = 5$ *и* $t \in \{2, 5, \ldots, 38\}$, *либо* $s = 2$ *и* $t \in \{2, 5, \ldots, 77\}$;

(2) *если* $p = 2$ *и* Ω *не является пустым графом, кликой или кокликой, то* $s \in \{3, 5\}$, *и* $t \in \{3, 5, \ldots, 65\}$.

Доказательство. Пусть $p = 3$. Если $s = 5$, то $t \leq 38$.

Если $s = 2$, то $t \in \{2, 5, \ldots\}$ и для $\Omega \cap F(a) = \{a, a^*\}$ и $b \in \Omega(a)$ получаем $|a^\perp \cap \Omega(b)| + |[a^*] \cap \Omega(b)| = t - 1$. Отсюда $t \leq 80$ и в случае $t = 80$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{79, 39, 1; 1, 39, 79\}$. Противоречие с тем, что окрестность вершины в Ω является сильно регулярным графом с параметрами $(79, 2\mu', \lambda', \mu')$ и $2\mu' = 39$.

Пусть $p = 2$. Если $s = 5$, то $t \leq 39$.

Если $s = 3$, то $t \in \{3, 5, \ldots\}$ и Ω — регулярный граф степени $t - 1$. Далее, число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $3t(197 - t)$, но не больше $5(197 - t)39$, поэтому $t \leq 65$. □

Из лемм 3–5 следует теорема. □

Доказательство следствия. Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{196, 156, 1; 1, 39, 196\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 6. *Пусть* f — *элемент порядка* 197 *из* G, g — *элемент простого порядка* $p < 7$ *из* $C_G(f)$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $p = 5$ *и* $\alpha_3(g) = 985$.

Доказательство. По теореме Fix(f) — пустой граф, $\alpha_3(f) = 0$ и $\alpha_1(f) = 197$.

Ввиду теоремы Ω — пустой граф и $p = 5$. В этом случае $\alpha_3(g) = 25m - 15$ делится на 197, $5m - 3 = 197$ и $\alpha_3(g) = 985$. □

Пусть группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и F — антиподальный класс графа Γ, содержащий вершину a, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_{197'}(G)$. Тогда $|G : G_a| = 985$ и $|G : G_{\{F\}}| = 197$.

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) $O_{197'}(G)$ *является* 5-*группой*;

(2) G — *разрешимая группа.*

Доказательство. Напомним, что $v = 5 \cdot 197$, поэтому $O_{197'}(G)$ является 5-группой.

Допустим, что G — неразрешимая группа. Так как G действует транзитивно на множестве из 197 антиподальных классов, то $\bar{T}$ — простая неабелева группа. Ввиду [12, табл. 2 и 3] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(197)$. Противоречие с тем, что $L_2(197)$ не содержит подгрупп индекса 197. □

По лемме 7 цоколь T группы G — циклическая группа порядка 985 или 5. Тогда нормальная в G подгруппа порядка 5 действует регулярно на каждом антиподальном классе и по [13, теорема 9.2] число $p = 5$ делит $k + 1 = 197$; противоречие.

Следствие доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А., Самойленко М.С.** О дистанционно регулярных накрытиях клик с сильно регулярными окрестностями вершин // Современные проблемы математики: тр. 46-й Междунар. молодежной шк.-конф. Екатеринбург, 2015. С. 13–18.
2. **Efimov K.S., Makhnev A.A.** On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{25, 16, 1; 1, 8, 25\}$ // Ural Math. J. 2017. Vol. 3. P. 28–32.

3. **Махнев А.А., Шерметова М.Х.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 167–174. doi: 10.17377/semi.2018.15.016 .
4. **Агеев П.С., Махнев А.А.** Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 14, 99\}$ // Докл. РАН. 2010. Т. 458, № 1. С. 7–11. doi: 10.7868/S0869565214250033 .
5. **Efimov K.S., Makhnev A.A.** Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{100, 66, 1; 1, 33, 100\}$ // Sib. Electron. Math. Reports. 2015. Vol. 12. P. 795–801. doi: 10.17377/semi.2015.12.065 .
6. **Кагазежева А.М.** Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 318–327. doi: 10.17377/semi.2015.12.026 .
7. **Белоусов И.Н., Махнев А.А.** Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 754–761.
8. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Дистанционно-регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Докл. РАН 2015. Т. 464, № 4. С. 396–400. doi: 10.7868/S0869565215280051 .
9. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Springer-Verlag, 1989. 495 p.
10. **Cameron P.** Permutation groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
11. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. РАН 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
12. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
13. **Godsil C.D., Hensel A.D.** Distance-regular covers of the complete graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. 1992. Vol. 56. P. 205–238.

Токбаева Альбина Аниуаровна
Поступила 21.05.2018
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель
Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х.М. Бербекова,
г. Нальчик
e-mail: tok2506@mail.ru

REFERENCES

1. Makhnev A.A., Samoylenko M.S. On distance-regular covers of cliques with strongly regular neighbourhoods of vertices. *Sovremennye problemy matematiki* (*Modern Problems in Mathematics*), *Proc. of the 46-th Int. Youth School-Conf.* (*Ekaterinburg, Russia, 2015*), pp. 13–18 (in Russian).
2. Efimov K.S., Makhnev A.A. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{25, 16, 1; 1, 8, 25\}$. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 1, pp. 27–32. doi: 10.15826/umj.2017.1.001 .
3. Makhnev A.A., Shermetova M.Kh. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{96, 76, 1; 1, 19, 96\}$. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 167–174 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2018.15.016 .
4. Ageev P.S., Makhnev A.A. Automorphisms of a graph with intersection array $\{99, 84, 1; 1, 14, 99\}$. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 2, pp. 525–528. doi: 10.1134/S1064562414060015 .
5. Efimov K.S., Makhnev A.A. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{100, 66, 1; 1, 33, 100\}$. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, vol. 12, pp. 795–801. doi: 10.17377/semi.2015.12.065 .
6. Kagazezheva A.M. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{169, 126, 1; 1, 42, 169\}$. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, vol. 12, pp. 318–327 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2015.12.026 .
7. Belousov I.N., Makhnev A.A. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 754–761 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2016.13.061 .
8. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. Distance regular graphs in which local subgraphs are strongly regular graphs with the second eigenvalue at most 3. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 92, no. 2, pp. 568–571. doi: 10.1134/S1064562415050191 .

9. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs. Berlin, Heidelberg, N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
10. Cameron P. *Permutation groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 220 p. ISBN: 0-521-65302-9 .
11. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A. On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56,45,1;1,9,56\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .
12. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.
13. Godsil C.D., Hensel A.D. Distance-regular covers of the complete graphs. *J. Comb. Theory, ser. B*, 1992, vol. 56, no. 2, pp. 205–238. doi: 10.1016/0095-8956(92)90019-T .

The paper was received by the Editorial Office on May 21, 2018.

Al'bina Aniuarovna Tokbaeva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: tok2506@mail.ru .