ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 517.5

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И СПЛАЙНЫ

Ю. Н. Субботин, С. И. Новиков, В. Т. Шевалдин

Статья представляет собой обзор результатов, полученных за последние 50 лет при исследовании задач экстремальной функциональной интерполяции. Мы анализируем различные постановки задач в этом направлении как для одной, так и для нескольких переменных. Отдельно отмечается роль интерполяционных сплайнов различного вида (полиномиальных, интерполяционных в среднем, $\mathcal{L}$-сплайнов, m-гармонических и др.) в решении задач экстремальной функциональной интерполяции. Также мы указываем основные применения результатов и методов экстремальной интерполяции к другим задачам теории приближения и теории сплайнов.

Ключевые слова: интерполяция, сплайны, аппроксимация, дифференциальные операторы, разностные операторы.

Yu. N. Subbotin, S. I. Novikov, V. T. Shevaldin. Extremal function interpolation and splines.

The paper is a survey of the results obtained in the problems of extremal function interpolation over the past 50 years. Various statements of problems in this direction are analyzed both for the case of one variable and for the case of several variables. A special focus is put on the role of interpolation splines of different types (polynomial, interpolating in the mean, $\mathcal{L}$-splines, m-harmonic, etc.) in solving the problems of extremal function interpolation. Important applications of the results and methods of extremal interpolation to other problems in approximation theory and the theory of splines are specified.

Keywords: interpolation, splines, approximation, differential operators, difference operators.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225

Статья представляет собой обзор результатов, полученных за последние примерно 50 лет при исследовании задач экстремальной функциональной интерполяции.

Мы начинаем с постановки задачи Яненко — Стечкина — Субботина об интерполировании в точках равномерной сетки вещественной оси $\mathbb{R}$ с минимальным значением равномерной нормы производной порядка m интерполирующей функции на классе интерполируемых последовательностей с ограниченными конечными разностями порядка m. Затем рассматриваем задачи экстремальной функциональной интерполяции в $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < \infty)$ для классов интерполируемых последовательностей, ограниченных в $l_q(\mathbb{Z})$ $(1 \le q \le \infty)$, и задачи интерполяции в среднем. Эти вопросы составляют содержание разд. 1 настоящей работы. В разд. 2 мы обращаемся к проблемам экстремальной интерполяции с минимальным значением нормы линейного дифференциального оператора. Раздел 3 посвящен применению результатов и методов экстремальной интерполяции к изучению других задач теории приближения и теории сплайнов. В заключительном разд. 4 мы рассматриваем экстремальную интерполяцию в $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$ и анализируем различные постановки задач этого направления. Всюду мы отмечаем роль сплайнов различного вида в решении этих задач.

1. Постановка задачи и основные результаты

Прежде всего введем обозначения, которые мы будем использовать на протяжении всей работы.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное $(n \ge 1)$ евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $C^m(\mathbb{R}^n)$ $(m \ge 1)$ — множество функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, со значениями в $\mathbb{R}$, у которых существуют и непрерывны на $\mathbb{R}^n$ все частные производные до порядка m включительно, $C^0(\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n)$ — множество непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций. Через $L_p(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать стандартное пространство Лебега функций, интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ с p-й степенью при $1 \le p < \infty$ и существенно ограниченных при $p = \infty$. Оно снабжено нормой

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{Z}^n$ — решетка в $\mathbb{R}^n$, т. е. множество всех точек с целочисленными координатами. Для последовательности вещественных чисел $z = \{z_j\}_{j \in \mathbb{Z}^n}$ полагаем

$$\|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} = \begin{cases} \Bigl(\sum\limits_{j \in \mathbb{Z}^n} |z_j|^p \Bigr)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{j \in \mathbb{Z}^n} |z_j|, & p = \infty. \end{cases}$$

Переходим к формулировке исходной задачи, которая положила начало обширному направлению исследований в теории приближения функций, называемому “экстремальная функциональная интерполяция”. В этих исследованиях, проведенных в основном Ю. Н. Субботиным и его учениками, естественным образом появились интерполяционные сплайны с равномерными узлами и различные их обобщения.

Известно, что если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную производную порядка m, то ее конечные разности порядка m с шагом $h > 0$ также являются ограниченными.

Обращение этого утверждения приводит к следующей задаче. Пусть на оси $\mathbb{R}$ в точках равномерной сетки $\{kh\colon k \in \mathbb{Z}\}$ заданы действительные числа $\{y_k\colon k \in \mathbb{Z}\}$ такие, что конечные разности порядка m последовательности $\{y_k\}$ не превосходят по модулю заданного числа $M > 0$:

$$|\Delta^m y_k| = \Bigl| \sum_{s=0}^{m} (-1)^{m-s} C_m^s y_{k+s} \Bigr| \le M.$$

Существует ли функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, принимающая в точках kh значения y_k, у которой производная порядка $(m-1)$ всюду существует, а m-я производная ограничена в метрике L_∞? В случае положительного ответа на этот вопрос чему равна верхняя граница норм этих производных?

Постановка этой задачи, возникшей в связи с обоснованием разностных методов решения задач математической физики, принадлежит Н. Н. Яненко. В форме экстремальной задачи она была сформулирована С. Б. Стечкиным в 1960 г. на семинаре в Свердловском отделении Математического института им. В. А. Стеклова (ныне Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН); задача состоит в следующем.

Пусть $Y_\infty(\Delta^m) = \bigl\{ y\colon y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}},\ \sup\limits_k |\Delta^m y_k| \le 1 \bigr\}$ — класс интерполируемых последовательностей, AC — множество локально абсолютно непрерывных функций,

$F_\infty^h(y) = \{f\colon f^{(m-1)} \in AC,\ f^{(m)} \in L_\infty(\mathbb{R}),\ f(kh) = y_k \ \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$ — класс функций, интерполирующих последовательность $y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Величину

$$A_{m,\infty}(h) = \sup_{y \in Y_\infty(\Delta^m)} \inf_{f \in F_\infty^h(y)} \|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \tag{1.1}$$

будем называть *константой экстремальной интерполяции*, а задачу исследования величины (1.1) — *задачей экстремальной функциональной интерполяции*. Там, где не возникают недоразумения, слово “функциональная” в названии задачи будем опускать. Решить задачу (1.1) — значит найти норму m-й производной “наилучшей” интерполирующей функции для "наихудшей" интерполируемой последовательности из заданного класса. Для фиксированной последовательности $y = \{y_k\}$ задача $\|f^{(m)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \to \inf_{f\in F^h_\infty(y)}$ известна как *интерполяционная задача Фавара* (см., например, [23; 39]), поэтому (1.1) можно интерпретировать также как интерполяционную задачу Фавара для всего класса интерполируемых последовательностей $Y_\infty(\Delta^m)$.

Если $h = 1$, то далее зависимость от h в обозначениях мы будем опускать, например будем писать $A_{m,\infty}$ вместо $A_{m,\infty}(1)$.

При постановке экстремальной задачи (1.1) С. Б. Стечкин высказал две гипотезы:

1) экстремальной будет последовательность $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, у которой $\Delta^m y_k = (-1)^k \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$;

2) $A_{m,\infty} = m$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Впоследствии первая гипотеза полностью подтвердилась и облегчила решение задачи, а именно получение оценки снизу величины $A_{m,\infty}$. Вторая гипотеза подтвердилась лишь для трех начальных значений $m = 1, 2, 3$.

Решение задачи (1.1) было найдено Ю. Н. Субботиным в 1965 г., а доказательство опубликовано в работе [13], основным результатом которой является следующая теорема.

Теорема 1 [13]. *Имеет место равенство*

$$A_{m,\infty} = \frac{\pi^{m+1}}{2^{m+2}}\Big(\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{(m+1)(\nu-1)}}{(2\nu-1)^{m+1}}\Big)^{-1}.$$

Экстремальной функцией, реализующей нижнюю грань в (1.1), *является интерполяционный полиномиальный сплайн степени m дефекта* 1 *с узлами в целых точках при нечетном m и в полуцелых точках при m четном, а экстремальной последовательностью, реализующей точную верхнюю грань в* (1.1), *— последовательность $\{y_k\}$, для которой $\Delta^m y_k = (-1)^k \forall k \in \mathbb{Z}$.*

Эта теорема была доказана посредством получения совпадающих друг с другом оценок сверху и снизу величины $A_{m,\infty}$. Оценка снизу была найдена при интерполировании указанной выше конкретной последовательности произвольной функцией из класса $F^h_\infty(y)$. Оценка сверху была результатом построения интерполяционного полиномиального сплайна степени m с равномерными узлами, о котором говорится в формулировке, для любой последовательности интерполируемых данных из рассматриваемого класса последовательностей. □

Отметим, что более ранний результат В. С. Рябенького [10] дает некоторую, не являющуюся точной, оценку сверху величины (1.1) и тем самым доказывает ее конечность.

В дальнейшем задача (1.1) обобщалась в нескольких направлениях. Сначала Ю. Н. Субботин заменил равномерные нормы на $l_p(\mathbb{Z})$ и $L_p(\mathbb{R})$-нормы $(1 \le p < \infty)$ и нашел точные значения констант экстремальной интерполяции

$$A_{m,p}(h) = \sup_{y\in Y_p(\Delta^m)} \inf_{f\in F^h_p(y)} \|f^{(m)}\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad A_{m,p} = A_{m,p}(1), \tag{1.2}$$

при всех $1 \le p < \infty$. Им была доказана следующая теорема.

Теорема 2 [14]. *Пусть* $Q_{m-1}(x) = (-1)^{m-1} \sum\limits_{j=0}^{m} \sum\limits_{k=0}^{m-j} (-1)^k \, C_m^{k+j} \Big(k + \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\Big)^{m-1}$ $(m \in \mathbb{N})$. *Тогда если* $1 < p < \infty$, *то*

$$A_{m,p} = \frac{(m-1)!}{\Big(\displaystyle\int_0^1 |Q_{m-1}(x)|^{p'}dx\Big)^{1/p'}}\ , \quad (1/p + 1/p' = 1),$$

а при $p = 1$

$$A_{m,1} = \frac{(m-1)!}{\max\limits_{0\le x\le 1}|Q_{m-1}(x)|}\ .$$

Доказательство этого результата проводилось по схеме, которая была аналогична схеме доказательства теоремы 1. Вместо последовательности $y = \{y_k\}$ со свойством $\Delta^m y_k = (-1)^k$, на которой была получена оценка снизу в теореме 1, Ю. Н. Субботин рассмотрел множество последовательностей $\{\widetilde{y}_{k,N}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ таких, что

$$\Delta^m \widetilde{y}_{k,N} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{(2N+1)^{1/p}}, & |k| \le N, \\ 0, & |k| > N \end{cases}$$

при $N > m$, а вместо полиномиальных сплайнов появились некоторые обобщенные сплайн-функции. Заметим, что ранее С. Л. Соболев [11] показал, что интерполяционный процесс Рябенького позволяет установить конечность величин экстремальной интерполяции $A_{m,p}(h)$ при всех значениях $1 \le p < \infty$. □

Случай $p = 1$ является предельным, при этом помимо описываемой задачи также была рассмотрена задача для класса функций, у которых $(m-1)$-я производная имеет ограниченную вариацию, а норма производной порядка m определяется как

$$\|f^{(m)}\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|df^{(m-1)}(x)\right|.$$

Ю. Н. Субботин [14] показал, что для любой последовательности $y \in Y_1(\Delta^m)$ существует интерполирующая ее в целых точках функция $F(x)$, принадлежащая этому классу, для которой справедливо неравенство $\|F^{(m)}\|_1 \le A_{m,1}$ и это неравенство неулучшаемо на всем классе последовательностей.

Получение оценок сверху в теоремах 1 и 2, а также и во многих дальнейших результатах основано на исследовании решений конечно-разностных уравнений. Основной результат здесь следующий.

Теорема 3 [2; 18]. *Если все нули алгебраического многочлена $U_r(z) = \sum_{l=0}^r c_l z^l$, $c_r \ne 0$, с вещественными коэффициентами c_l являются отрицательными и простыми и, кроме того, $U_r(-1) \ne 0$, то конечно-разностное уравнение*

$$\sum_{l=0}^{r} c_l Z_{n+l} = K_n \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{1.3}$$

для любой последовательности вещественных чисел $K = \{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z})$, $1 \le p \le \infty$, имеет единственное решение $Z^0 = \{Z_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Это решение может быть записано в виде

$$Z_n^0 = \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{-s-n} K_s,$$

где коэффициенты $\{a_s\}$ определяются из соотношения $(U_r(x))^{-1} = \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_s x^s$.

Кроме того, для l_p-нормы $(1 \le p \le \infty)$ решения Z^0 справедлива оценка сверху

$$\|Z^0\|_{l_p(\mathbb{Z})} \le \frac{\|K\|_{l_p(\mathbb{Z})}}{|U_r(-1)|}\ .$$

Существование и единственность решения уравнения (1.3) были доказаны М. Г. Крейном [2], а оценка сверху нормы решения (а именно она является ключевой для точного вычисления величины $A_{m,p}(h)$) получена Ю. Н. Субботиным [18]. При использовании этой теоремы выполнение условия $U_r(-1) \ne 0$ достигается за счет выбора “правильного” сдвига узлов сплайна или обобщенной сплайн-функции относительно узлов интерполяции в зависимости от того, является его степень четной или нечетной. При доказательстве теоремы 1 в [13] был применен частный случай теоремы 3, в котором, помимо прочего, дополнительно предполагалось, что характеристический полином $U_r(x)$ разностного оператора при четном r является возвратным, т. е. имеет место равенство $U_r(x) = x^r U_r(1/x)$. Как показали дальнейшие исследования, теорема 3 является эффективным инструментом решения различных задач интерполяции сплайнами и их обобщениями (см., например, [12; 29]). $\square$

В [14] была приведена следующая асимптотическая формула для величин $A_{m,p}$ при $m \to \infty$ и фиксированном $p \in [1, \infty]$:

$$A_{m,p} = \frac{\pi^{m+1/p'}}{2^{m+2}} \left(\frac{\Gamma(p'+1)}{\Gamma^2\left(\dfrac{p'+1}{2}\right)} \right)^{1/p'} (1 + o(1)), \quad 1 \le p \le \infty,$$

где $\Gamma(x)$ — Γ-функция Эйлера, $1/p + 1/p' = 1$. В частности,

$$A_{m,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m (1 + o(1)), \quad A_{m,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m (1 + o(1)), \quad A_{m,\infty} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m (1 + o(1)).$$

Впоследствии результаты Ю. Н. Субботина [13; 14] при $p = 1, 2, \infty$ были повторно доказаны И. Шенбергом [47], причем для $p = 2$ И. Шенберг также нашел точное решение соответствующей задачи для каждой индивидуальной последовательности $y \in Y_2(\Delta^m)$.

Рассмотренные проблемы могут быть описаны следующей абстрактной постановкой, которую мы заимствуем из [19] с незначительными отличиями.

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A\colon X \to Y$ — линейный оператор, $\mathrm{Ker}A = \{x \in X\colon Ax = 0\}$ — ядро оператора A, ω — некоторое, не более чем счетное, множество индексов, $\{\varphi_j\colon j \in \omega\}$ — множество линейных непрерывных функционалов, заданных на пространстве X. Определяем множество $K(c) \subset X$ следующим образом:

$$K(c) = \{x \in X\colon \varphi_j(x) = c_j, j \in \omega\},$$

где $c = \{c_j\}_{j\in\omega}$ — элемент пространства $\mathbf{s}$ вещественных числовых последовательностей. Задача

$$\|Ax\|_Y \longrightarrow \inf_{x \in K(c)} \tag{1.4}$$

может быть интерпретирована как *абстрактная задача типа Фавара* или *абстрактная сплайн-проблема* (см., например, [41, p.178–179]). Экстремаль задачи (1.4) иногда называют *абстрактным сплайном.* По-видимому, впервые эту задачу исследовал М. Аттья [33] для гильбертовых пространств. Если $K(c) \cap \mathrm{Ker}A \ne \varnothing$, то задача (1.4) является вырожденной, так как inf в (1.4) равен нулю. Пусть $T : \mathbf{s} \to \mathbf{s}$ — линейный оператор, рассматриваемый на нормируемом множестве $Q \subset \mathbf{s}$,

$$C_M = \{c \in \mathbf{s}\colon \|Tc\|_Q \le M\},$$

где $M > 0$ — заданное число. Задача формулируется следующим образом: найти величину

$$A_{X,Y}(M) = \sup_{c \in C_M} \inf_{x \in K(c)} \|Ax\|_Y \tag{1.5}$$

и указать экстремальные элементы $x \in X$ и экстремальные последовательности $c \in C_M$ (если они существуют).

Если для некоторой последовательности $c \in C_M$ множество $K(c)$ оказывается пустым, полагаем $A_{X,Y}(M) = \infty$.

Большинство задач, рассматриваемых в настоящей работе, являются частными случаями задачи (1.5) при подходящем выборе входящих в нее множеств и отображений. Отметим отдельно некоторые из них.

I. Пусть $A = d^m/dt^m$, $X = \{x(t)\colon x^{(m-1)} \in AC,\ x^{(m)} \in L_p(\mathbb{R})\}$, $Y = L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, $\omega = \mathbb{Z}$, функционалы представляют собой значения функций в точках равномерной сетки с шагом $h > 0$, т.е. $\varphi_j(x) = x(jh)$ $(j \in \mathbb{Z})$, в качестве T выбираем оператор конечной разности порядка m: $T : c \to \Delta^m c$ $(c \in \mathbf{s})$, а в качестве Q — множество последовательностей из $\mathbf{s}$, у которых l_p-нормы конечных разностей не превосходят единицы. В результате мы приходим к задаче (1.1) при $p = \infty$, а при $1 \le p < \infty$ получаем задачу (1.2). Пространство X можно при необходимости снабдить любой из эквивалентных норм пространства Соболева.

II. Более общая задача состоит в следующем. Пусть все объекты выбраны так же, как это сделано в п. I, с единственным отличием: в качестве Q взято множество последовательностей из $\mathbf{s}$, у которых l_q-нормы $(p \ne q)$ конечных разностей порядка m не превосходят единицы. Тогда задача (1.5) принимает вид: найти величину

$$A_{m,p,q}(h) = \sup_{y \in Y_q(\Delta^m)} \inf_{f \in F_p^h(y)} \|f^{(m)}\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

где

$$Y_q(\Delta^m) = \{y\colon y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\ \ \|\Delta^m y\|_{l_q(\mathbb{Z})} \le 1\},$$

$$F_p^h(y) = \{f\colon f^{(m-1)} \in AC,\ f^{(m)} \in L_p(\mathbb{R}),\ \ f(kh) = y_k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Воспользовавшись переходом к двойственной задаче, Ю. Н. Субботин [19] доказал, что при $1 < p < \infty$

$$A_{2,p,1} = \Big(\frac{1 + a^{p'+1}}{(p'+1)(1+a)(1-a^{p'})}\Big)^{-1/p'}, \quad 1/p + 1/p' = 1,$$

где a — ближайший к нулю положительный корень уравнения

$$x^{2p} - px^{p+1} - 2(p+1)x^p - px^{p-1} + 1 = 0.$$

В этой же работе отмечено, что в общем случае $A_{m,p,q}(h) = \infty$ при $1 \le p < q < \infty$, а при $1 \le q < p < \infty$ вычисление величины $A_{m,p,q}(h)$ сводится к решению следующей задачи на условный экстремум

$$\begin{cases} \Big\| \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} t_j B_{m-1}(t - jh) \Big\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \to \inf\limits_{\{t_j\}_{j\in\mathbb{Z}}}, \\ \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |t_j|^{q'} = 1, \end{cases}$$

где $1/p + 1/p' = 1,\ 1/q + 1/q' = 1$, а функция $B_{m-1}(t) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k (kh - t)_+^{m-1}$ является B-сплайном степени $m-1$ с носителем $[0, mh]$ и узлами в точках сетки $\{kh\}_{k=0}^m$. □

В настоящее время точные значения элементов последовательности $\{t_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, на которой достигается inf в этой задаче, неизвестны. ▼

Затем вместо интерполяции функций в точках равномерной сетки на $\mathbb{R}$ в задачах (1.1) и (1.2) Ю. Н. Субботин в [18] рассмотрел задачу экстремальной интерполяции в среднем в окрестностях этих точек, т. е. в случае

$$\frac{1}{h_1} \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} f(kh + t)dt = y_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.6}$$

где $h_1 > 0$ — шаг усреднения. Она является более трудной и более общей, поскольку для непрерывной функции f справедливо предельное соотношение

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{h_1} \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} f(kh + t)dt = f(kh).$$

Задача состоит в нахождении величины

$$A_{m,p}(h,h_1)=\sup_{y\in Y_p(\Delta^m)}\ \inf_{f\in F_p^{h,h_1}(y)}\|f^{(m)}\|_{L_p(\mathbb{R})}\quad (h>0,\ h_1>0),\tag{1.7}$$

где $Y_p(\Delta^m)$ — множество последовательностей $y=\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, у которых $\|\Delta^m y\|_{l_p(\mathbb{Z})}\le 1$,

$$F_p^{h,h_1}(y)=\left\{f\colon f^{(m-1)}\in AC,\ f^{(m)}\in L_p(\mathbb{R}),\ \frac{1}{h_1}\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} f(kh+t)dt=y_k\ \ \forall k\in\mathbb{Z}\right\}$$

— класс интерполирующих функций.

Задача интерполяции в среднем возникает при анализе экспериментальных данных, поскольку во многих случаях результаты измерений фактически представляют собой усредненные по некоторым интервалам значения функции.

В работе [18] Ю. Н. Субботин нашел точные значения констант экстремальной интерполяции для всех $1<p\le\infty$ при непересекающихся интервалах усреднения, т. е. в предположении $0<h_1\le h$. Как и при решении задачи (1.2), результат выражается через алгебраические полиномы специального вида. Пусть для простоты $h=1$. Полагаем

$$\widetilde{Q}_m(t)=(-1)^{m-1}\sum_{l=0}^{m+1}\ \sum_{k=0}^{m+1-l}(-1)^k\ C_{m+1}^{k+l}(k+1-t)^m\quad (m\in\mathbb{N}).$$

Через $\widetilde{Q}_m(t)$ выражаются многочлены $S_{m,h_1}(t)$ степени $m-1$, в терминах которых ниже будет выписана константа экстремальной интерполяции. Эти полиномы по-разному задаются через $\widetilde{Q}_m(t)$ в зависимости от четности или нечетности их степени:

$$S_{2s,h_1}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{4s}\Big[\widetilde{Q}_{2s}\Big(\dfrac{h_1}{2}+t\Big)+\widetilde{Q}_{2s}\Big(\dfrac{h_1}{2}-t\Big)\Big], & 0\le t\le h_1/2,\\ \dfrac{1}{4s}\Big[\widetilde{Q}_{2s}\Big(t+\dfrac{h_1}{2}\Big)-\widetilde{Q}_{2s}\Big(t-\dfrac{h_1}{2}\Big)\Big], & h_1/2<t\le 1-h_1/2,\\ -\dfrac{1}{4s}\Big[\widetilde{Q}_{2s}\Big(1+\dfrac{h_1}{2}-t\Big)+\widetilde{Q}_{2s}\Big(-1+\dfrac{h_1}{2}+t\Big)\Big], & 1-h_1/2<t\le 1,\end{cases}$$

если $m=2s$ $(s\in\mathbb{N})$ и

$$S_{2s+1,h_1}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{4s+2}\Big[\widetilde{Q}_{2s+1}\Big(\dfrac{h_1}{2}+t\Big)-\widetilde{Q}_{2s+1}\Big(\dfrac{h_1}{2}-t\Big)\Big], & 0\le t\le h_1/2,\\ \dfrac{1}{4s+2}\Big[\widetilde{Q}_{2s+1}\Big(t+\dfrac{h_1}{2}\Big)-\widetilde{Q}_{2s+1}\Big(t-\dfrac{h_1}{2}\Big)\Big], & h_1/2<t\le 1-h_1/2,\\ \dfrac{1}{4s+2}\Big[\widetilde{Q}_{2s+1}\Big(1+\dfrac{h_1}{2}-t\Big)-\widetilde{Q}_{2s+1}\Big(-1+\dfrac{h_1}{2}+t\Big)\Big], & 1-h_1/2<t\le 1,\end{cases}$$

если $m=2s+1$ $(s\in\mathbb{N})$.

Теорема 4 [17; 18]. *Для всех $1<p\le\infty$ и $0<h_1\le 1$ справедливо равенство*

$$A_{m,p}(h_1)=\frac{(m-1)!}{\|S_m(t)\|_{L_{p'}[0,1]}}\quad (1/p+1/p'=1).$$

Экстремальными функциями в этой задаче являются обобщенные полиномиальные сплайн-функции, построенные на основе полиномов $S_m(t)$ при $1<p<\infty$, а в случае $p=\infty$ — интерполяционные в среднем сплайны, о которых пойдет речь ниже. Доказательства оценок сверху были основаны, как и ранее, на применении теоремы 3. $\square$

Изучение задач интерполяции в среднем привело к понятию интерполяционных в среднем сплайнов.

О п р е д е л е н и е [18, § 4]. Функция $\sigma_m(x, f)$ называется интерполяционным в среднем сплайном для заданной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если

1) $\sigma_m^{(m-1)} \in AC$;

2) $\sigma_m^{(m)}(x) = Z_n^{(m)}$ при $nh + \frac{1+(-1)^m}{4}h \le x \le h + nh + \frac{1+(-1)^m}{4}h$, $(n \in \mathbb{Z})$, где $Z_n^{(m)}$ — вещественные константы;

3) $\frac{1}{h_1} \displaystyle\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma_m(nh+t)dt = \frac{1}{h_1} \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} f(nh+t)dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

В работе [18] при $0 < h_1 \le h$ были найдены условия существования и единственности интерполяционных в среднем сплайнов и получены оценки погрешности приближения функций и их производных такими сплайнами.

Ограничение $0 < h_1 \le h$ означает, что усреднение осуществляется по части (возможно, достаточно малой) интервала между соседними узлами сплайна. С точки зрения возникновения процедуры усреднения и ее использования в численном анализе такой выбор h и h_1 представляется вполне естественным. Однако ситуация, когда $h_1 > h$, также представляет интерес, по крайней мере в теоретическом аспекте. Дальнейшему изучению задач экстремальной интерполяции в среднем были посвящены работы Ю. Н. Субботина [20; 21] середины 90-х годов, когда он снова вернулся к задачам этой тематики. Ю. Н. Субботиным были найдены точные значения констант экстремальной интерполяции при $h < h_1 < 2h$ для $1 \le p \le \infty$, в частности при $h = 1$, $1 < h_1 < 2$ было доказано, что

$$A_{m,\infty}(h_1) = h_1 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+2} \left| \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\cos\left[(2s+1)\pi\left(\dfrac{h_1}{2} - \dfrac{1+(-1)^m}{4}\right) - \dfrac{m\pi}{2}\right]}{(2s+1)^{m+2}} \right|^{-1},$$

а при $h_1 = 2l$ $(l = 1, 2, \ldots)$ константа экстремальной интерполяции $A_{m,\infty}(h_1)$ равна бесконечности. □

В настоящее время значения констант экстремальной интерполяции в среднем при $2l < h_1 < 2l + 2$ $(l = 1, 2, \ldots)$ остаются неизвестными. Неясно даже, конечны они или нет. ▼

Значительно позже в работе Х. Бехфоруза [34] были введены так называемые *кубические интегро-сплайны*, а затем в [51; 52] и некоторых других работах (см., например, ссылки в [51]) подобные конструкции рассматривались и для сплайнов других степеней: изучались алгоритмы построения таких сплайнов, порядки сходимости для функций и их производных, формосохраняющая аппроксимация и некоторые другие вопросы. Фактически интегро-сплайны являются определенными выше интерполяционными в среднем сплайнами в частном случае, когда $h = h_1$. Отметим, что исследования интегро-сплайнов в работах [34; 51–53] не опираются на результаты Ю. Н. Субботина и его учеников, относящиеся к задачам экстремальной интерполяции.

Теперь обратимся к локальной версии задачи экстремальной интерполяции, рассмотренной Ю. Н. Субботиным в работе [50].

Пусть $p = \infty$, и для простоты полагаем $h = 1$. Как было отмечено ранее (см. теорему 1), экстремальной функцией в задаче (1.1) является интерполяционный полиномиальный сплайн степени m дефекта 1 с узлами в целых или полуцелых точках в зависимости от четности его степени. При этом для построения сплайна использовалась вся бесконечная последовательность интерполируемых данных $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Однако в целом ряде ситуаций мы можем одновременно работать не со всей последовательностью $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, а только с некоторым конечным набором $y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+s-1}$ $(s \ge 2)$ элементов этой последовательности. Потребность адаптировать задачи экстремальной интерполяции к этому обстоятельству обуславливает постановку следующей проблемы.

Пусть $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел, $\mathfrak{y} = \{y_k\colon k \in \mathbb{Z}_+\}$ — последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая неравенству $|\Delta^m y_k| \le 1,\ \ k \in \mathbb{Z}_+$. Требуется найти наименьшее положительное число $B(s,m)$ такое, что для любой такой последовательности $\mathfrak{y}$ существует функция $u(t)$, $\operatorname{ess\,sup}\{|u(t)|\colon 0 \le t < +\infty\} \le B(s,m)$, для которой дифференциальное уравнение $y^{(m)}(t) = u(t)$ имеет решение $y(t)$, удовлетворяющее требованию $y(k) = y_k$, причем мы знаем только s $(s \ge 2)$ элементов для построения решения $y(t)$ и функции $u(t)$ на каждом из промежутков $[k, k+1]$. Нетрудно заметить, что $A_{m,\infty} \le B(s,m)$. В связи с поставленной задачей возникают естественные вопросы:

1) Какие значения s обеспечивают конечность величины $B(s,m)$?

2) Каковы точные значения $B(s,m)$?

Ответы на эти вопросы частично содержатся в отмеченной выше работе [50]. Там доказано, что $B(2,2) = 1+\sqrt{2}$, $B(s,2) = A_{2,\infty} = 2$ при всех $s \ge 3$, а также установлено, что при всех $m \ge 3$ величина $B(s,m)$ конечна, если $s \ge m$, и равна бесконечности в противном случае. $\square$

2. Экстремальная интерполяция с наименьшим значением нормы дифференциального оператора

Следующее направление обобщений исходной задачи (1.1) состоит в замене m-й производной линейным дифференциальным оператором порядка m, а конечных разностей — соответствующими разностными операторами. Методы, которые применяются при исследовании задач этого цикла, являются дальнейшим развитием идей и подходов Ю.Н.Субботина [13;14;18].

Пусть D — оператор дифференцирования, I — тождественный оператор,

$$\mathcal{L}_m(D) = D^m + a_{m-1}D^{m-1} + \ldots + a_1 D + a_0 I \tag{2.1}$$

— произвольный линейный дифференциальный оператор порядка $m \in \mathbb{N}$ с постоянными вещественными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ и старшим коэффициентом, равным единице. Оператор (2.1) можно записать в виде

$$\mathcal{L}_m(D) = \prod_{s=1}^{l} \left(D^2 - 2\gamma_s D + (\gamma_s^2 + \alpha_s^2) I\right) \prod_{j=1}^{m-2l} \left(D - \beta_j I\right),$$

где $\beta_j,\ \gamma_s,\ \alpha_s$ — вещественные константы, причем можно считать, что $\alpha_s > 0,\ \ s = 1, 2, \ldots, l$. Через $p_m(z)$ обозначим характеристический многочлен дифференциального оператора (2.1).

Пусть $\Delta^h_{\mathcal{L}_m}$ — линейный разностный оператор, определенный на пространстве последовательностей $y = \{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$, который обращает в нуль на равномерной сетке с шагом $h > 0$ любое решение дифференциального уравнения $\mathcal{L}_m(D)\varphi = 0$. Он имеет вид

$$\Delta^h_{\mathcal{L}_m} = \prod_{s=1}^{l} \left(\tau^2 - 2e^{\gamma_s h}(\cos\alpha_s h)\tau + e^{2\gamma_s h} I\right) \prod_{j=1}^{m-2l} \left(\tau - e^{\beta_j} I\right) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} \mu_{r,m} \tau^r, \tag{2.2}$$

где $\tau y_k = y_{k+1},\ \tau^0 = I,\ \mu_{r,m}$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$ — вещественные числа.

Классы интерполируемых последовательностей и интерполирующих функций определяются соответственно следующим образом:

$$Y_p(\Delta^h_{\mathcal{L}_m}) \ = \ \{y\colon y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\ \ \|\Delta^h_{\mathcal{L}_m} y\|_{l_p(\mathbb{Z})} \le 1\},$$

$$F^h_p(\mathcal{L}_m) \ = \ \left\{f\colon f^{(m-1)} \in AC,\ \mathcal{L}_m(D)f \in L_p(\mathbb{R}),\ \ f(kh) = y_k\ \ \forall k \in \mathbb{Z}\right\},$$

а константа экстремальной интерполяции —

$$A_{\mathcal{L}_m,p}(h) = \sup_{y\in Y_p(\Delta^h_{\mathcal{L}_m})} \inf_{f\in F^h_p(\mathcal{L}_m)} \|\mathcal{L}_m(D)f\|_{L_p(\mathbb{R})}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{2.3}$$

Постановка экстремальной задачи (2.3) также охватывается абстрактной схемой (1.5), если в ней положить $A = \mathcal{L}_m(D)$, $X = \{f(t)\colon f^{(m-1)} \in AC,\ \mathcal{L}_m(D)f \in L_p(\mathbb{R})\}$, $Y = L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, $\omega = \mathbb{Z}$, $\varphi_j(f) = f(jh)$ $(j \in \mathbb{Z})$, в качестве T выбрать конечно-разностный оператор $\Delta^h_{\mathcal{L}_m}$, а в качестве Q — множество последовательностей $y \in \mathbf{s}$, у которых l_p-норма конечно-разностного оператора, примененного к последовательности y, не превосходит единицы. Пространство X можно при необходимости снабдить операторным аналогом соболевской нормы.

Первый шаг в решении задачи (2.3) сделали в 1977 г. А. Шарма и Дж. Цимбаларио [25] (см. также [49]). Используя метод Ю. Н. Субботина [13] и результаты Ч. Мичелли [45] и И. Шенберга [48], они нашли точные значения величины $A_{\mathcal{L}_m,\infty}(h)$ при любом $h > 0$ для формально самосопряженных операторов вида (2.1), т. е. таких что $p_m(z) = (-1)^m p_m(-z)$, при дополнительном предположении, согласно которому все корни характеристических полиномов являются вещественными. Для таких линейных дифференциальных операторов свойства функций, возникающих в процессе исследования величины (2.3), наиболее близки ранее исследованному случаю оператора D^m.

Для произвольного дифференциального оператора (2.1) задача (2.3) была решена В. Т. Шевалдиным в работах [26; 27]. Определим функции, в терминах которых формулируются доказанные им результаты. Пусть $\varphi_m(t)$ — функция, определяемая следующими условиями: $\mathcal{L}_m(D)\varphi_m(t) \equiv 0$, $\varphi_m^{(j)}(0) = \delta_{m-1,j}$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Известны различные формы представления функции $\varphi_m(t)$, в частности представление в терминах комплексного контурного интеграла:

$$\varphi_m(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{e^{tz}}{p_m(z)} dz, \tag{2.4}$$

где i — мнимая единица, C — произвольная замкнутая спрямляемая кривая в комплексной плоскости, содержащая внутри себя все нули полинома $p_m(z)$, обход кривой осуществляется в положительном направлении. В справедливости (2.4) легко убедиться, воспользовавшись интегральным представлением разделенных разностей [1, гл.1, § 4] и теоремой Коши об интеграле по замкнутому контуру. Заметим, что для конкретных дифференциальных операторов теорема Коши о вычетах позволяет легко перейти от контурного интеграла к конечной сумме. Например, таким путем удается показать, что для тригонометрического дифференциального оператора $D(D^2 + 1^2) \dots (D^2 + n^2)$ функция φ_{2n+1} выражается простой формулой $\varphi_{2n+1}(t) = 2^{2n}((2n)!)^{-1} \sin^{2n} x/2$.

Далее полагаем

$$P_m(t) = h \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \sum_{\nu=j}^{m} (-1)^{m-\nu} \mu_{\nu,m}\ \varphi_m((\nu + 1 - j - t)h),$$

где $\mu_{\nu,m}$ — коэффициенты в представлении конечно-разностного оператора (2.2). Эта функция является аналогом полинома Q_{m-1} в теореме 3 и совпадает с ним, если $\mathcal{L}_m(D) = D^m$.

Теорема 5 [26; 27]. *Пусть* $0 < h < \pi(\max \alpha_s)^{-1}$, *тогда*

$$A_{\mathcal{L}_m,p}(h) = \begin{cases} h\left(\max\limits_{t\in[0,1]} |P_m(t)|\right)^{-1}, & p = 1, \\ h^{1/p}\left(\int_0^1 |P_m(t)|^{p'}\, dt\right)^{-1/p'}, & 1 < p < \infty, \\ \left(\int_0^1 |P_m(t)|\, dt\right)^{-1}, & p = \infty, \qquad \text{где } \ 1/p + 1/p' = 1. \end{cases}$$

□

При $p = \infty$ экстремальной функцией в задаче (2.3) является интерполяционный $\mathcal{L}$-сплайн порядка $m+1$ с равномерными узлами, соответствующий дифференциальному оператору $D\mathcal{L}_m(D)$, а при $1 \le p < \infty$ — некоторые обобщенные $\mathcal{L}$-сплайны. Интерполяционные $\mathcal{L}$-сплайны, соответствующие дифференциальному оператору $D\mathcal{L}_m(D)$, — это функции $s_m(t)$, удовлетворяющие условиям

1) $s_m^{(m-1)} \in C(\mathbb{R})$;

2) $\mathcal{L}_m(D)s_m(t+(l-1)h) = Z_l,\ \ \alpha h \le t < (\alpha+1)h,\ \ l \in \mathbb{Z}$;

3) $s_m(jh) = y_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$,

где Z_l — некоторые константы. Здесь $\{(\alpha+l)h\colon l \in \mathbb{Z}\}$ — множество узлов $\mathcal{L}$-сплайнов, задаваемое при помощи параметра $\alpha \in [0,1)$, который, в свою очередь, специальным образом определяется через дифференциальный оператор (2.1): число α является единственным нулем функции $P_m(x)$ на полуинтервале $[0,1)$ (см. [26; 27]). Если же дифференциальный оператор (2.1) является формально самосопряженным, то $\alpha = 0$ при четном m и $\alpha = 1/2$ при m нечетном. Именно такие значения принимает параметр α в результатах Ю. Н. Субботина [13–20] и А. Шармы и Дж. Цимбаларио [25].

В отличие от теоремы 1 и теоремы 2 в теореме 5 содержится ограничение сверху на шаг сетки $h < \pi(\max\alpha_s)^{-1}$. В [27] установлено, что это ограничение не может быть ослаблено на классе всех дифференциальных операторов вида (2.1), поскольку при $h = \pi(\max\alpha_s)^{-1}$ для некоторых из них константа экстремальной интерполяции оказывается равной бесконечности. Ограничение возникает всякий раз, когда характеристический полином дифференциального оператора (2.1) имеет невещественные нули. Оно тесно связано с вопросами о справедливости аналогов теоремы Ролля для дифференциальных операторов на интервалах соответствующей длины. Более подробную информацию по этому и некоторым близким вопросам можно найти, например, в [46] и приведенном там списке литературы. Если все нули характеристического многочлена являются вещественными, ограничение на шаг h отсутствует (см. [25]).

Позже в работах В. Т. Шевалдина [28; 29; 32] рассматривались задачи экстремальной интерполяции в среднем для дифференциальных операторов вида (2.1) при неперекрывающихся $(0 \le h_1 \le h)$ и перекрывающихся $(h_1 < h \le 2h)$ интервалах усреднения. Константа экстремальной интерполяции $A_{\mathcal{L}_m,p}(h,h_1)$ определялась аналогично (1.7) с заменой m-й производной линейным дифференциальным оператором $\mathcal{L}_m(D)$, а конечных разностей — разностными операторами $\Delta^h_{\mathcal{L}_m}$, построенными выше:

$$A_{\mathcal{L}_m,p}(h,h_1) = \sup_{y\in Y_p(\Delta^h_{\mathcal{L}_m})}\ \inf_{f\in F_p^{h,h_1}(y)} \|\mathcal{L}_m(D)f\|_{L_p(\mathbb{R})}. \tag{2.5}$$

Были найдены точные значения величины (2.5). Полученный результат по форме близок к теореме 4 и состоит в следующем: если $0 < h < \pi(\max\alpha_s)^{-1}$, $0 < h_1 \le h$, то для всех $1 \le p \le \infty$ выполняется равенство

$$A_{\mathcal{L}_m,p}(h,h_1) = \Big(\|S_m\|_{L_{p'}[0,1]}\Big)^{-1}, \tag{2.6}$$

где $1/p + 1/p' = 1$,

$$S_m(t) = \Big(\frac{2h}{\pi h_1}\Big)\prod_{s=1}^{l}\Big(1+2e^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h}\Big)$$

$$\times\prod_{j=1}^{m-2l}\Big(1+e^{\beta_j h}\Big)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{e^{-i(2\nu+1)\pi t}\sin((2\nu+1)\pi h_1/2h)}{(2\nu+1)p_m((2\nu+1)\pi i/h)}\ , \tag{2.7}$$

i — мнимая единица.

При $p = \infty$ равенство (2.6) справедливо и для $h < h_1 \le 2h$. Из (2.6) и (2.7) следует, что при $h_1 = 2h$ величина (2.5) обращается в бесконечность. Более подробная информация содержится в упомянутых выше работах [28; 29; 32]. □

Отметим еще один вариант задачи экстремальной интерполяции, который был сформулирован Ю. Н. Субботиным [15] и позволил ему найти оценки снизу поперечников классов функций в равномерной метрике, задаваемых с помощью выпуклого модуля непрерывности.

Пусть $\omega(\delta,\varphi)$ — модуль непрерывности функции $\varphi \in C(\mathbb{R})$, который определяется равенством

$$\omega(\delta,\varphi) = \sup_{\substack{|h|\le\delta \\ t,t+h\in\mathbb{R}}} |\varphi(t+h)-\varphi(t)|,$$

$\omega = \omega(\delta)$, $0 \le \delta < +\infty$, — заданный модуль непрерывности, т. е. функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega(\delta) = \omega(0) = 0, \quad 0 \le \omega(\delta_2)-\omega(\delta_1) \le \omega(\delta_2-\delta_1), \quad 0 \le \delta_1 \le \delta_2.$$

Задача экстремальной интерполяции в этом случае состоит в исследовании величины

$$B(\mathcal{L}_m,\omega,h) = \sup_{y\in Y_\infty(\Delta^h_{\mathcal{L}_m})} \inf_{f\in F^h_\infty(\mathcal{L}_m)} \sup_{\delta>0} \frac{\omega(\delta,\mathcal{L}_m(D)f)}{\omega(\delta)}. \tag{2.8}$$

Иными словами, надо найти наименьшую константу $B(\mathcal{L}_m)$ в неравенстве

$$\omega(\delta,\mathcal{L}_m(D)f) \le B(\mathcal{L}_m)\ \omega(\delta)$$

на классе интерполируемых последовательностей $Y_\infty(\Delta^h_{\mathcal{L}_m})$. Для дифференциального оператора $\mathcal{L}_m(D) = D^m$ и выпуклого модуля непрерывности решение задачи (2.8) было найдено Ю. Н. Субботиным [15], доказавшим что

$$B(D^m,\omega,h) = \left(\frac{\pi}{2h}\right)^m \left| \int_0^\pi \omega\left(\frac{xh}{\pi}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k(m+1)} \frac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{(2k+1)^m}\ dx \right|^{-1}.$$

Для произвольного линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами при $0 < h < \pi(\max\alpha_s)^{-1}$ точное значение величины $B(\mathcal{L}_m,\omega,h)$ найдено В. Т. Шевалдиным [28]. □

В заключение этого раздела кратко остановимся на задаче экстремальной интерполяции в случае, когда мы интерполируем на неравномерной сетке узлов. Если сетка узлов интерполяции не является равномерной, то при задании класса интерполируемых данных разумно заменить конечные разности на разделенные разности. Константа экстремальной интерполяции определяется здесь так же, как и величина (1.1), но с учетом сделанной замены. Задача экстремальной интерполяции для неравномерных сеток является очень трудной; некоторые оценки были найдены, например, в работах К.де Бора [35] и Т. Кункле [42] (см. также приведенную в этих работах литературу). Однако в настоящее время неизвестна даже асимптотика константы экстремальной интерполяции при $m \to \infty$. ▼

3. Применения результатов и методов экстремальной интерполяции

Полученные результаты, а также методы, разработанные в ходе исследования задач экстремальной интерполяции, позволили вывести точные оценки снизу поперечников по Колмогорову классов периодических дифференцируемых функций [15; 30; 31], доказать существование и единственность интерполяционных и интерполяционных в среднем сплайнов с ограниченной m-й производной, исследовать их сходимость при сгущении сетки узлов, а также дали возможность найти решения ряда других проблем теории сплайнов и теории аппроксимации. На некоторых задачах остановимся более подробно.

1) В работах Н. Л. Пацко [8;9] показано, как полиномиальные сплайны на оси $\mathbb{R}$, возникшие при решении задач экстремальной интерполяции, можно применять для аппроксимации функций, заданных только на конечном отрезке.

Пусть на отрезке $[0,a]$, $a>0$, задана функция f, имеющая l непрерывных производных, $0\le l\le n$. Разобьем отрезок $[0,a]$ на r $(r>n+1)$ равных частей точками $\{x_j\}_{j=0}^r$, и пусть $h=a/r$. Определим полиномиальный сплайн $S_n(x,h)$ степени n, интерполирующий функцию f, следующим образом. Пусть $F(x)$ — непрерывная на всей оси $\mathbb{R}$ функция вида

$$F(x)=\begin{cases} Q_n(x), & x<0,\\ f(x), & 0\le x\le a,\\ R_n(x), & x>a,\end{cases}$$

где

$$Q_n(x)=f(x_0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_h^j f(x_0)}{j!\ h^j}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1}),$$

$$R_n(x)=f(x_{r-n})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_h^j f(x_{r-n})}{j!\ h^j}(x-x_{r-n})(x-x_{r-n+1})\dots(x-x_{r-n+j-1})$$

— интерполяционные многочлены Лагранжа и $\Delta_h^k f(x)=\sum\limits_{s=0}^{n}(-1)^{k-s}C_k^s\ f(x+sh)$. Для функции $F(x)$ по схеме Ю. Н. Субботина [13] строится единственный полиномиальный сплайн $S_n(x,h)$ степени n минимального дефекта, интерполирующий функцию F в точках mh $(m\in\mathbb{Z})$ и такой, что

$$S_n^{(n)}(x,h)=Z_m,\quad mh+\Theta_n\le x\le mh+h+\Theta_n,$$

где $\Theta_n=0$, если n нечетно, и $\Theta_n=h/2$, если n четно, $\{Z_m\}$ — некоторые константы.

Для погрешности приближения такими сплайнами справедлива следующая теорема.

Теорема 6 [8;9]. *При $1\le p\le\infty$, $1\le l\le n$ для любой функции $f\in W_p^l[0,a]$ имеют место неравенства*

$$\|f^{(i)}-S_n^{(i)}\|_p\le c(n,l,i)\ h^{l-i}\ \omega(f^{(l)},h)_p,\quad i=0,1,\dots,l,$$

где $c(n,l,i)$ — некоторые константы и $\omega(h,g)_p$ — p-й модуль гладкости функции g в пространстве $L_p[0,a]$. □

2) В 1972 г. Ю. Н. Субботин обобщил некоторые свои прежние результаты о приближении функций интерполяционными сплайнами на всей оси $\mathbb{R}$, и в частности для сплайнов $S_n(x)$ степени n, интерполирующих непрерывную функцию $f(x)$ в узлах $\{kh\}_{k\in\mathbb{Z}}$, и получил следующий результат.

Теорема 7 [16]. *Если функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\Delta_t^n f(x)|<+\infty$ $(0<t<+\infty)$, то*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-S_n(x)|\le B_n\ \widetilde{\omega}_{n+1}(h,f),$$

где $B_n>0$ и $\widetilde{\omega}_{n+1}(h,f)=\sup\limits_{|t|\le h}\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\Delta_t^n f(x)|$.

С помощью этой теоремы Ю. Н. Субботин в той же работе [16] дал положительный ответ на вопрос, поставленный П. Л. Ульяновым: верно ли, что для любого натурального числа k в пространстве $C(0,2\pi)$ непрерывных 2π-периодических функций существует базис такой, что для любой функции $f\in C(0,2\pi)$ имеет место неравенство

$$\|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_{C(0,2\pi)}\le A_k\ \omega_k(2\pi/n,f),$$

где $A_k > 0$, $\omega_k(\delta, f)$ — модуль гладкости порядка k функции f и $S_n(f,x)$ — n-я частичная сумма разложения функции f по элементам базиса ?

В связи с этим результатом отметим следующее обстоятельство. Отвечая на вопрос П. Л. Ульянова, Ю. Н. Субботин на основе полиномиальных сплайнов построил, выражаясь современным языком теории всплесков, кратномасштабную аппроксимацию — систему вложенных подпространств V_j и сконструировал гладкий базис пространства $C(0,2\pi)$, состоящий из сдвигов и растяжений интерполяционных полиномиальных сплайнов. Это было сделано в 1972 г., задолго до появления основополагающих результатов по теории всплесков (о всплесках см., например, [24] и приведенную там библиографию). □

3) Метод построения интерполяционных сплайнов, который позволил найти точные оценки сверху в задачах экстремальной интерполяции, оказался эффективным инструментом исследования разрешимости интерполяционных задач на классах обобщенных сплайнов. Приведем один результат, относящийся к интерполяции периодическими сплайнами, определяемыми с помощью операторов свертки с ядрами типа Бернулли.

Пусть

$$K_{r,\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(kt - \alpha\pi/2) \quad (r > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$$

— ядро, являющееся линейной комбинацией ядра Бернулли и его сопряженного.

2π-*периодическим* “*дробным*” *сплайном*, соответствующим ядру, называется функция вида

$$S(x) = C + \pi^{-1}\, K_{r,\alpha} * \varphi, \quad \varphi \perp 1, \tag{3.1}$$

где $\varphi(t) = Z_j,\ (j-1)h \le t < jh\ (j \in \mathbb{Z}),\ Z_{j+2m} = Z_j,\ h = \pi/m\ (m \in \mathbb{Z})$.

При $\alpha = r \in \mathbb{N}$ функция $S(x)$ является обычным 2π-периодическим полиномиальным сплайном степени r с $2m$ равноотстоящими узлами на периоде.

В. Т. Шевалдин [31] с помощью теории матриц-циркулянтов доказал, что на полуинтервале $[-h/2, h/2)$ у функции

$$a_m(t) = \frac{2}{m^{r+1}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cos((2\nu+1)mt - \alpha\pi/2)}{(2\nu+1)^{r+1}}$$

при любых $r > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ существует единственное число τ такое, что $|a_m(\tau)| = \|a_m\|_C$ и имеет место следующая теорема.

Теорема 8 [31]. *Для любой последовательности $y = \{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющей условию $y_{\nu+2m} = y_\nu$, существует единственный сплайн S вида* (3.1) *такой, что*

$$S(\tau + (\nu + 1/2)h) = y_\nu \quad (\nu \in \mathbb{Z}).$$ □

4. Различные обобщения задачи Ю. Н. Субботина на многие переменные

Переходим к задачам экстремальной интерполяции для функций нескольких переменных в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть $m = (m_1, \dots, m_n)$ — мультииндекс, $m_j > 0,\ j = 1, 2, \dots, n$, $|m| = m_1 + \dots + m_n$,

$$D^m = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}}$$

— оператор смешанной производной порядка m, содержащий дифференцирование по всем переменным. Его разностный аналог определяем как суперпозицию n конечно-разностных операторов $\Delta_s^{m_s}$ $(s = 1, 2, \dots, n)$, где верхний индекс указывает порядок оператора, а нижний — номер переменной, по которой выполняются сдвиги, т. е.

$$\Delta^m = \Delta_1^{m_1} \Delta_2^{m_2} \cdots \Delta_n^{m_n}.$$

Пусть $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ $(h_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ — шаги интерполяции по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно, $kh = (k_1h_1, k_2h_2, \ldots, k_nh_n)$.

Задача экстремальной интерполяции формулируется следующим образом. Пусть

$$Y_p(\Delta^m) = \{y\colon y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n},\ \ \|\Delta^m y\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} \le 1\}$$

— класс интерполируемых последовательностей,

$$F_p^h(y) = \{f \in C^{(m-1)}(\mathbb{R}^n)\colon \|D^m f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty,\ \ f(kh) = y_k\ \forall k \in \mathbb{Z}^n\}$$

— класс интерполирующих функций. Константа экстремальной интерполяции определяется аналогично случаю одной переменной:

$$A_{m,p}(h) = \sup_{y\in Y_p(\Delta^m)}\ \inf_{f\in F_p^h(y)} \|D^m f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{4.1}$$

В рамках абстрактной постановки (1.5) задача (4.1) возникает, когда $A = D^m$, $X = \{f \in C^{(m-1)}(\mathbb{R}^n) : \|D^m f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty\}$, $Y = L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, $\omega \in \mathbb{Z}^n$, $\varphi_j(f) = f(jh)$ $(j \in \mathbb{Z}^n)$, в качестве T выбран определенный выше конечно-разностный оператор общего порядка m, а в качестве Q — множество последовательностей, у которых $l_p(\mathbb{Z}^n)$-нормы конечно-разностного оператора не превосходят единицы.

Ю. Н. Субботин [14] нашел точные значения величин $A_{m,p}(h)$ при всех $1 \le p \le \infty$ и произвольных $h_j > 0, j = 1, 2, \ldots, n$. При этом оказалось, что

$$A_{m,p}(h) = \prod_{j=1}^{n} A_{m_j,p}(h_j),$$

где $A_{m_j,p}(h_j),\ j = 1, 2, \ldots, n$ — константы экстремальной интерполяции соответствующих задач для функций одной переменной. □

Применив подход Ю. Н. Субботина, С. И. Новиков и В. Т. Шевалдин [4] заменили оператор D^m произвольным линейным дифференциальным оператором $\mathcal{L}_m$, допускающим представление в виде произведения n линейных дифференциальных операторов $\mathcal{L}_{m_j}(D_j)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ от одной переменной с постоянными вещественными коэффициентами (по каждой переменной x_j свой оператор порядка m_j):

$$\mathcal{L}_m \ = \ \mathcal{L}_{m_1}(D_1)\mathcal{L}_{m_2}(D_2)\ldots\mathcal{L}_{m_n}(D_n),$$

$$D_j = \partial/\partial x_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\mathcal{L}_{m_j}(D_j) \ = \ D_j^{m_j} + a_{m_j-1,j}\ D_j^{m_j-1} + \ldots + a_{1,j}\ D_j + a_{0,j}\ I.$$

Как и в предыдущем случае, разностный аналог $\Delta^h_{\mathcal{L}_m}$ дифференциального оператора $\mathcal{L}_m$ представляет собой суперпозицию разностных операторов $\Delta^{h_j}_{\mathcal{L}_{m_j}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\Delta^h_{\mathcal{L}_m} \ = \ \Delta^{h_1}_{\mathcal{L}_{m_1}}\Delta^{h_2}_{\mathcal{L}_{m_2}}\cdots\Delta^{h_n}_{\mathcal{L}_{m_n}},$$

где каждый из операторов $\Delta^{h_j}_{\mathcal{L}_{m_j}}$ (определенных на пространстве одномерных последовательностей $y = \{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$) обращает в нуль на равномерной сетке с шагом h_j все решения дифференциального уравнения $\mathcal{L}_{m_j}(D_j)\varphi = 0$. В [4] были найдены точные значения констант экстремальной интерполяции $A_{\mathcal{L}_m,p}(h)$ при всех $1 \le p \le \infty$ и $0 < h_j < \pi(\max\alpha_{s,j})^{-1},\ j = 1, 2, \ldots, n$. Здесь, как и в случае смешанной производной, оказалось, что

$$A_{\mathcal{L}_m,p}(h) = \prod_{j=1}^{n} A_{\mathcal{L}_{m_j},p}(h_j),$$

где $A_{\mathcal{L}_{m_j,p}}(h_j),\ (j=1,2,\dots,n)$ — константы экстремальной интерполяции в соответствующих одномерных задачах. $\square$

Для функций нескольких переменных трудно найти естественную постановку задачи экстремальной функциональной интерполяции. Дальнейшие исследования этой задачи в пространстве $\mathbb{R}^n,\ n\geq 2$, развивались в двух направлениях.

Первое направление — замена нормы m-й смешанной производной суммой норм всех частных производных порядка m.

Сначала рассмотрим наиболее простой случай производных первого порядка и равномерной нормы. Пусть $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и Δ_s — конечная разность первого порядка по s-й переменной $(s=1,2,\dots,n)$. Пусть

$$M_\infty=\Big\{z\colon z=\{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n},\ \sup_{j\in\mathbb{Z}^n}\sum_{s=1}^{n}|\Delta_s z_j|\leq 1\Big\}$$

— класс интерполируемых последовательностей и

$$Y_\infty(z)=\big\{f\in C(\mathbb{R}^n)\colon f'_{x_s}(x)(s=1,2,\dots,n)\ \text{существуют п.в. и ограничены},\ f(j)=z_j\ \forall j\in\mathbb{Z}^n\big\}$$

— класс функций $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, интерполирующих фиксированную последовательность $z=\{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n}$.

Задача состоит в нахождении величины

$$A_{1,\infty}(\mathbb{R}^n)=\sup_{z\in M_\infty}\ \inf_{f\in Y_\infty(z)}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sum_{s=1}^{n}\Big|\frac{\partial f(x)}{\partial x_s}\Big|. \tag{4.2}$$

Следующий, ранее не публиковавшийся результат, был получен С. И. Новиковым.

Теорема 9. *При всех $n\in\mathbb{N}$ имеет место равенство* $A_{1,\infty}(\mathbb{R}^n)=1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала оценим величину $A_{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ снизу. Из очевидного равенства

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=C+\int\limits_0^{x_s}\frac{\partial f(x_1,\dots,x_{s-1},t,x_{s+1},\dots,x_n)}{\partial t}dt,$$

в котором константа C не зависит от x_s, с помощью условий интерполяции получаем

$$\Delta_s z_j=\int\limits_{j_s}^{j_s+1}\frac{\partial f}{\partial x_s}dx_s,\quad (s=1,2,\dots,n).$$

Отсюда имеем

$$\sum_{s=1}^{n}|\Delta_s z_j|=\sum_{s=1}^{n}\Big|\int\limits_{j_s}^{j_s+1}\frac{\partial f}{\partial x_s}dx_s\Big|.$$

Берем последовательность $\widetilde{z}=\{\widetilde{z}_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n}$, для которой сумма слева равна единице. Тогда

$$1\leq\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{j_s}^{j_s+1}\Big|\frac{\partial f}{\partial x_s}\Big|dx_s\leq\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big(\Big|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|+\Big|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|+\ldots+\Big|\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|\Big),$$

и, переходя к точной нижней грани по функциям $f\in Y_\infty(\widetilde{z})$, приходим к неравенству

$$A_{1,\infty}(\mathbb{R}^n)\geq 1. \tag{4.3}$$

Теперь получим оценку сверху. Берем произвольную последовательность $z \in M_\infty$, фиксируем произвольный узел целочисленной решетки $j = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ и строим функцию

$$\varphi_j(x) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — константы, однозначно определяемые интерполяционными условиями

$$\begin{array}{l} \varphi_j(j_1, j_2, \dots, j_n) = z_{j_1, j_2, \dots, j_n}, \\ \varphi_j(j_1 + 1, j_2, \dots, j_n) = z_{j_1+1, j_2, \dots, j_n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_j(j_1, j_2, \dots, j_n + 1) = z_{j_1, j_2, \dots, j_n + 1}. \end{array}$$

В результате приходим к системе $n+1$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_n$

$$\left\{ \begin{array}{lllll} a_0 + a_1 j_1 & + a_2 j_2 + \cdots & + a_n j_n = z_{j_1, j_2, \dots, j_n} \\ a_0 + a_1(j_1+1) & + a_2 j_2 + \cdots & + a_n j_n = z_{j_1+1, j_2, \dots, j_n} \\ a_0 + a_1 j_1 & + a_2(j_2+1) + \cdots & + a_n j_n = z_{j_1, j_2+1, \dots, j_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 j_1 & + a_2 j_2 + \cdots & + a_n(j_n+1) = z_{j_1, j_2, \dots, j_n+1}\ . \end{array} \right.$$

Поочередно вычитая первое уравнение этой системы из всех последующих, получаем

$$a_1 = \Delta_1 z_j,\ a_2 = \Delta_2 z_j, \dots, a_n = \Delta_n z_j.$$

Таким образом,

$$\varphi_j(x) = a_0 + \sum_{s=1}^{n} (\Delta_s z_j) x_s.$$

Теперь выполняем те же построения для всех остальных узлов решетки. Пусть Q_j — симплекс в $\mathbb{R}^n$ с вершинами $(j_1, j_2, \dots, j_n), (j_1+1, j_2, \dots, j_n), \dots, (j_1, j_2, \dots, j_n+1)$ и χ_j — его характеристическая функция. Полагаем

$$\varphi(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \varphi_j(x) \chi_j(x).$$

Тогда на каждом таком Q_j имеем

$$\Big|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\Big| + \Big|\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\Big| + \ldots + \Big|\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\Big| = \Big|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\Big| + \Big|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2}\Big| + \ldots + \Big|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}\Big| = \sum_{s=1}^{n} |\Delta_s z_j| \le 1$$

и отсюда получаем

$$A_{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{s=1}^{n} \Big|\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\Big| \ \le 1. \tag{4.4}$$

Сопоставление (4.3) и (4.4) завершает доказательство. □

Заметим, что установленный результат для $n = 1$ совпадает с теоремой 1 при $m = 1$.

Теперь обратимся к аналогичной задаче для старших производных. Пусть $1 \le p \le \infty$, $\Delta^\nu = \Delta_1^{\nu_1} \Delta_2^{\nu_2} \cdots \Delta_n^{\nu_n}$ — конечно-разностный оператор на решетке $\mathbb{Z}^n$, где $\Delta_s^{\nu_s}$ — конечная разность порядка ν_s по s-й координате. При этом мы допускаем, что в Δ^ν могут быть задействованы не все n координат; в таком случае полагаем $\Delta_s^0 = I$, где I обозначает тождественный сеточный оператор. Определяем класс интерполируемых последовательностей следующим образом:

$$M_{m,p}^n = \Big\{ z \colon z = \{z_j\}_{j \in \mathbb{Z}^n}, \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \sum_{|\nu| = m} |\Delta^\nu z_j|^p \Big)^{1/p} \le 1 \Big\}.$$

Прежде чем определить класс интерполирующих функций, введем необходимые обозначения. Для любых мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ полагаем $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_n^{\beta_n}$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $0! = 1$. Пусть

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\colon \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha \varphi(x)| < +\infty \text{ для всех мультииндексов } \alpha, \beta\Big\}$$

— пространство основных функций, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — множество распределений медленного роста, т. е. совокупность всех линейных непрерывных функционалов, заданных на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Если распределение $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ представимо через непрерывную функцию f, а именно

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

то u идентифицируем с f и говорим, что u является непрерывной функцией. Полагаем

$$L_m^p(\mathbb{R}^n) = \big\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\colon D^\nu u \in L_p(\mathbb{R}^n) \text{ для всех мультииндексов } \nu \text{ таких, что } |\nu| = m\big\}.$$

Если $pm \geq n+1$, то согласно теореме вложения Соболева (см., например, [37, § 4.6]) элементы пространства $L_m^p(\mathbb{R}^n)$ отождествляются с непрерывными функциями.

Класс функций, интерполирующих последовательность $z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n}$ на решетке $\mathbb{Z}^n$, задаем следующим образом:

$$Y_p(z) = \{f \in L_m^p(\mathbb{R}^n)\colon f(j) = z_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Константа экстремальной интерполяции определяется как

$$A_{m,p}(\mathbb{R}^n) = \sup_{u\in M_{m,p}^n} \inf_{f\in Y_p(z)} \bigg\{\sum_{|\nu|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)|^p dx\bigg\}^{1/p}. \tag{4.5}$$

Задача (4.5) означает, что при интерполяционных условиях минимизируется соболевская полунорма интерполирующих функций на классе интерполируемых последовательностей $M_{m,p}^n$. Задача может быть также интерпретирована в рамках абстрактной схемы (1.5), где роль дифференциального оператора играет отображение, которое функции f ставит в соответствие набор ее частных производных порядка m.

При $p = \infty$, $m = 1$ мы приходим к ранее рассмотренной задаче (4.2). Кроме этого простейшего случая точное решение задачи (4.5) в настоящее время неизвестно ни при каких значениях n, m, p. Однако для $p = 2$ при дополнительном ограничении $2m \geq n+1$ двусторонние оценки величины $A_{m,2}(\mathbb{R}^n)$ (см. далее теорему 10) вытекают из результатов, полученных В. Р. Мадичем и С. А. Нелсоном [43; 44].

Для $\xi \in [-\pi, \pi]^n$ определяем функцию

$$G_m(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\xi - 2\pi j|^{2m}} \sum_{|\nu|=m} \Big(\sin^{2\nu_1}\frac{\xi_1}{2}\sin^{2\nu_2}\frac{\xi_2}{2}\dots\sin^{2\nu_n}\frac{\xi_n}{2}\Big).$$

Эта функция непрерывна всюду в $\mathbb{R}^n$, за исключением точки $\xi = 0$. Воспользовавшись хорошо известным неравенством $(2/\pi)t < \sin t < t$, $t \in (0, \pi/2)$, нетрудно убедиться в том, что

$$\inf_{\xi\in[-\pi,\pi]^n} G_m(\xi) > 0, \qquad \sup_{\xi\in[-\pi,\pi]^n} G_m(\xi) < +\infty.$$

Теорема 10 [43; 44]. *Если $2m \geq n+1$, то имеет место двусторонняя оценка*

$$2^{-m}\Big(\sup_{\xi\in[-\pi,\pi]^n} G_m(\xi)\Big)^{-1/2} \leq A_{m,2}(\mathbb{R}^n) \leq 2^{-m}\Big(\inf_{\xi\in[-\pi,\pi]^n} G_m(\xi)\Big)^{-1/2}.$$

Доказательство. В [44] доказано, что для любой последовательности $z \in M^n_{m,2}$ единственной экстремалью в задаче минимизации

$$\sum_{|\nu|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)|^2 dx \ \to \inf_{f \in Y_2(z)}$$

является функция, принадлежащая пространству m-гармонических сплайнов $SH_m(\mathbb{R}^n)$. Согласно определению (см. [43, p. 144]) m-гармонические сплайны — это функции $S_m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, которые определяются следующими условиями:

1) $S_m \in C^{2m-(n+1)}(\mathbb{R}^n)$,

2) $\mathbf{\Delta}^m S_m \equiv 0$ на $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{Z}^n$, где $\mathbf{\Delta}$ — оператор Лапласа.

Пространству $SH_m(\mathbb{R}^n)$ принадлежат, в частности, линейные комбинации целочисленных сдвигов фундаментального решения m-гармонического уравнения $\mathbf{\Delta}^m f = \delta$, где δ — функция (распределение) Дирака.

В работе [43] установлено, что при $2m \geq n+1$ на классе $L^2_m(\mathbb{R}^n) \cap SH_m(\mathbb{R}^n)$ интерполяционная задача $S_m(j) = z_j \ \forall j \in \mathbb{Z}^n$ однозначно разрешима, а в [44, следствие 1] доказано, что для m-гармонического сплайна S_m, интерполирующего на решетке $\mathbb{Z}^n$ заданную последовательность $z \in M^n_{m,2}$, справедливы оценки

$$C_1 \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \sum_{|\nu|=m} |\Delta^\nu z_j|^2 \leq \sum_{|\nu|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha S_m(x)|^2 dx \leq C_2 \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \sum_{|\nu|=m} |\Delta^\nu z_j|^2, \tag{4.6}$$

где положительные константы C_1 и C_2 не зависят от последовательности z и C_2 конечна. Проследив за тем, как возникают эти константы в процессе доказательств в [43; 44], заметим, что

$$C_1 = 4^{-m} \sup_{\xi \in [-\pi,\pi]^n} G_m(\xi), \quad C_2 = 4^{-m} \inf_{\xi \in [-\pi,\pi]^n} G_m(\xi).$$

Из неравенства (4.6) сразу же получается следующая оценка сверху величины (4.5):

$$A_{m,2}(\mathbb{R}^n) \leq 2^{-m} \Big(\inf_{\xi \in [-\pi,\pi]^n} G_m(\xi) \Big)^{-1/2}.$$

Выбираем последовательность $\widetilde{z} = \{\widetilde{z}_j\}_{j \in \mathbb{Z}^n} \in M^n_{m,2}$ так, чтобы $\sum\limits_{j \in \mathbb{Z}^n} \sum\limits_{|\nu|=m} |\Delta^\nu \widetilde{z}_j|^2 = 1$, и интерполируем ее сплайном $S_m \in L^2_m(\mathbb{R}^n) \cap SH_m(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$A_{m,2}(\mathbb{R}^n) \geq \inf_{f \in Y_2(\widetilde{z})} \Big\{ \sum_{|\nu|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)|^2 dx \Big\}^{1/2}$$

$$= \Big\{ \sum_{|\nu|=m} \frac{m!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha S_m(x)|^2 dx \Big\}^{1/2} \geq 2^{-m} \Big(\sup_{\xi \in [-\pi,\pi]^n} G_m(\xi) \Big)^{-1/2}.$$

Теорема 10 доказана. □

В рамках *второго направления* рассматривались задачи экстремальной интерполяции в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ для линейных дифференциальных операторов, которые нельзя представить в виде суперпозиции n дифференциальных операторов от одной переменной. Оператор Лапласа

$$\mathbf{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

является одним из таких операторов. К сожалению, и здесь мы не знаем, какая постановка задачи является наиболее естественной, поскольку в пространстве последовательностей нет соответствующего конечномерного аннулятора.

Сначала рассмотрим один из вариантов задачи на плоскости. Пусть $n = 2$, $M = \{M_k\}_{k=1}^{+\infty}$, $M_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ – последовательность различных точек из $\mathbb{R}^2$ с единственной предельной точкой на бесконечности. Рассматриваем интерполяционную задачу на классе гармонических в $\mathbb{R}^2$ функций: для произвольной заданной последовательности вещественных чисел $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ требуется найти гармоническую в $\mathbb{R}^2$ функцию $f(x_1, x_2)$ такую, что $f(M_k) = y_k \ \forall k \in \mathbb{Z}$. Нетрудно видеть, что эта интерполяционная задача всегда разрешима. Действительно, каждой точке $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ поставим во взаимно однозначное соответствие комплексное число $w = x_1 + ix_2$ и обратимся к интерполяционной задаче на классе $H(\mathbb{C})$ комплексно-значных целых функций: найти функцию $F \in H(\mathbb{C})$, для которой $F(w_k) = y_k \ \forall k \in \mathbb{Z}$, где $w_k = x_1^{(k)} + ix_2^{(k)}$. Известно (см., например, [1, с. 201–202]), что если $\lim\limits_{k\to\infty} |w_k| = +\infty$, то эта задача разрешима для любой интерполируемой последовательности. Тогда при всех целых k имеем

$$F(w_k) = \mathrm{Re}\ F(w_k) + i\ \mathrm{Im}\ F(w_k) = y_k$$

и, учитывая, что $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — вещественная последовательность, получаем $\mathrm{Re}\ F(w_k) = y_k \ \forall k \in \mathbb{Z}$. Теперь полагаем $f(x_1, x_2) = \mathrm{Re}\ F(w)$ и поскольку вещественная часть любой целой функции является гармонической функцией, то f – искомый гармонический интерполянт. Для полноты картины заметим, что найденный интерполянт не является единственным: это, в частности, следует из известной теоремы Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями (см., например, [3, с. 250–254]).

Отмеченная специфика класса гармонических в $\mathbb{R}^2$ функций приводит к тому, что константа экстремальной интерполяции, если ее определять по аналогии с тем, как это делалось во всех ранее исследованных случаях, равна нулю независимо от выбора разностного оператора, соответствующего оператору Лапласа, который обозначим как $l(y)$, т. е.

$$A_p(\mathbf{\Delta}, l) = \sup_{\|l(y)\|_{l_p(\mathbb{Z}^2)}\le 1} \ \inf_{f\in Y_p(y)} \|\mathbf{\Delta} f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

где $Y_p(y) = \{f \in C^1(\mathbb{R}^2)\colon \|\mathbf{\Delta} f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} < +\infty,\ F(M_k) = y_k \ \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$, $1 \le p \le \infty$.

Тот же результат имеет место, если оператор Лапласа заменить произвольным дифференциальным оператором второго порядка эллиптического типа в $\mathbb{R}^2$, поскольку такой оператор невырожденным линейным преобразованием координат приводится к оператору Лапласа.

Таким образом, для оператора Лапласа на плоскости задача экстремальной интерполяции должна формулироваться иначе. Одна из возможных постановок состоит в следующем.

Через $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций в $\mathbb{R}^n$. Пусть α — мультииндекс, D^α — производная порядка α, которую понимаем в обобщенном смысле Соболева (так называемая *слабая производная*), т. е. $v = D^\alpha u$, если для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx.$$

Как известно (см., например, [37]), функция f принадлежит пространству Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ при $|\alpha| = l$ производные $D^\alpha f$ существуют в обобщенном смысле Соболева, и норма

$$\|f\|_{p,l} = \|f\|_p + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_p$$

конечна.

Пусть $1 \le p \le \infty$, $\mathfrak{M}_p = \big\{z\colon z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n},\ \|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} \le 1\big\}$ — класс интерполируемых последовательностей, а $Y_p(z) = \big\{u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W_p^2(\mathbb{R}^n)\colon u(j) = z_j \ \ \forall j \in \mathbb{Z}^n\big\}$ — класс функций, интерполирующих фиксированный элемент $z \in \mathfrak{M}_p$ в точках сетки с целочисленными координатами. Константу экстремальной интерполяции определяем следующим образом:

$$A_p(\mathbb{R}^n) \;=\; \sup_{z\in\mathfrak{M}_p}\ \inf_{u\in Y_p(z)}\ \|\boldsymbol{\Delta} u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.7}$$

В рамках абстрактной схемы (1.5) задача (4.7) возникает, если положить $A = \boldsymbol{\Delta}$, $X = C^1(\mathbb{R}^n)\cap W_p^2(\mathbb{R}^n)$, $Y = L_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega \in \mathbb{Z}^n$, $\varphi_j(u) = u(j)$ $(j \in \mathbb{Z}^n)$, в качестве T выбрать тождественный оператор в пространстве последовательностей и $Q = \mathfrak{M}_p$.

С. И. Новиковым в статье "Интерполяция функциями пространства Соболева с минимальной L_p-нормой оператора Лапласа" (см. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2015, Т. 21, №4) было доказано, что если $1 \le p < n/2$, то $A_p(\mathbb{R}^n) = 0$. Этот результат тесно связан с теоремой вложения Соболева. Согласно этой теореме (см., например, [37, § 4.6]) если $n < lp$, то имеет место вложение класса $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ в пространство $C(\mathbb{R}^n)$, а при $n > lp$ этого вложения нет. Таким образом, величина (4.7) равна нулю в тех случаях, когда пространство Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ не вкладывается в пространство непрерывных функций. Заметим, что этот факт имеет место в том числе при $n = 1$, однако в этом случае "граница вырождения" находится среди значений $p \in (0,1)$, а в настоящей работе мы рассматриваем задачи в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ только при $1 \le p \le \infty$.

Таким образом, при $p = 2$ нетривиальные результаты могут быть получены только для трех размерностей: $n = 2, 3, 4$. В той же работе (см. статью Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2015, Т. 21, №4) для случая $n = 2,\ p = 2$ были найдены следующие двусторонние числовые оценки константы (4.7) экстремальной интерполяции:

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{2}-1}}{\sqrt[4]{2}} \le A_2(\mathbb{R}^2) \le 12\sqrt{2}, \tag{4.8}$$

причем приближенные вычисления границ в (4.8) приводят к следующему неравенству: $0.365 < A_2(\mathbb{R}^2) < 16.971$.

При $n = 2,\ p = \infty$ С. И. Новиков [7] доказал, что

$$\frac{2}{9} \le A_\infty(\mathbb{R}^2) \le 36. \tag{4.9}$$

Оценки сверху в (4.8) и (4.9) были получены с помощью построения интерполянтов специального вида, определяемых через ZP-элемент (Zwart-Powell element). Это одна из функций, принадлежащих обширному семейству box-сплайнов. Подробную информацию о таких функциях, в том числе явное выражение для ZP-элемента и ссылки на работы, где он впервые был определен, можно найти в [36;38] и приведенной там библиографии. Оценки снизу в (4.8) и (4.9) удалось получить благодаря применению sampling неравенств, а также при $p = \infty$ неравенств типа Колмогорова с оператором Лапласа, которые были доказаны В. М. Тимофеевым в [22]. □

К сожалению, верхние и нижние границы констант экстремальной интерполяции в (4.8) и (4.9) весьма далеки друг от друга, а более точные оценки неизвестны. Это обстоятельство означает, что в отличие от функций одной переменной оптимальные методы интерполяции здесь пока не найдены. ▼

Сравнивая задачу (4.7) со всеми предшествующими постановками задач экстремальной интерполяции, мы видим, что класс интерполируемых последовательностей задачи (4.7) задается посредством ограничений на сами интерполируемые значения, а не на результат применения конечно-разностных операторов, как это было сделано в задаче (4.5) и во всех задачах при $n = 1$. Это различие объясняется следующими соображениями. При $n = 1$ разностный аналог дифференциального оператора выбирался так, чтобы он занулял на равномерной сетке все функции из ядра дифференциального оператора, в частности для оператора m-кратного дифференцирования таким свойством обладают обычные конечные разности m-го порядка. В задаче (4.5) нуль-пространство соболевской полунормы есть множество алгебраических многочленов n переменных суммарной степени m, и на целочисленной решетке оно аннулируется разностными операторами, определяющими множество $M^n_{m,p}$. Однако в задаче (4.7) ситуация существенно иная: множество гармонических функций бесконечномерно и не существует конечно-разностных операторов, которые зануляют на целочисленной решетке *все* гармонические функции. По этой причине в определении класса $\mathfrak{M}_p$ фигурирует ограничение на сами интерполируемые значения. Если же при $n = 1$ отказаться от разностных операторов и в определениях классов интерполируемых данных ограничивать дискретные нормы интерполируемых последовательностей, то нетрудно видеть, что такие задачи фактически сводятся к рассмотренным выше задачам (1.1) и (1.2) (см. также [5], где исследован периодический случай).

В заключение отметим, что задачи экстремальной интерполяции в принципе можно рассматривать не на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, а на ограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с "хорошими" границами. В таких задачах естественно интерполировать функциями с заданным (например, нулевым) значением на границе области Ω и конечным числом N точек интерполяции внутри области. Из [41, p.74] следует, что экстремальный набор интерполируемых данных в этом случае лежит во множестве крайних точек единичного шара конечномерного пространства l^N_p, $1 \le p \le \infty$. Для фиксированного набора интерполируемых значений (задача (1.4) при $A = \boldsymbol{\Delta}$) интерполяция с минимальным значением равномерной нормы оператора Лапласа была изучена в работе С. Фишера и Дж. Джерома [40], где было установлено, что экстремаль $\xi(x)$ этой задачи обладает свойствами, напоминающими свойства совершенных сплайнов одной переменной: множество Ω можно разбить на два непустых подмножества, на одном из которых $\boldsymbol{\Delta}\xi(x) = c$ почти всюду, а на другом правая часть отличается знаком: $\boldsymbol{\Delta}\xi(x) = -c$, где c — некоторая положительная константа. В случае, когда в качестве множества Ω выбран шар с центром в начале координат, аналог константы экстремальной интерполяции был определен в работе [6] и там же был найден его порядок относительно радиуса шара. Другие результаты в этом направлении авторам не известны.

Настоящий обзор, возможно, не является полным, однако, на наш взгляд, он позволяет увидеть, насколько широкое и глубокое развитие за 50 лет получила задача Яненко — Стечкина — Субботина экстремальной функциональной интерполяции о нахождении наименьшего значения нормы m-й производной интерполируемой функции, у которой все конечные разности порядка m ограничены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 376 с.
2. **Крейн М.Г.** Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 5. С. 3–120.
3. **Маркушевич А.И.** Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1966. 388 с.
4. **Новиков С.И., Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции для функций многих переменных. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 144–159.
5. **Новиков С.И.** Периодическая интерполяция с минимальным значением нормы m-й производной // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 2. С. 165–172.
6. **Новиков С.И.** Интерполяция с минимальным значением нормы оператора Лапласа в шаре // Збірник праць Інституту математики НАН України. 2008. Т. 5, № 1. С. 248–262.
7. **Новиков С.И.** Задачи интерполяции с минимальным значением нормы оператора Лапласа на классе интерполируемых данных // Тр. Междунар. летней мат. шк.-конф. С. Б. Стечкина по теории функций (Таджикистан). Душанбе: Изд.-во ООО "Офсет", 2016. С. 182-185.
8. **Пацко Н.Л.** Приближение сплайнами на отрезке // Мат. заметки. 1974. Т.16, № 3. С. 491–500.
9. **Пацко Н.Л.** Приближение сплайнами на отрезке в пространстве L_p // Мат. заметки. 1995. Т.58, № 2. С. 281–294.
10. **Рябенький В.С., Филиппов А.Ф.** Об устойчивости разностных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956. 171 с.

11. **Соболев С.Л.** Лекции по теории кубатурных формул. Ч. 2. Новосибирск: Изд-во Новосибир. гос. ун-та, 1965. 263 с.
12. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
13. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
14. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.
15. **Субботин Ю.Н.** Приближение сплайн-функциями и оценки поперечников // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 109. С. 35–60.
16. **Субботин Ю.Н.** Приближение сплайнами и гладкие базисы в $C(0, 2\pi)$ // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 1. С. 43–51.
17. **Субботин Ю.Н.** Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214, №1. С. 56–58.
18. **Субботин Ю.Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.
19. **Субботин Ю.Н.** Экстремальные и аппроксимативные свойства сплайнов // Теория приближения функций: Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций (Калуга, 24–28 июля 1975 г.). М.: Наука, 1977. С. 341–345.
20. **Субботин Ю.Н.** Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением n-й производной при больших интервалах усреднения // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 1. С. 114–132.
21. **Субботин Ю.Н.** Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1997. Т. 61, № 1. С. 177–198.
22. **Тимофеев В.Г.** Неравенства типа Колмогорова с оператором Лапласа // Теория функций и аппроксимаций: сб. ст. Саратов: Изд-во СГУ, 1983. С. 84–92.
23. **Тихомиров В.М., Боянов Б.Д.** О некоторых выпуклых задачах теории приближений // Serdica. 1979. Vol. 5, no 1. P. 83–96.
24. **Чуи Ч.** Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.
25. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
26. **Шевалдин В.Т.** Экстремальная интерполяция с наименьшим значением нормы линейного дифференциального оператора // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 5. С. 721–740.
27. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
28. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 803–805.
29. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
30. **Шевалдин В.Т.** $\mathcal{L}$-сплайны и поперечники // Мат. заметки. 1983. Т.33, № 5. С. 735–744.
31. **Шевалдин В.Т.** Оценки снизу поперечников некоторых классов периодических функций // Тр. МИАН СССР. 1992. Т. 198. С. 242–267.
32. **Шевалдин В.Т.** Экстремальная интерполяция в среднем при перекрывающихся интервалах усреднения и L-сплайны // Изв. РАН. Сер. математическая. 1998. Т. 62, № 4. С. 201–224.
33. **Atteia M.** Functions “spline”, definies sur un ensemble convexe // Numer. Math. 1968. Vol.12. P. 192–210.
34. **Behforooz H.** Approximation by integro cubic splines // Appl. Math. Comput. 2006. Vol.175. P. 8–15. doi:10.1016/j.amc.2005.07.066 .
35. **de Boor C.** How small can one make the derivatives of an interpolating function? // J. Approx. Theory. 1990. Vol.13, no. 2. P. 105–116. doi:10.1016/0021-9045(75)90043-X .
36. **de Boor C., Höllig K., Riemenschneider S.** Box splines. New York etc.: Springer, 1993. 200 p.
37. **Burenkov V.I.** Sobolev spaces on domains. Stuttgart: B. G. Teubner Verlag GmbH, 1998. 312 p. (Teubner Texts in Math. Vol. 137.)
38. **de Concini C., Procesi C.** Topics in hyperplane arrangements, polytopes and box-splines. N Y etc.: Springer, 2010. 384 p.
39. **Favard J.** Sur l’interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no 9. P. 281–306.

40. **Fisher S., Jerome J.** Minimum norm extremals in function spaces // Lecture Notes in Math. 1975. Vol. 479. P. 1–209.
41. **Holmes R.** Geometric functional analysis and its applications. N.Y. ect.: Springer Verlag, 1975. 246 p.
42. **Kunkle T.** Favard's interpolation problem in one or more variables // Constr. Approx. 2002. Vol. 18, no. 4. P. 467–478. doi: 10.1007/s00365-001-0015-7 .
43. **Madych W.R., Nelson S.A.** Polyharmonic cardinal splines // J. Approx. Theory. 1990. Vol. 60, no. 2. P. 141–156. doi: 10.1016/0021-9045(90)90079-6 .
44. **Madych W.R., Nelson S.A.** Polyharmonic cardinal splines: a minimization property // J. Approx. Theory. 1990. Vol. 63, no. 3. P. 303–320. doi:10.1016/0021-9045(90)90123-8 .
45. **Micchelli C.A.** Cardinal $\mathcal{L}$-splines // Studies in spline functions and approximation theory. N Y: Acad. Press, 1976. P. 203–250.
46. **Novikov S.I.** Generalization of the Rolle theorem // East J. Approx. 1995. Vol. 1, no. 4. P. 571–575.
47. **Schoenberg I.J.** Cardinal interpolation and spline functions // J. Approx. Theory. 1969. Vol. 2, no. 2. P. 167–206. doi: 10.1016/0021-9045(69)900040-9 .
48. **Schoenberg I.J.** On Micchelli's theory of cardinal L-splines // Studies in spline functions and approximation theory. N Y: Acad. Press, 1976. P. 251–276.
49. **Sharma A., Tzimbalario J.** A generalization of a result of Subbotin // Approximation theory - ll (Proc. Internat. Sympos., Univ. Texas, 1976). N Y: Acad. Press, 1976. P. 557–562.
50. **Subbotin Yu.N.** Some extremal problems of interpolation and interpolation in the mean // East J. Approx. 1996. Vol. 2, no. 2. P. 155–167.
51. **Zhanlav T., Mijiddorj R.** Integro quintic splines and their approximation properties // Appl. Math. Comput. 2014. Vol. 231. P. 536–543. doi:10.1016/j.amc.2014.01.043 .
52. **Zhanlav T., Mijiddorj R., Behforooz H.**. Construction of local integro quintic splines // Commun. Numer. Anal. 2016. No. 2. P. 167–179. doi: 10.5899/2016/cna-00267 .
53. **Zhanlav T., Mijiddorj R.** Convexity and monotonicity properties of the local integro cubic spline // Appl. Math. Comput. 2017. Vol. 293. P. 131–137. doi:10.1016/j.amc.2016.08.017 .

Субботин Юрий Николаевич
чл.-корр. РАН, главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Поступила 20.05.2018

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Gel'fond M.G. *Calculus of finite differences.* Delhi, Hindustan Publishing Corp., 1971, Ser. International Monographs on Advanced Mathematics and Physics, 451 p. Original Russian text published in *Ischislenie konechnykh raznostei*, Moscow: Nauka, 1967.
2. Krein M.G. Integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments. *Uspehi Mat. Nauk*, 1958, vol. 13, no. 5(83), pp. 3–120 (in Russian).
3. Markushevich A.I. *The theory of analytic functions: a brief course.* Moscow: Mir, 1983, 423 p. Original Russian text published in *Kratkii kurs teorii analiticheskikh funktsii*, Moscow, Nauka, 1966.

4. Novikov S.I., Shevaldin V.T. A problem of extremal interpolation for multivariate functions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2001, Suppl. 1, S150–S166.
5. Novikov S.I. Periodic interpolation with minimal norm of mth derivative. *Sib. Zh. Vychisl. Math.*, 2006, vol. 9, no. 2, pp. 165–172 (in Russian).
6. Novikov S.I. Interpolation with minimal norm of the Laplace operator in a ball. *Zbirnik prats Inst. Math. NAN Ukraine*, 2008, vol. 5, no. 1. pp. 248–262 (in Russian).
7. Novikov S.I. Interpolation problems with minimal norm of the Laplace operator on a class of interpolated data. *Proc. Intern. Summer Math. S. B. Stechkin Workshop-Conf. on Function Theory.* Dushanbe: Ofset Publ., 2016, pp. 182–185 (in Russian).
8. Patsko N.L. Approximation on an interval by splines. *Math. Notes*, 1974, vol. 16, no. 3, pp. 881–887.
9. Patsko N.L. Approximation by splines on an interval in the space L_p. *Math. Notes*, 1995, vol. 58, no. 1-2, pp. 867–876.
10. Rjabenki V.S., Filippov F.F. *Über die Stabilität von Differenzengleichungen. Mathematik für Naturwissenschaft und Technik.* Bd. 3. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1960, 136 p. (in German).
11. Sobolev S.L. *Lektsii po teorii kubaturnykh formul.* [Lectures on the theory of cubature formulas]. Part 2. Novosibirsk: Novosibirsk Gos. Univ., 1965, 192 p. (in Russian).
12. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splainy v vychislitel'noi matematike.* [Splines in numerical mathematics]. Moscow, Nauka, 1976, 248 p. (in Russian).
13. Subbotin Yu.N. On the connection between finite differences and corresponding derivatives. *Tr. Math. Inst. Steklov*, 1965, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).
14. Subbotin Yu.N. Functional interpolation in the mean with smallest nth derivative. *Tr. Math. Inst. Steklov*, 1967, vol. 88, pp. 30–60 (in Russian).
15. Subbotin Yu.N. Approximation by spline functions, and estimates of widths. *Tr. Math. Inst. Steklov*, 1971, vol. 109, pp. 35–60 (in Russian).
16. Subbotin Yu.N. Spline approximation and smooth bases in $C(0, 2\pi)$. *Math. Notes*, 1972, vol. 12, no. 1, pp. 459–463.
17. Subbotin Yu.N. Extremal functional interpolation and splines. *Soviet Math. Dokl.*, 1974, vol. 15, pp. 57–60.
18. Subbotin Yu.N. Extremal problems of functional interpolation, and mean interpolation splines. *Tr. Math. Inst. Steklov*, 1975, vol. 138, pp. 118–173 (in Russian).
19. Subbotin Yu.N. Extremal and approximate properties of splines. *The theory of approximation of functions* (*Proc. Internat. Conf., Kaluga, 1975*), Moscow, Nauka, 1977, pp. 341–345 (in Russian).
20. Subbotin Yu.N. Extremal functional interpolation in the mean with the smallest value of the nth derivative for large averaging intervals. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 1-2, pp. 83–96.
21. Subbotin Yu.N. Extremal L_p-interpolation in the mean for intersecting intervals of averaging. *Izv. Math.*, 1997, vol. 61, no. 1, pp. 183–205.
22. Timofeev V.G. Inequalities of Kolmogorov type with the Laplace operator. Theory of functions and approximations, Saratov, Saratov. Gos. Univ., 1983, vol. 106, pp. 84–92 (in Russian).
23. Tihomirov V.M., Bojanov B.D. Some convex problems of approximation theory. *Serdica*, 1979, vol. 5, no. 1, pp. 83–96 (in Russian).
24. Chui C.K. An introduction to wavelets. Boston: Acad. Press, 1992, Ser. Wavelet Analysis and its Applications, 264 p.
25. Sharma A., Tzimbalario J. Certain linear differential operators and generalized differences. *Math. Notes*, 1977, vol. 21, no. 2, pp. 91–97. doi:10.1007/BF02320546 .
26. Shevaldin V.T. Extremal interpolation with least norm of linear differential operator. *Math. Notes*, 1980, vol. 27, no. 5, pp. 344–354.
27. Shevaldin V.T. A problem of extremal interpolation. *Math. Notes*, 1981, vol. 29, no. 4, pp. 310–320.
28. Shevaldin V.T. Some problems of extremal interpolation in the mean. *Soviet Math. Dokl.*, 1982, vol. 26, no. 3, pp. 710–712.
29. Shevaldin V.T. Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators. *Tr. Math. Inst. Steklov*, 1983, vol. 164, pp. 203–240 (in Russian).
30. Shevaldin V.T. $\mathcal{L}$-splines and widths. *Math. Notes*, 1983, vol. 33, no. 5, pp. 735–744.
31. Shevaldin V.T. Lower bounds for the widths of some classes of periodic functions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1994, no. 1 (198), pp. 233–255.

32. Shevaldin V.T. Extremal interpolation in the mean with overlapping intervals of averaging, and L-splines. *Izv. Math.*, 1998, vol. 62, no. 4, pp. 833–856.
33. Atteia M. Functions «spline», definies sur un ensemble convexe. *Numer. Math.*, 1968, vol. 12, pp. 192–210.
34. Behforooz H. Approximation by integro cubic splines. *Appl. Math. Comput.*, 2006, vol. 175, pp. 8–15. doi:10.1016/j.amc.2005.07.066 .
35. de Boor C. How small can one make the derivatives of an interpolating function? *J. Approx. Theory.*, 1990, vol. 13, no. 2, pp. 105–116. doi: 10.1016/0021-9045(75)90043-X .
36. de Boor C., Höllig K., Riemenschneider S. Box splines. N Y etc.: Springer, 1993. 200 p.
37. Burenkov V.I. Sobolev spaces on domains. Stuttgart: B. G. Teubner Verlag GmbH, 1998, Ser. Teubner Texts in Math., vol. 137, 312 p.
38. de Concini C., Procesi C. Topics in hyperplane arrangements, polytopes and box-splines. N Y etc.: Springer, 2010. 384 p.
39. Favard J. Sur l'interpolation. *J. Math. Pures Appl.*, 1940, vol. 19, no 9, p. 281–306.
40. Fisher S., Jerome J. Minimum norm extremals in function spaces. *Lecture Notes in Math.*, 1975, vol. 479, pp. 1–209.
41. Holmes R. Geometric functional analysis and its applications. N.Y. ect.: Springer Verlag, 1975, 246 p.
42. Kunkle T. Favard's interpolation problem in one or more variables. *Constr. Approx.*, 2002, vol. 18, no. 4, pp. 467–478. doi:10.1007/s00365-001-0015-7 .
43. Madych W.R., Nelson S.A. Polyharmonic cardinal splines. *J. Approx. Theory*, 1990, vol. 60, no. 2, pp. 141–156. doi:10.1016/0021-9045(90)90079-6 .
44. Madych W.R., Nelson S.A. Polyharmonic cardinal splines: a minimization property. *J. Approx. Theory*, 1990, vol. 63, no. 3, pp. 303–320. doi:10.1016/0021-9045(90)90123-8 .
45. Micchelli C.A. Cardinal $\mathcal{L}$-splines. Studies in spline functions and approximation theory. N Y: Acad. Press, 1976, pp. 203–250.
46. Novikov S.I. Generalization of the Rolle theorem. *East J. Approx.*, 1995, vol. 1, no. 4, pp. 571–575.
47. Schoenberg I.J. Cardinal interpolation and spline functions. *J. Approx. Theory*, 1969, vol. 2, no. 2, pp. 167–206. doi:10.1016/0021-9045(69)900040-9 .
48. Schoenberg I.J. On Micchelli's theory of cardinal L-splines. *Studies in spline functions and approximation theory.* N Y: Acad. Press, 1976, pp. 251–276.
49. Sharma A., Tzimbalario J. A generalization of a result of Subbotin. *Approximation theory - ll* (*Proc. Internat. Sympos., Univ. Texas, 1976*), N Y: Acad. Press, 1976, pp. 557–562.
50. Subbotin Yu.N. Some extremal problems of interpolation and interpolation in the mean. *East J. Approx.*, 1996, vol. 2, no. 2, pp. 155–167.
51. Zhanlav T., Mijiddorj R. Integro quintic splines and their approximation properties. *Appl. Math. Comput.*, 2014, vol.231, pp. 536–543. doi: 10.1016/j.amc.2014.01.043 .
52. Zhanlav T., Mijiddorj R., Behforooz H.. Construction of local integro quintic splines. *Commun. Numer. Anal.*, 2016, no. 2, pp. 167–179. doi:10.5899/2016/cna-00267 .
53. Zhanlav T., Mijiddorj R. Convexity and monotonicity properties of the local integro cubic spline. *Appl. Math. Comput.*, 2017, vol. 293, pp. 131–137. doi:10.1016/j.amc.2016.08.017 .

The paper was received by the Editorial Office on May 20, 2018.

Yurii Nikolaevich Subbotin, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990, Russia, e-mail: yunsub@imm.uran.ru .

Sergey Igorevich Novikov, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990, Russia,
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru .

Valerii Trifonovich Shevaldin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990, Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .