ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 519.853

МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В АНАЛИЗЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Д. Скарин

В статье рассматриваются вопросы коррекции несобственных задач выпуклого программирования, прежде всего задач с противоречивой системой ограничений. Такие задачи часто возникают в практике математического моделирования конкретных прикладных постановок из области исследования операций. Вследствие частоты появления несобственных задач актуальной является разработка методов коррекции таких задач, т. е. построения близких в определенном смысле разрешимых моделей, решение которых принимается за обобщенное (аппроксимационное) решение исходной постановки. В работе корректирующие задачи строятся путем вариации правых частей ограничений относительно минимума некоторой функции штрафа, частным случаем которой могут служить различные нормы векторов ограничений. В результате возникают методы оптимальной коррекции несобственной задачи, представляющие собой модификации регуляризированного (по Тихонову) метода штрафных функций. Особое внимание при этом уделяется применению метода точного штрафа. Формулируются условия и устанавливаются оценки сходимости предлагаемых методов.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, методы штрафных функций, метод регуляризации Тихонова.

V. D. Skarin. The method of penalty functions and regularization in the analysis of improper convex programming problems.

We consider the questions of correction of improper convex programming problems, first of all, problems with inconsistent systems of constraints. Such problems often arise in the practice of mathematical simulation of specific applied settings in operations research. Since improper problems are rather frequent, it is important to develop methods of their correction, i.e., methods of construction of solvable models that are close to the original problems in a certain sense. Solutions of these models are taken as generalized (approximation) solutions of the original problems. We construct the correcting problems using a variation of the right-hand sides of the constraints with respect to the minimum of a certain penalty function, which, in particular, can be taken as some norm of the vector of constraints. As a result, we obtain optimal correction methods that are modifications of the (Tikhonov) regularized method of penalty functions. Special attention is paid to the application of the exact penalty method. Convergence conditions are formulated for the proposed methods and convergence rates are established.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, penalty function methods, Tikhonov regularization method.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-187-199

Введение

Несобственные задачи (НЗ) линейного и выпуклого программирования часто возникают при математическом моделировании конкретных сложных проблем из области исследования операций. Наиболее важным проявлением несобственности является противоречивость системы ограничений таких задач. Причинами несовместности ограничений могут быть неточности в задании исходных данных, завышенные требования к качеству решения, дефицит необходимых ресурсов, учет противоречивых директив и т. п. Поскольку наличие НЗ — обычное явление при численном анализе задач экономики и управления, то важное значение приобретает развитие теории и методов аппроксимации (коррекции) несобственных моделей. Под

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

коррекцией здесь понимается отображение несобственной модели во множество разрешимых задач, причем выбранная из этого множества задача должна быть оптимальной относительно некоторого критерия (оптимальная коррекция).

Исследования по несобственным задачам математического программирования были инициированы академиком И. И. Ереминым [1]; они актуальны и для современной математической оптимизации [2–6]. В зарубежной литературе широкое распространение получил обобщенный метод наименьших квадратов, который можно рассматривать как способ матричной коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств по минимуму евклидовой нормы [7; 8].

Источником возникновения НЗ часто являются модели с приближенным заданием исходных данных, что обусловливает необходимость исследования устойчивости решений таких задач. Последнее же является объектом внимания теории и методов некорректных оптимизационных задач [9–11]. Поэтому естественными выглядят попытки использовать при анализе НЗ стандартные методы регуляризации некорректных моделей, такие как метод Тихонова [12–14], метод невязки [6].

В данной работе для НЗ выпуклого программирования (ВП) строятся корректирующие задачи путем вариации правых частей ограничений относительно минимума некоторой функции штрафа. В частности, в качестве такой функции могут быть выбраны различные нормы векторов функций-ограничений. В результате возникает метод аппроксимации НЗ ВП, основанный на применении регуляризованной штрафной функции (аналог метода Тихонова). Особое внимание при этом уделяется методу точного штрафа.

1. Коррекция НЗ ВП относительно правых частей ограничений

Рассмотрим задачу ВП

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x \mid f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Важнейшее проявление несобственности задачи (1) заключается в противоречивости системы ее ограничений: $X = \varnothing$. Обозначим через $L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ функцию Лагранжа для задачи (1), $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. Пусть $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \colon \inf\limits_x L(x, \lambda) > -\infty\}$. Если $X = \varnothing$, $\Lambda \ne \varnothing$, то согласно классификации из [1] задача (1) называется НЗ ВП 1-го рода. Это наиболее часто встречающийся на практике случай НЗ, и далее будут рассматриваться именно такие задачи. Для НЗ ВП 1-го рода характерно следующее свойство: если вместо X в (1) положить $X_\xi = \{x \mid f(x) \le \xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, так чтобы стало $X_\xi \ne \varnothing$, то $\inf\{f_0(x) \mid x \in X_\xi\} > -\infty$.

Естественный способ оптимальной коррекции НЗ ВП заключается в замене (1) задачей

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar{\xi}_p}\}, \tag{2}$$

где $\bar{\xi}_p = \arg\min\{\|\xi\|_p \mid \xi \in E\}$, $E = \{\xi \mid X_\xi \ne \varnothing\}$, $\|\cdot\|_p$ — символ некоторой векторной нормы в пространстве $\mathbb{R}^m$. Наиболее употребимыми являются нормы при $p = 1, 2, \infty$. Это октаэдрическая норма $\|z = [z_1, \dots, z_m]\|_1 = \sum\limits_{i=1}^m |z_i|$, евклидова — $\|z\| = \|z\|_2 = (\sum z_i^2)^{1/2}$, чебышевская норма $\|z\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le m} |z_i|$.

Если в задаче (1) $X \ne \varnothing$, то $\bar{\xi}_p = 0$ и задачи (1) и (2) совпадают. В противном случае оптимальный вектор задачи (2) принимается за обобщенное (аппроксимационное) решение НЗ (1).

Вектор $\bar{\xi}_p$ существует в следующих случаях:

1) Функции $f_i(x)$ являются линейными (аффинными) на $\mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$.

2) Множество X_ξ непусто и ограничено для некоторого $\xi = \xi_0$.

При выполнении условия 2) множество E становится выпуклым и замкнутым, что и обеспечивает существование вектора $\bar{\xi}_p$.

Рассмотрим еще один способ построения оптимальной коррекции для НЗ ВП (1). Введем меру несовместности системы ограничений (1) как

$$\bar{\varphi} = \inf_x \varphi(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x) = \omega(f^+(x))$, $\omega(z)$ — выпуклая неубывающая функция, определенная на $\mathbb{R}^m_+$, такая что

$$\omega(0) = 0, \qquad \omega(z) > 0 \qquad (\forall z \in \mathbb{R}^m_+,\ z \neq 0). \tag{4}$$

Пусть точка $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ такова, что $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{x})$. Тогда $X \neq \varnothing$ в том и только в том случае, когда $\bar{\varphi} = 0$. Если $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{x}) = \omega(f^+(\bar{x}))$, то можно определить коррекцию НЗ ВП (1) в виде

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\tilde{\xi}}\}, \tag{5}$$

где $\tilde{\xi} = f^+(\bar{x})$. Такой способ коррекции можно назвать $\bar{\varphi}$-аппроксимацией (см. метод d-аппроксимации [1]). В качестве функции $\omega(z)$ в задаче (3) могут выступать нормы вектора $z = z(x) = f^+(x)$. Поэтому сразу возникает вопрос о связи аппроксимаций (2) и (5) при $\varphi(x) = \|f^+(x)\|_p$.

Пусть в задаче (2) $p = 2$ и вектор $\bar{\xi} = \bar{\xi}_2$ существует. Если в задаче (5) $\tilde{\xi} = f^+(\bar{x})$, $\bar{x} \in \bar{X}$, где $\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \bar{\varphi} = \varphi(x) = \|f^+(x)\|_2\}$, то задачи (2) и (5) совпадают.

В самом деле, возьмем $x^* \in X_{\bar{\xi}}$. Тогда $f^+(x^*) \le \bar{\xi}$, $\|f^+(x^*)\|_2 \le \|\bar{\xi}\|_2$, т. е. по определению $\bar{\xi}$ $\|f^+(x^*)\|_2 = \|\bar{\xi}\|_2$. В силу единственности евклидовой проекции $0 \in \mathbb{R}^n$ на выпуклое замкнутое множество E имеем $\bar{\xi} = f^+(x^*)$. С другой стороны, так как $\|f^+(\bar{x})\|_2 \le \|f^+(x)\|_2$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$, то $\|\tilde{\xi}\|_2 = \|f^+(\bar{x})\|_2 \le \|f^+(x^*)\|_2 = \|\bar{\xi}\|_2$. Поэтому $\tilde{\xi} = \bar{\xi}$, $\bar{x} \in X_{\bar{\xi}}$ и $X_{\bar{\xi}} = \bar{X}$.

Если в задаче (2) $p = 1$ или $p = \infty$, а в (3) функция $\varphi(x)$ определяется с помощью кусочно-линейных норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$, то однозначность в определении $\bar{\xi}$ и $\tilde{\xi}$ не имеет места.

П р и м е р. Рассмотрим задачу линейного программирования в пространстве $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$:

$$\max\{x_1 + x_2 \mid x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_1 \ge 1,\ x_1 + x_2 \ge 2\}.$$

Здесь $X = \varnothing$. Минимизируем функцию $\varphi(x) = \varphi_1(x) = \|f^+(x)\|_1 = \sum_{i=1}^m f_i^+(x) = x_1^+ + x_2^+ + (-x_1 + 1)^+ + (-x_1 - x_2 + 2)^+$. Получим $\bar{\varphi}_1 = \min \varphi_1(x) = 2$, $\bar{X}_1 = \operatorname{Arg\,min} \varphi_1(x) = \{x = [x_1, x_2] \mid x_1 = 1,\ 0 \le x_2 \le 1\}$. В качестве $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_1$ в задаче (5) можно взять любой вектор $f^+(\bar{x})$, $\bar{x} \in \bar{X}_1$. Например, при $\bar{x}_1 = [1, 0]$ имеем $\tilde{\xi}_1^1 = [1, 0, 0, 1]$; при $\bar{x}_2 = [1, 0.5]$ имеем $\tilde{\xi}_1^2 = [1, 0.5, 0, 0.5]$; при $\bar{x}_3 = [1, 1]$ имеем $\tilde{\xi}_1^3 = [1, 1, 0, 0]$. Очевидно, $X_{\tilde{\xi}_1^1} = \{\bar{x}_1\}$, $X_{\tilde{\xi}_1^2} = \{\bar{x}_2\}$, $X_{\tilde{\xi}_1^3} = \{\bar{x}_3\}$. Таким образом, вектор $\tilde{\xi}_1$ в задаче (5) определяется неоднозначно, но для каждого $\tilde{\xi}_1$ будет $\|\tilde{\xi}_1\|_1 = 2 = \bar{\varphi}_1$, $X_{\tilde{\xi}_1} \subset \bar{X}_1$.

2. Метод штрафных функций и коррекция НЗ ВП

Возможная неоднозначность вектора $\bar{\xi}$ в задаче (2) при использовании кусочно-линейных норм свидетельствует о целесообразности рассмотрения оптимальной коррекции НЗ ВП в виде задачи

$$\min\{f_0(x) \mid x \in \bar{X}\}, \tag{6}$$

где $\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varphi(x) \le \bar{\varphi}\}$.

Задача (6) — более общая постановка по сравнению с (5). Если $\bar{X} \neq \varnothing$, $\bar{x} \in \bar{X}$, $\tilde{\xi} = f^+(\bar{x})$, то всегда $X_{\tilde{\xi}} \subset \bar{X}$. В самом деле, пусть $x' \in X_{\tilde{\xi}}$, т. е. $f(x') \le f^+(\bar{x})$. Тогда $\varphi(x') = \omega(f^+(x')) \le \omega(f^+(\bar{x})) = \bar{\varphi}$.

Условия (4), налагаемые на функцию $\varphi(x)$ в (6), аналогичны тем, которым удовлетворяет функция внешнего штрафа в методах штрафных функций [11; 15] для решения задачи ВП. Применим идею этих методов для построения возможной коррекции НЗ ВП (1). Образуем функцию $F(x, r) = f_0(x) + r\varphi(x)$, $r > 0$, $\varphi(x)$ — из (6) и рассмотрим задачу

$$\inf_x F(x, r). \tag{7}$$

Покажем, что при определенных условиях задача (7) аппроксимирует задачу (6) и, следовательно, решение (7) также можно считать обобщенным решением НЗ ВП (1).

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1) *выполнено условие* 2) *разд.* 1, $f_0(x) \geq \tilde{f} > -\infty$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) = \omega(z(x))$, $\omega(z)$ *— выпуклая функция,* $\omega(0) = 0$, $\omega(z) \geq \beta \sum\limits_{i=1}^{m} z_i^p$, $\beta > 0$, $\forall\, z \in \mathbb{R}^m_+$, $p \geq 1$. *Тогда задачи* (6) *и* (7) *разрешимы, при этом справедливо*

$$\varphi(x(r)) \searrow \bar{\varphi}, \qquad f_0(x(r)) \nearrow \bar{f} \qquad (r \to \infty),$$

где $x(r) = \arg\min\limits_x F(x,r)$, $\bar{f}$ *— оптимальное значение задачи* (6).

Доказательство. Согласно условиям теоремы множество X_{ξ_0} непусто и ограничено. Покажем, что в этом случае непустым и ограниченным будет и множество $\bar{X}$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $X_0 = \{x \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$, $x' \in X_0$. Тогда в силу свойств функции $\varphi(x)$ следует

$$\varphi(x_0) \geq \varphi(x') \geq \beta \sum_{i=1}^{m} f_i^{+^p}(x') \geq \beta f_i^{+^p}(x'), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Отсюда $f_i(x') \leq f_i^+(x') \leq \sqrt[p]{\varphi(x_0)/\beta}$, т. е. $x' \in X_{\tilde{\xi}}$, где $\tilde{\xi} = [\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_m] \in \mathbb{R}^m_+$, $\tilde{\xi}_i = \sqrt[p]{\varphi(x_0)/\beta}$, $i = 1, \ldots, m$. Так как множество $X_{\tilde{\xi}}$ непустое и выпуклое, то оно ограничено в силу ограниченности X_{ξ_0}. Поскольку $X_0 \subset X_{\tilde{\xi}}$, то ограниченным будет и множество X_0. Поэтому найдется точка x^* такая, что $\bar{\varphi} = \inf \varphi(x) = \varphi(x^*)$. Полагая в рассуждениях выше $x_0 = x^*$, заключаем, что $\bar{X}$ — непустое ограниченное множество и задача (6) разрешима.

Далее определим $M_r = \{x \mid F(x,r) \leq F(\bar{x},r)\}$, где $\bar{x}$ — решение задачи (6). Если $x' \in M_r$, то $\tilde{f} + r\varphi(x') \leq f_0(x') + r\varphi(x') \leq f_0(\bar{x}) + r\bar{\varphi}$. Отсюда $\varphi(x') \leq \bar{\varphi} + (f_0(\bar{x}) - \tilde{f})/r$, т. е.

$$M_r \subset X_r = \{x \mid \varphi(x) \leq \bar{\varphi} + (f_0(\bar{x}) - \tilde{f})/r\} \qquad (\forall\, r > 0).$$

Ограниченность множества $\bar{X}$ влечет ограниченность X_r и M_r $(\forall\, r > 0)$. Но $\min\limits_x F(x,r) = \min\limits_{x \in M_r} F(x,r)$, поэтому для любого $r > 0$ существует точка $x(r) = \arg\min\limits_x F(x,r)$.

Пусть $\{r_k\}$ — числовая последовательность, $r_{k+1} > r_k > 0$ $(\forall\, k)$. Имеют место неравенства

$$f_0(x(r_k)) + r_k\varphi(x(r_k)) \leq f_0(x(r_{k+1})) + r_k\varphi(x(r_{k+1})),$$
$$f_0(x(r_k)) + r_{k+1}\varphi(x(r_k)) \geq f_0(x(r_{k+1})) + r_{k+1}\varphi(x(r_{k+1})).$$

Вычтем из второго неравенства первое. Получим $(r_{k+1}-r_k)(\varphi(x(r_k))-\varphi(x(r_{k+1}))) \geq 0$. Отсюда

$$\varphi(x(r_k)) \geq \varphi(x(r_{k+1})), \qquad f_0(x(r_k)) \leq f_0(x(r_{k+1})), \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Так как $x(r_k) \in M_{r_k} \subset X_{r_1}$, то $\{x(r_k)\}$ — ограниченная последовательность. Обозначим через $\tilde{x}$ ее предельную точку при $r_k \to \infty$. Из неравенств (8) и непрерывности функций $f_0(x)$ и $\varphi(x)$ следует

$$\lim_{k\to\infty} f_0(x(r_k)) = f_0(\tilde{x}), \qquad \lim_{k\to\infty} \varphi(x(r_k)) = \varphi(\tilde{x}). \tag{9}$$

Поскольку $x(r_k) \in M_{r_k}$, то $\varphi(x(r_k)) \leq (1/r_k)(\bar{f} - \tilde{f}) + \bar{\varphi}$, $f_0(x(r_k)) - \bar{f} \leq r_k(\bar{\varphi} - \varphi(x(r_k))) \leq 0$. Поэтому $\varphi(\tilde{x}) \leq \bar{\varphi}$, $f_0(\tilde{x}) = \bar{f}$, т. е. $\tilde{x}$ — решение задачи (6). Тогда из (8) и (9) следует требуемое утверждение. □

Далее ослабим несколько условия теоремы 1.

Пусть последовательность $\{x_k\}$ такова, что $\varphi(x_k) \searrow \bar{\varphi}$ $(k \to \infty)$. Обозначим $\delta_k = \varphi(x_k) - \bar{\varphi}$. Рассмотрим задачу

$$\min\{f_0(x) \mid \varphi(x) \leq \bar{\varphi} + \delta_k\}. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *в задаче* (10) *удовлетворяет условию* (4), *множество* $\bar{X} = \operatorname{Arg}\min\limits_x \varphi(x)$ *непусто и ограничено,* $f_0(x) \geq \tilde{f} > -\infty$ $(\forall\, x)$. *Если в задаче* (7) $r = r_k = 1/\delta_k$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x(r_k)) = \bar{\varphi}, \qquad \lim_{k\to\infty} f_0(x(r_k)) = \bar{f}.$$

Доказательство. Из ограниченности $\bar{X}$ вытекает разрешимость (10) для любого k в некоторой точке x_{δ_k}, при этом (см., например, [15]) $\lim\limits_{k\to\infty} f^{\delta_k} = \bar{f}$, где $f^{\delta_k} = f_0(x_{\delta_k})$. Задача (10) для любого k удовлетворяет условию Слейтера. Поэтому для каждой точки x_{δ_k} найдется число λ_{δ_k} такое, что пара $[x_{\delta_k}, \lambda_{\delta_k}]$ будет седловой точкой функции Лагранжа $L_k(x,\lambda) = f_0(x) + \lambda(\varphi(x) - \bar{\varphi} - \delta_k)$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$. По определению седловой точки $L_k(x_{\delta_k}, \lambda_{\delta_k}) \leq L_k(x, \lambda_{\delta_k})$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, откуда

$$f_0(x_{\delta_k}) - f_0(x) \leq \lambda_{\delta_k}(\varphi(x) - \bar{\varphi} - \delta_k) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n), \tag{11}$$

в частности при $x = \bar{x}$, где $\bar{x}$ — решение (6), неравенство (11) дает $\lambda_{\delta_k}\delta_k \leq \bar{f} - f^{\delta_k}$. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{\delta_k}\delta_k = 0. \tag{12}$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что ограниченность множества $\bar{X}$ влечет разрешимость задачи (7) для любого $r > 0$ в некоторой точке $x(r)$. Поскольку $F(x(r), r) \leq F(x_{\delta_k}, r)$, для любого $r > 0$ имеем

$$f_0(x(r)) + r\varphi(x(r)) \leq f_0(x_{\delta_k}) + r\varphi(x_{\delta_k}) \leq f^{\delta_k} + r\bar{\varphi} + r\delta_k,$$

отсюда с учетом (11)

$$\varphi(x(r)) - \bar{\varphi} - \delta_k \leq (1/r)(f^{\delta_k} - f_0(x(r))) \leq (\lambda_k/r)(\varphi(x(r)) - \bar{\varphi} - \delta_k),$$

т. е.

$$(\varphi(x(r)) - \bar{\varphi} - \delta_k)(1 - \lambda_{\delta_k}/r) \leq 0. \tag{13}$$

Положим $r = r_k = 1/\delta_k$. Тогда, начиная с некоторого K_1, в силу (12) $1 - \lambda_{\delta_k}/r_k > 0$ при $k \geq K_1$ и поэтому из (13) $\varphi(x(r_k)) \leq \bar{\varphi} + \delta_k$. Пусть $\tilde{x}$ — предельная точка $\{x(r_k)\}$ при $r_k \to \infty$. Так как $\tilde{x} \in \bar{X}$, то $f_0(\tilde{x}) \geq \bar{f}$. С другой стороны, из (11) и (13) следует $f_0(x_{\delta_k}) - f_0(x(r_k)) \leq \lambda_{\delta_k}(\varphi(x(r_k)) - \bar{\varphi} - \delta_k) \leq 0$ для $k \geq K_1$. Отсюда $\lim\limits_{k\to\infty} f^{\delta_k} = \bar{f} \leq f_0(\tilde{x})$. В конечном итоге $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x(r_k)) = f_0(\tilde{x}) = \bar{f}$. □

3. Применение метода Тихонова

В теоремах 1 и 2 требовалась разрешимость задачи (6), аппроксимирующей несобственную постановку (1). Для этого необходимы непустота допустимого множества $\bar{X}$ (другими словами, достижимость минимального решения $\bar{\varphi}$ функции $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^n$) и существование точки минимума $f_0(x)$ на $\bar{X}$. Проблему непустоты допустимого множества можно решить, если в качестве аппроксимирующей для НЗ ВП (1) рассмотреть задачу

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_k\}, \tag{14}$$

где $X_k = \{x \mid \varphi(x) \leq \varphi(x_k)\}$, $\{x_k\}$ — минимизирующая последовательность для $\varphi(x)$: $\varphi(x_k) \searrow \bar{\varphi}$ $(k \to \infty)$, которая может быть получена, например, с помощью некоторого релаксационного метода безусловной минимизации функции n переменных $\varphi(x)$.

Если в (6) множество $\bar{X}$ непусто и ограничено, то задачи (6) и (14) разрешимы и для них будет выполнено свойство устойчивости (15): $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{f}_k = \bar{f}$, где $\bar{f}_k$ — оптимальное значение задачи (14).

Невязку $\bar{f} - \bar{f}_k$ можно оценить, если предположить, к примеру, существование седловой точки $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$ функции Лагранжа для задачи (6) в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$. Обозначим $\varphi(x_k) = \bar{\varphi} + \delta_k$, $f_0(\bar{x}_k) = \bar{f}_k$. Из определения седловой точки получаем $\bar{f} \le f_0(\bar{x}_k) + \bar{\lambda}(\varphi(\bar{x}_k) - \bar{\varphi})$. Отсюда

$$\bar{f} - \bar{f}_k \le \bar{\lambda}\delta_k. \tag{15}$$

Для решения проблемы существования точки минимума в задаче (14) имеет смысл рассмотреть применительно к (14) метод регуляризации Тихонова:

$$\min\{g_\alpha(x) \mid x \in X_k\}, \tag{16}$$

где $g_\alpha(x) = f_0(x) + \alpha\Omega(x)$, $\alpha > 0$, $\Omega(x)$ — некоторый стабилизатор [11] из методов регуляризации для некорректных задач оптимизации (т. е. $\Omega(x)$ — неотрицательная на $\mathbb{R}^n$ выпуклая функция, для которой лебегово множество $Q_C = \{x \mid \Omega(x) \le C\}$ ограничено при всех C, для которых $Q_C \ne \varnothing$).

Вначале покажем, что задача (16) при достаточно большом k и малом $\alpha > 0$ будет хорошим приближением для (6) в случае разрешимости последней. Сама задача (16) будет иметь решение в следующих случаях:

1) $\Omega(x)$ — сильно выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция (например, обычно применяется $\Omega(x) = \|x\|_2^2$);

2) $\Omega(x)$ — равномерно выпуклая [11] на $\mathbb{R}^n$ функция;

3) $\bar{X}$ — ограниченное множество;

4) $f_0(x) \ge \tilde{f} > -\infty$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$.

При этом существование решений задачи (16) в условиях 1), 2) вытекает из свойств выпуклых функций [11]. Покажем разрешимость (16) при выполнении условия 4).

Пусть $x_0 \in X_k$, $M_\alpha(x_0) = \{x \mid g_\alpha(x) \le g_\alpha(x_0)\}$. Очевидно, $\inf\{g_\alpha(x) \mid x \in X_k\} = \inf\{g_\alpha(x) \mid x \in M_\alpha(x_0)\}$. Если $x' \in M_\alpha(x_0)$, то $\tilde{f} + \alpha\Omega(x') \le f_0(x') + \alpha\Omega(x') \le f_0(x_0) + \alpha\Omega(x_0)$. Отсюда $x' \in Q_{C(\alpha)}$, где $C(\alpha) = \Omega(x_0) + (f_0(x_0) - \tilde{f})/\alpha$. Тем самым $M_\alpha(x_0) \subset Q_{C(\alpha)}$. В силу ограниченности множества $Q_{C(\alpha)}$ задача (16) разрешима.

Далее, пусть X^* — множество решений задачи (6), $\bar{x}_0$ — Ω-нормальное решение (6) (т. е. $\bar{\Omega} = \Omega(\bar{x}_0) \le \Omega(\bar{x})\ \forall\, \bar{x} \in X^*$), x_α^k — решение задачи (16), $g_\alpha^k = g_\alpha(x_\alpha^k)$. Тогда $\bar{f}_k \le g_\alpha^k = f_0(x_\alpha^k) + \alpha\Omega(x_\alpha^k) \le \bar{f} + \alpha\bar{\Omega}$, откуда

$$\left.\begin{aligned} g_\alpha^k - \bar{f}_k \le \bar{f} - \bar{f}_k + \alpha\bar{\Omega}, \qquad g_\alpha^k - \bar{f} \le \alpha\bar{\Omega}, \\ \Omega(x_\alpha^k) \le \bar{\Omega} + (\bar{f} - \bar{f}_k)/\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Выберем номер $\bar{k}$ так, чтобы $0 < \delta_k \le \bar{\delta}$ при $k \ge \bar{k}$, а параметр $0 < \alpha = \bar{\alpha}$ ($\bar{\delta}, \bar{\alpha}$ — заданные величины), тогда из (15), (17) получим

$$\left.\begin{aligned} \bar{f} - \bar{f}_k \le \bar{\lambda}\bar{\delta}, \qquad g_\alpha^k - \bar{f}_k \le \bar{\lambda}\bar{\delta} + \bar{\alpha}\bar{\Omega}, \qquad g_\alpha^k - \bar{f} \le \bar{\alpha}\bar{\Omega}, \\ \Omega(x_\alpha^k) \le \bar{\Omega} + \bar{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

4. Метод регуляризованной штрафной функции

Оценки (18) обусловливают целесообразность рассмотрения задачи (16) в качестве аппроксимации для НЗ ВП (1). Задачу (16), в свою очередь, сведем к задаче

$$\min_x F_\alpha(x, r), \tag{19}$$

где $F_\alpha(x, r) = g_\alpha(x) + r\varphi(x) = f_0(x) + r\varphi(x) + \alpha\Omega(x)$ — штрафная функция для задачи (1), $\varphi(x)$ удовлетворяет (4), $\Omega(x)$ — из (16), $r > 0$, $\alpha > 0$.

Теорема 3. *Пусть для задачи* (6) *существует* $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$ *— седловая точка функции Лагранжа* $L(x,\lambda) = f_0(x) + \lambda(\varphi(x) - \bar{\varphi})$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$. *Если в задаче* (19) $r > \bar{\lambda}$, $\bar{x}_0$ *— единственное* Ω*-нормальное решение задачи* (16), *тогда*

$$\lim_{\alpha\to 0} x_{\alpha r} = \bar{x}_0, \quad \text{где} \quad x_{\alpha r} = \arg\min_x F_\alpha(x,r).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения седловой точки $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$ следует

$$\bar{f} = f_0(\bar{x}) \le f_0(x) + \bar{\lambda}(\varphi(x) - \bar{\varphi}) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n). \tag{20}$$

Пусть $x' \in M(\alpha, r) = \{x \mid F_\alpha(x,r) \le F_\alpha(\bar{x}, r)\}$. Тогда с учетом (20) получим

$$F_\alpha(\bar{x},r) \ge F_\alpha(x',r) = f_0(x') + r\varphi(x') + \alpha\Omega(x') \ge \bar{f} + (r-\bar{\lambda})\varphi(x') + \bar{\lambda}\bar{\varphi} + \alpha\Omega(x') \ge \bar{f} + \alpha\Omega(x'). \tag{21}$$

Отсюда

$$\Omega(x') \le (1/\alpha)\,(F_\alpha(\bar{x},r) - \bar{f}) = \Omega(\bar{x}) + (r/\alpha)\,\bar{\varphi},$$

т. е. $M(\alpha,r) \subset M_1(\alpha,r) = \{x \mid \Omega(x) \le \Omega(\bar{x}) + (r/\alpha)\,\bar{\varphi}\}$. По определению стабилизатора множество $M_1(\alpha,r)$ ограничено для любых фиксированных α и r, так что ограниченным будет и $M(\alpha,r)$. Тогда в силу равенства $\inf\limits_x F_\alpha(x,r) = \inf\limits_{x\in M(\alpha,r)} F_\alpha(x,r)$ существует точка $x_{\alpha r} = \arg\min\limits_x F_\alpha(x,r)$.

Полагая в (21) $x' = x_{\alpha r}$, получим

$$F_\alpha(\bar{x},r) = \bar{f} + r\bar{\varphi} + \alpha\,\Omega(\bar{x}) \ge F_\alpha(x_{\alpha r}, r) \ge \bar{f} + (r-\bar{\lambda})\varphi(x_{\alpha r}) + \bar{\lambda}\bar{\varphi} + \alpha\,\Omega(x_{\alpha r}),$$

т. е. $(r-\bar{\lambda})(\varphi(x_{\alpha r}) - \bar{\varphi}) + \alpha\Omega(x_{\alpha r}) \le \alpha\,\Omega(\bar{x})$. Отсюда при $r > \bar{\lambda}$ получим

$$\varphi(x_{\alpha r}) - \bar{\varphi} \le [\alpha/(r-\bar{\lambda})]\,\Omega(\bar{x}), \qquad \Omega(x_{\alpha r}) \le \Omega(\bar{x}). \tag{22}$$

Из неравенства $F_\alpha(x_{\alpha r}, r) \le F_\alpha(\bar{x}, r)$ также вытекает

$$f_0(x_{\alpha r}) \le \bar{f} + \alpha\,\Omega(\bar{x}). \tag{23}$$

Пусть $\tilde{x}$ — предельная точка последовательности $\{x_{\alpha r}\}$ при фиксированном $r = \bar{r} > \bar{\lambda}$ и $\alpha \to 0$. Из (22), (23) следует $\varphi(\tilde{x}) = \bar{\varphi}$, $f_0(\tilde{x}) = \bar{f}$, $\Omega(\tilde{x}) \le \Omega(\bar{x})$. Если $\bar{x} = \bar{x}_0$ — Ω-нормальное решение задачи (6), то таковым будет и точка $\tilde{x}$. В случае единственности такого решения $\tilde{x} = \bar{x}_0$ и $\lim\limits_{\alpha\to 0} x_{\alpha r} = \bar{x}_0$. □

Исследуем далее связь между задачами (14) и (19). Пусть в задаче (14) $X_k = \{x \mid \varphi(x) \le \bar{\varphi} + \delta_k\}$, $\delta_k > 0$, $\delta_k \searrow 0$ $(k \to \infty)$. Зафиксируем номер $k = \bar{k}$ так, чтобы $\delta_k \le \bar{\delta}$ $(\forall\, k \ge \bar{k})$. Предположим, что задача (14) разрешима в некоторой точке $\bar{x}_k$. Для задачи (14) выполняется условие Слейтера: $\exists\, x^0\colon \varphi(x^0) < \bar{\varphi} + \delta_k$. Поэтому для $\bar{x}_k$ найдется число $\bar{\lambda}_k$ такое, что пара $[\bar{x}_k, \bar{\lambda}_k]$ будет седловой точкой функции Лагранжа $L_k(x,\lambda) = f_0(x) + \lambda(\varphi(x) - \bar{\varphi} - \delta_k)$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$. Из определения седловой точки $[\bar{x}_k, \bar{\lambda}_k]$ будет следовать аналог неравенства (20)

$$\bar{f}_k = f_0(\bar{x}_k) \le f_0(x) + \bar{\lambda}_k(\varphi(x) - \bar{\varphi} - \delta_k) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n). \tag{24}$$

Теорема 4. *Если в задаче* (19) $r > \bar{\lambda}_k$, *то она разрешима в некоторой точке* $x_{\alpha r}$, *при этом решения задач* (14) *и* (19) *связаны оценками*

$$\varphi(x_{\alpha r}) \le \bar{\varphi} + \bar{\delta} + \alpha\,\Omega(\bar{x}_k)/(r - \bar{\lambda}_k); \tag{25}$$

$$|f_0(x_{\alpha r}) - \bar{f}_k| \le \max\{\alpha\,\bar{\lambda}_k\,\Omega(\bar{x}_k)/(r-\bar{\lambda}_k),\ r\bar{\delta} + \alpha\,\Omega(\bar{x}_k)\}; \tag{26}$$

$$\Omega(x_{\alpha r}) \le \Omega(\bar{x}_k) + (r - \bar{\lambda}_k)\,\bar{\delta}/\alpha. \tag{27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя схеме доказательства теоремы 3, с помощью неравенства (24) легко показать ограниченность множества $M_2(\alpha,r)=\{x \mid F_\alpha(x,r)\le F_\alpha(\bar x_k,r)\}$ для любых фиксированных $\alpha>0$, $r>0$. В самом деле, для $x'\in M_2(\alpha,r)$ имеем (считая $r>\bar\lambda_k$)

$$F_\alpha(\bar x_k,r)\ge F_\alpha(x',r)\ge f_0(\bar x_k)-\bar\lambda_k(\varphi(x')-\bar\varphi-\delta_k)+r\varphi(x')+\alpha\,\Omega(x')$$
$$\ge \bar f_k+(r-\bar\lambda_k)\varphi(x')+\bar\lambda_k\,(\bar\varphi+\delta_k)+\alpha\,\Omega(x')\ge \bar f_k+\alpha\,\Omega(x'). \tag{28}$$

Поэтому $M_2(\alpha,r)\subset M_3(\alpha,r)=\{x \mid \Omega(x)\le \Omega(\bar x_k)+r\,(\bar\varphi+\bar\delta)/\alpha\}$. Так как $\inf\limits_x F_\alpha(x,r)=\inf\limits_{x\in M_2(\alpha,r)} F_\alpha(x,r)$, множество $M_2(\alpha,r)$ ограничено, функция $F_\alpha(x,r)$ непрерывна по x на $M_2(\alpha,r)$, то задача (19) будет разрешима в некоторой точке $x_{\alpha r}$.

Из неравенства (28) при $x'=x_{\alpha r}$ получаем

$$\bar f_k+r\varphi(\bar x_k)+\alpha\,\Omega(\bar x_k)\ge \bar f_k+(r-\bar\lambda_k)\varphi(x_{\alpha r})+\bar\lambda_k\,(\bar\varphi+\delta_k)+\alpha\,\Omega(x_{\alpha r}), \tag{29}$$

откуда следует

$$r(\bar\varphi+\delta_k)+\alpha\,\Omega(\bar x_k)\ge (r-\bar\lambda_k)\varphi(x_{\alpha r})+\bar\lambda_k\,(\bar\varphi+\delta_k),$$

что приводит к оценке (25)

$$\varphi(x_{\alpha r})-\bar\varphi-\delta_k\le \alpha\,\Omega(\bar x_k)/(r-\bar\lambda_k).$$

Оценивая далее (29), имеем

$$r(\bar\varphi+\bar\delta)+\alpha\,\Omega(\bar x_k)\ge (r-\bar\lambda_k)\varphi(x_{\alpha r})+\bar\lambda_k\,(\bar\varphi+\delta_k)+\alpha\,\Omega(x_{\alpha r}),$$

$$\alpha\,\Omega(x_{\alpha r})\le \alpha\,\Omega(\bar x_k)+(r-\bar\lambda_k)(\bar\varphi+\bar\delta).$$

Этим доказана оценка (27).

Для проверки справедливости (26) воспользуемся неравенствами (24) и (25). Из них вытекает

$$\bar f_k-f_0(x_{\alpha r})\le \bar\lambda_k(\varphi(x_{\alpha r})-\bar\varphi-\delta_k)\le \alpha\,\bar\lambda_k\,\Omega(\bar x_k)/(r-\bar\lambda_k). \tag{30}$$

С другой стороны, так как $F_\alpha(x_{\alpha r},r)\le F_\alpha(\bar x_k,r)$, то

$$f_0(x_{\alpha r})-\bar f_k\le \alpha\,\Omega(\bar x_k)+r(\bar\varphi+\delta_k-\varphi(\bar x_k))\le \alpha\,\Omega(\bar x_k)+r\delta_k. \tag{31}$$

Объединяя (30) и (31), получаем оценку (26). □

Заметим, что если взять $r>2\bar\lambda_k$, то оценка (26) упрощается:

$$|f_0(x_{\alpha r})-\bar f_k|\le \alpha\,\Omega(\bar x_k)+r\bar\delta.$$

5. Применение метода точных штрафных функций

Выше, в разд. 2, говорилось о близости условий, налагаемых на функцию $\varphi(x)$ в задаче (6), к тем, которым удовлетворяют функции внешнего штрафа в методах штрафных функций. Среди этих методов выгодно выделяется класс точных штрафных функций. Для методов данного класса характерно наличие порогового значения штрафного коэффициента r, начиная с которого задача со штрафом становится эквивалентной исходной задаче на условный экстремум. Другими словами, для решения оптимизационной задачи в принципе достаточно однократной минимизации точной штрафной функции при подходяще выбранном r. Классическим примером точного штрафа является функция Еремина — Зангвилла $\varphi(x)=\varphi_1(x)=\|f^+(x)\|_1$ [15].

Конкретизируем результаты теорем 3, 4 для случая $\varphi(x) = \varphi_1(x)$. Дополнительно будем считать, что функции $f_i(x)$ задачи (1) приняты с некоторой погрешностью, т.е. вместо $f_i(x)$ известны функции $f_i^\varepsilon(x)$, такие что

$$|f_i^\varepsilon(x) - f_i(x)| < \varepsilon, \qquad i = 0, 1, \dots, m, \qquad \varepsilon > 0 \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n). \tag{32}$$

В условиях приближенного задания функций $f_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$, задача (19) преобразуется в проблему поиска

$$\min_x \bigl\{F_\alpha^\varepsilon(x, r) = f_0^\varepsilon(x) + r\varphi_1^\varepsilon(x) + \alpha\,\Omega(x)\bigr\}, \tag{33}$$

где $\varphi_1^\varepsilon(x) = \|f^{\varepsilon^+}(x)\|_1 = \sum_{i=1}^m f_i^{\varepsilon^+}(x)$, $\alpha > 0$, $r > 0$, $\varepsilon > 0$, $\Omega(x)$ — из (16).

Лемма. *Пусть в задаче* (1) $f_0(x) \ge \tilde f > -\infty$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$. *Тогда для любого фиксированного набора параметров* $s = [\alpha, r, \varepsilon]$ *задача* (33) *разрешима в некоторой точке* $x_s = x_\alpha^\varepsilon(r) = \arg\min\limits_x \{F_s(x) = F_\alpha^\varepsilon(x, r)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя неравенства

$$|f_i^{\varepsilon^+}(x) - f_i^+(x)| \le |f_i^\varepsilon(x) - f_i(x)| < \varepsilon \qquad (i = 0, 1, \dots, m),$$

оценим

$$\varphi_1(x) = \varphi_1^\varepsilon(x) + \sum_{i=1}^m [f_i^+(x) - f_i^{\varepsilon^+}(x)] < \varphi_1^\varepsilon(x) + m\varepsilon.$$

Поэтому

$$F_\alpha(x, r) = f_0(x) + r\varphi_1(x) + \alpha\,\Omega(x) < f_0^\varepsilon(x) + \varepsilon + r\varphi_1^\varepsilon(x) + rm\varepsilon + \alpha\,\Omega(x) = F_\alpha^\varepsilon(x, r) + \varepsilon(1 + rm).$$

Пусть $M_C^\varepsilon = \{x \mid F_\alpha^\varepsilon(x, r) \le C\} \ne \varnothing$, $C \ge 0$. Если $x' \in M_C^\varepsilon$, то

$$\tilde f + \alpha\,\Omega(x') \le F_\alpha(x', r) < F_\alpha^\varepsilon(x', r) + \varepsilon(1 + rm) \le C + \varepsilon(1 + rm).$$

Отсюда

$$\Omega(x') < (C + \varepsilon(1 + rm) - \tilde f)/\alpha = C_1(\alpha, r, \varepsilon).$$

Таким образом,

$$M_C^\varepsilon \subset \{x \mid \Omega(x) \le C_1(s)\},$$

и тогда в соответствии с определением стабилизатора $\Omega(x)$ множество M_C^ε ограничено для любого фиксированного s. Поскольку $\inf\limits_x F_\alpha^\varepsilon(x, r) = \inf\limits_{x \in M_C^\varepsilon} F_\alpha^\varepsilon(x, r)$, то из непрерывности функции $F_\alpha^\varepsilon(x, r)$ по x и ограниченности M_C^ε следует справедливость леммы. □

Далее исследуется связь между (33) и задачей (6), которая приобрела следующий вид:

$$\min\{f_0(x) \mid \varphi_1(x) \le \bar\varphi_1\}, \tag{34}$$

где $\bar\varphi_1 = \inf\limits_x \varphi_1(x)$. Выпишем для (34) функцию Лагранжа $l(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda(\varphi_1(x) - \bar\varphi_1)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \ge 0$.

Теорема 5. *Пусть*

1) *в задаче* (1) $f_0(x) \ge \tilde f > -\infty$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$;

2) *существует* $[\bar x, \bar\lambda]$ — *седловая точка функции* $l(x, \lambda)$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$;

3) *параметр* r *в задаче* (33) *удовлетворяет условию* $r \ge \bar r = \rho\bar\lambda/(\rho - 2m)$, $\rho = \mathrm{const}$, $\rho > 2m$.

Справедливы неравенства

$$\varphi_1(x_s) - \bar\varphi_1 \le \alpha\,\Omega(\bar x)/(r - \bar\lambda) + \varepsilon\{2/(r - \bar\lambda) + \rho\}; \tag{35}$$

$$f_0(x_s) - \bar f \le \alpha\,\Omega(\bar x) + 2\varepsilon(1 + mr); \tag{36}$$

$$\Omega(x_s) \le \Omega(\bar x) + 2\,\varepsilon\,(1 + mr)/\alpha, \tag{37}$$

где $s = [\alpha, r, \varepsilon]$, $x_s = x_\alpha^\varepsilon(r) = \arg\min\limits_x F_\alpha^\varepsilon(x, r)$, $\bar f = f_0(\bar x)$, $\alpha > 0$, $r > 0$, $\varepsilon > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме функция $F_s(x)$ достигает минимума по x в некоторой точке x_s:

$$F_s(x_s) = F_\alpha^\varepsilon(x_s, r) \le F_\alpha^\varepsilon(\bar{x}, r) = F_s(\bar{x}). \tag{38}$$

С учетом (32) из неравенства (38) следует

$$r(\varphi_1(x_s) - \bar{\varphi}_1) \le \bar{f} - f_0(x_s) + \alpha\,\Omega(\bar{x}) + 2\varepsilon(1 + mr). \tag{39}$$

Из определения седловой точки $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$ имеем

$$\bar{f} - f_0(x_s) \le \bar{\lambda}(\varphi_1(x_s) - \bar{\varphi}_1). \tag{40}$$

Тогда из (39), (40) получим

$$(r - \bar{\lambda})(\varphi_1(x_s) - \bar{\varphi}_1) \le \alpha\,\Omega(\bar{x}) + 2\varepsilon(1 + mr),$$

и поскольку из $r \ge \bar{r}$ следует $r > \bar{\lambda}$, то отсюда вытекает оценка (35).

Оценка (36) получается непосредственно из (39) при учете неравенства $\varphi_1(x_s) \ge \bar{\varphi}_1$.

Для получения (37) применим соотношения (38)–(40):

$$\alpha\,\Omega(x_s) \le \alpha\,\Omega(\bar{x}) + r(\bar{\varphi}_1 - \varphi_1(x_s)) + \bar{f} - f_0(x_s) + 2\varepsilon(1 + mr)$$

$$\le \alpha\,\Omega(\bar{x}) + (r - \bar{\lambda})(\bar{\varphi}_1 - \varphi_1(x_s)) + 2\varepsilon(1 + mr) \le \alpha\,\Omega(\bar{x}) + 2\varepsilon(1 + mr). \qquad \square$$

Следствие. *Пусть в задаче* (33) *параметр* r *фиксирован,* $r \ge \bar{r} > 0$, $\alpha \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon/\alpha \to 0$. *Тогда любая предельная точка последовательности* $\{x_s\}$ *будет* Ω*-нормальным решением задачи* (34). *Если* $\bar{x}_0$ *— единственное* Ω*-нормальное решение задачи* (34), *то* $\lim x_s = \bar{x}_0$.

В самом деле, из неравенства (37) следует ограниченность последовательности $\{x_s\}$. Обозначим через $\tilde{x}$ предельную точку $\{x_s\}$. Из (35), (36) вытекает $\tilde{x} \in \bar{X}_1 = \operatorname{Arg\,min} \varphi(x)$, $f_0(\tilde{x}) \le \bar{f}$, т. е. $\tilde{x}$ — решение задачи (34). Полагая в (37) $\bar{x} = \bar{x}_0$, где $\bar{x}_0$ — Ω-нормальное решение задачи (34), получим $\Omega(\tilde{x}) = \Omega(\bar{x}_0)$.

Если значение $\bar{\varphi}_1$ в (34) не достигается, то зафиксируем оценку точности $\delta > 0$ и выберем точку $\bar{y}$, для которой

$$\bar{\varphi}_1 \le \varphi_1(\bar{y}) \le \bar{\varphi}_1 + \delta. \tag{41}$$

Рассмотрим задачу

$$\min\{g_\alpha(x) \mid x \in \bar{Y}\}, \tag{42}$$

где $g_\alpha(x) = f_0(x) + \alpha\,\Omega(x)$, $\alpha > 0$, $\bar{Y} = \{x \mid \varphi_1(x) \le \varphi_1(\bar{y})\}$, $\Omega(x)$ — некоторый стабилизатор.

Теорема 6. *Пусть функция Лагранжа для задачи* (42) $l_\alpha(x, \lambda) = g_\alpha(x) + \lambda(\varphi_1(x) - \varphi_1(\bar{y}))$ *имеет седловую точку* $[\bar{x}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$. *Если в* (33) $r \ge \bar{r} = \max\{1, D(1 + 1/m)\bar{\lambda}_\alpha\}$, *где* $D = \mathrm{const}$, $D > 2$, *то*

$$\varphi_1(x_s) - \bar{\varphi}_1 < D(\delta + 2(m + 1)\varepsilon), \tag{43}$$

$$|g_\alpha(x_s) - g_\alpha(\bar{x}_\alpha)| \le r\delta + 2(rm + 1)\varepsilon. \tag{44}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя схеме доказательства теоремы 5, из неравенства

$$F_\alpha^\varepsilon(x_s, r) \le F_\alpha^\varepsilon(\bar{x}_\alpha, r)$$

получим $r(\varphi_1(x_s) - \varphi_1(\bar{x}_\alpha)) \le \bar{g}_\alpha - g_\alpha(x_s) + 2\varepsilon(mr + 1)$, где $\bar{g}_\alpha = g_\alpha(\bar{x}_\alpha)$. Согласно (41) $\varphi_1(\bar{x}_\alpha) \le \varphi_1(\bar{y}) \le \bar{\varphi}_1 + \delta$, поэтому

$$r(\varphi_1(x_s) - \bar{\varphi}_1) \le \bar{g}_\alpha - g_\alpha(x_s) + r\delta + 2\varepsilon(mr + 1). \tag{45}$$

Из определения седловой точки $[\bar{x}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha]$ вытекает

$$\bar{g}_\alpha - g_\alpha(x_s) \le \bar{\lambda}_\alpha(\varphi_1(x_s) - \varphi_1(\bar{y})) \le \bar{\lambda}_\alpha(\varphi_1(x_s) - \bar{\varphi}_1). \tag{46}$$

Учитывая (45), (46), получим

$$(r - \bar{\lambda}_\alpha)(\varphi_1(x_s) - \bar{\varphi}_1) \le r\delta + 2\varepsilon(mr + 1).$$

Так как $r > D\bar{\lambda}_\alpha > \bar{\lambda}_\alpha$, то

$$\varphi_1(x_s) - \bar{\varphi}_1 \le [r\,\delta + 2\,\varepsilon\,(mr + 1)]/(r - \bar{\lambda}_\alpha). \tag{47}$$

По условию $D > 2$. Поэтому $1 > 1/(D-1)$, $r > D\bar{\lambda}_\alpha \ge \{D/(D-1)\}\,\bar{\lambda}_\alpha$. Отсюда $r/(r-\bar{\lambda}_\alpha) < D$, $(mr+1)/(r-\bar{\lambda}_\alpha) < D(m+1)$, т. е. из (47) вытекает оценка (43).

Далее, согласно (45) имеем

$$g_\alpha(x_s) - \bar{g}_\alpha \le r\delta + 2\varepsilon(m + 1). \tag{48}$$

С другой стороны, из (46) и (43) следует $\bar{g}_\alpha - g_\alpha(x_s) \le \bar{\lambda}_\alpha(D\delta + 2D(m+1)\varepsilon)$, поэтому с учетом (48) справедливо

$$|g_\alpha(x_s) - \bar{g}_\alpha| \le \max\{r\delta + 2\varepsilon(rm + 1), \bar{\lambda}_\alpha(D\delta + 2D(m+1)\varepsilon)\}. \tag{49}$$

В силу условий на выбор параметра r выполняются неравенства $r \ge D\bar{\lambda}_\alpha$, $rm + 1 > rm \ge D(m+1)\,\bar{\lambda}_\alpha$. Применяя их в (49), получим оценку (44). $\square$

Заключение

В работе рассматриваются подходы к оптимальной коррекции НЗ ВП, в основе которых лежит метод Тихонова для регуляризации некорректных оптимизационных задач. Исходной задаче ВП с возможно несовместной системой ограничений ставится в соответствие аппроксимирующая задача, полученная в результате минимизации некоторой функции штрафа как сложной функции от невязок ограничений. Частным случаем такого подхода является коррекция вектора правых частей ограничений относительно некоторой векторной нормы. Естественным итогом данного способа построения аппроксимации для НЗ ВП служит применение метода штрафных функций. Для достаточно общей конструкции функции внешнего штрафа в работе доказана сходимость точек минимума штрафной функции к обобщенному решению исходной задачи. Чтобы снять вопрос о достижимости минимального значения штрафной функции и решить откорректированную задачу ВП, рассматривается метод регуляризованной штрафной функции. Для этого метода найдены условия, обеспечивающие сходимость предлагаемой процедуры к нормальному обобщенному решению НЗ ВП.

В заключение исследуются возможности метода точных штрафных функций применительно к коррекции НЗ ВП. Показано, что метод и в данном случае несобственности сохраняет свою главную особенность, а именно наличие конечного значения штрафного коэффициента, начиная с которого обеспечивается требуемая сходимость решения задачи со штрафом к обобщенному решению НЗ ВП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Мазуров Вл. Д.** Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990. 246 с.
3. **Khachay M. Yu.** On approximate algorithm of a minimal committee of a linear inequalities system // Pattern Recogn. and Image Anal. 2003. Vol. 13, no. 3. P. 459–464.

4. **Попов Л. Д.** Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 3–11.
5. **Ерохин В. И., Красников А. С., Хвостов М. Н.** Матричные коррекции задач линейного программирования по минимуму евклидовой нормы // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 219–231.
6. **Скарин В. Д.** О применении одного метода регуляризации для коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 230–241.
7. **Dax A.** The smallest correction of an inconsistent system of linear inequalities // Optimization and Engineering. 2001. Vol. 2, no. 3. P. 349–359. doi: 10.1023/A:1015370617219 .
8. **Amaral P., Barahona P.** Connections between the total least squares and the correction of an infeasible system of linear inequalities // Linear Algebra and Its Appl. 2005. Vol. 395. P. 191–210. doi: 10.1016/j.laa.2004.08.022 .
9. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
10. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.
11. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации: Кн. 1, 2. М.: МЦНМО, 2011. Т. 1: 620 p. ISBN: 978-5-94057-707-2 ; Т. 2: 433 p. ISBN: 978-5-94057-708-9 .
12. **Golub G. N., Hansen P. C., O'Leary D. P.** Tikhonov regularization and total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1999. Vol. 21, no. 1. P. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432 .
13. **Renaut R. A., Guo N.** Efficient algorithms for solution of regularized total least squares // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005. Vol. 26, no. 2. P. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889 .
14. **Skarin V. D.** On the parameter control of the residual method for the correction of improper problems of convex programming // Proc. DOOR 2016. Cham: Springer International Publishing, 2016. P. 441–451. (Lecture Notes Comp. Sci.; vol. 9869). doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_35 .
15. **Еремин И. И., Астафьев Н. Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук, зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
г. Екатеринбург
e-mail: skavd@imm.uran.ru

Поступила 17.05.2018

REFERENCES

1. Eremin I.I., Mazurov V.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi lineinogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper Problems of Linear and Convex Programming]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 336 p.
2. Mazurov V.D. *Metod komitetov v zadachakh optimizatsii i klassifikatsii* [Committee method in problems of optimization and classification]. Moscow: Nauka Publ., 1990, 246 p. ISBN: 5-02-013976-9 .
3. Khachay M.Yu. On approximate algorithm of a minimal committee of a linear inequalities system. *Pattern Recogn. and Image Anal.*, 2003, vol. 13, no. 3, pp. 459–464.
4. Popov L.D. Use of barrier functions for optimal correction of improper problems of linear programming of the 1st kind. *Autom. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 417–424. doi: 10.1134/S0005117912030010 .
5. Erokhin V.I., Krasnikov A.S., Khvostov M.N. Matrix corrections minimal with respect to the Euclidean norm for linear programming problems. *Autom. Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 2, pp. 219–231. doi: 10.1134/S0005117912020026 .
6. Skarin V.D. On the application of a regularization method for the correction of improper problems of convex programming. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, vol. 283, suppl. 1, pp. 126–138. doi: 10.1134/S0081543813090137 .
7. Dax A. The smallest correction of an inconsistent system of linear inequalities. *Optimization and Engineering*, 2001, vol. 2, no. 3, pp. 349–359. doi: 10.1023/A:1015370617219 .
8. Amaral P., Barahona P. Connections between the total least squares and the correction of an infeasible system of linear inequalities. *Linear Algebra and Its Appl.*, 2005, vol. 395, pp. 191–210. doi: 10.1016/j.laa.2004.08.022 .

9. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for the solution of ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 288 p.
10. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Utrecht: VSP, 2002, Inverse and Ill-Posed Problems Series, 281 p. ISBN: 90-6764-367-X/hbk . Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya.* Moscow, Nauka Publ., 1978, 208 p.
11. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: MTsNMO Publ., 2011. Vol. 1: 620 p., ISBN: 978-5-94057-707-2 ; Vol. 2: 433 p., ISBN: 978-5-94057-708-9 .
12. Golub G.N., Hansen P.C., O'Leary D.P. Tikhonov regularization and total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1999, vol. 21, no. 1, pp. 185–194. doi: 10.1137/S0895479897326432 .
13. Renaut R.A., Guo N. Efficient algorithms for solution of regularized total least squares. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2005, vol. 26, no. 2, pp. 457–476. doi: 10.1137/S0895479802419889 .
14. Skarin V.D. On the parameter control of the residual method for the correction of improper problems of convex programming. In: Y. Kochetov, M. Khachay, V. Beresnev, E. Nurminski, P. Pardalos (eds.), *Discrete Optimization and Operations Research. DOOR 2016.*, 2016, Ser. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9869, pp. 441–451. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2_35 .
15. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoriyu linejnogo i vypuklogo programmirovaniya* [Introduction to the theory of linear and convex programming]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 191 p.

The paper was received by the Editorial Office on May 17, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00109).

Vladimir Dmitrievich Skarin, Dr. Phys.-Math. Sci, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: skavd@imm.uran.ru .