ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Рассматривается система уравнений для движения ионизированного идеального газа. Излагается алгоритм сведения данной системы нелинейных уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Показано, что независимая переменная ψ в системах ОДУ определяется из соотношения $\psi = t + xf_1(\psi) + yf_2(\psi) + zf_3(\psi)$ после выбора (задания или определения) функций $f_i(\psi)$, $(i = 1, 2, 3)$. Функции $f_i(\psi)$ либо определяются из условий задачи, поставленной для исходной системы в частных производных, либо задаются произвольно для получения конкретной системы ОДУ. Для задачи о движении ионизированного газа вблизи тела получена система ОДУ, обсуждается вопрос неустойчивости, отмеченной во многих случаях. Также рассматривается задача о движении потоков (частиц) в заданном направлении, которая представляет значительный интерес в некоторых областях физики. Получены функции $f_i(\psi)$, $(i = 1, 2, 3)$, которые обеспечивают движение потока ионизированного газа в заданном направлении и сведение системы уравнений в частных производных к системе ОДУ.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными, точные решения, системы ОДУ, краевая задача.

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov. One approach to the solution of some problems in plasma dynamics.

A system of equations for the motion of an ionized ideal gas is considered. An algorithm for the reduction of this system of nonlinear partial differential equations (PDEs) to systems of ordinary differential equations (ODEs) is presented. It is shown that the independent variable ψ in the systems of ODEs is determined from the relation $\psi = t + xf_1(\psi) + yf_2(\psi) + zf_3(\psi)$ after choosing (setting or finding) the functions $f_i(\psi)$, $i = 1, 2, 3$. These functions are either found from the conditions of the problem posed for the original system of PDEs or are given arbitrarily to obtain a specific system of ODEs. For the problem on the motion of an ionized gas near a body, we write a system of ODEs and discuss the issue of instability, which is observed in a number of cases. We also consider a problem of the motion of flows (particles) in a given direction, which is of significant interest in some areas of physics. We find the functions $f_i(\psi)$, $i = 1, 2, 3$, that provide the motion of a flow of the ionized gas in a given direction and reduce the system of PDEs to a system of ODEs.

Keywords: nonlinear partial differential equations, exact solutions, systems of ordinary differential equations, boundary value problem.

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-176-186

MSC: 35C99, 35Q35, 76W05, 76X05

Введение

В статье рассматривается одна из математических моделей ионизированного газа (динамики плазмы). Исследования, связанные с изучением плазмы, ведутся достаточно давно, термин “плазма” введен в двадцатых годах двадцатого века И. Ленгмюром, положившим начало систематическому теоретическому изучению плазмы [1]. Эти исследования находят все более широкое применение (см., например, [2; 3]).

Математический аппарат для изучения плазмы основан на различных модификациях системы уравнений магнитной гидродинамики, кинетическом описании и др. Соответствующие уравнения в основном решаются численными методами (см. например, [4;5]), развиваются также аналитические подходы (см. например, [6; 7]). В данной работе проводится аналитическое рассмотрение одного варианта системы уравнений магнитной гидродинамики. Во многих публикациях обращается внимание на разного типа неустойчивости при движении потоков ионизированного газа [8–10]. В статье обсуждается этот вопрос для задачи о движении плазмы вблизи поверхности тела на основе геометрического метода, развиваемого авторами, а также рассматривается задача о движении потоков (частиц) в заданном направлении, которая представляет значительный интерес в некоторых областях физики [6; 7].

Итак, обратимся к системе уравнений магнитной гидродинамики для идеального ионизированного газа при наличии магнитного поля [11]:

$$\rho_t + \mathrm{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \tag{0.1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \tag{0.2}$$

$$\mathbf{B}_t - \mathrm{rot}(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = 0, \tag{0.3}$$

$$\rho \mathbf{U}_t + \rho(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} + \mathrm{grad}p - \mu^{-1}(\mathrm{rot}\mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0. \tag{0.4}$$

Здесь $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ — пространственные координаты, t — время, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ — вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{B} = \{a, b, c\}$, μ — магнитная проницаемость, $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ — вектор скорости течения газа, $\mathbf{U} = \{u, v, w\}$, ρ — плотность газа, p — давление, индекс t обозначает дифференцирование по времени.

Предполагается, что имеет место бесконечная электропроводность, тогда выполняются зависимости $\mathbf{E} = -\mathbf{U} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ — вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{J} = \mu^{-1}(\mathrm{rot}\mathbf{B})$, $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ — вектор плотности электрического тока.

В разд. 1 система (0.1)–(0.4) геометрическим методом [12] сведена к системам ОДУ. Выписаны некоторые точные решения системы. В разд. 2 рассматривается задача о движении потока ионизированного газа в заданном направлении. В разд. 3 и 4 решаются краевые задачи о течении ионизированного газа вблизи неподвижного тела.

1. Сведение системы (0.1)–(0.4) к системе ОДУ

Выпишем систему уравнений (0.1)–(0.4) в виде

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \quad a_x + b_y + c_z = 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &a_t - (ub - va)_y + (wa - uc)_z = 0, \quad b_t - (vc - wb)_z + (ub - va)_x = 0, \\ &c_t - (wa - uc)_x + (cv - wb)_y = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &\rho(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) + p_x - \mu^{-1}[(a_z - c_x)c - (b_x - a_y)b] = 0, \\ &\rho(v_t + uv_x + vv_y + wv_z) + p_y - \mu^{-1}[(b_x - a_y)a - (c_y - b_z)c] = 0, \\ &\rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) + p_z - \mu^{-1}[(c_y - b_z)b - (a_z - c_x)a] = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь и далее нижние буквенные индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным.

Полагая, как и в [12], что

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\psi), \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(\psi), \quad p = p(\psi), \quad \rho = \rho(\psi), \quad \psi = \psi(t, x, y, z),$$

получаем

$$\begin{aligned} &u_x = u'\psi_x, \quad u_y = u'\psi_y, \quad u_z = u'\psi_z, \quad u_t = u'\psi_t, \quad v_x = v'\psi_x, \quad v_y = v'\psi_y, \quad v_z = v'\psi_z, \\ &v_t = v'\psi_t, \quad w_x = w'\psi_x, \quad w_y = w'\psi_y, \quad w_z = w'\psi_z, \quad w_t = w'\psi_t, \quad a_x = a'\psi_x, \\ &a_y = a'\psi_y, \quad a_z = a'\psi_z, \quad a_t = a'\psi_t, \quad b_x = b'\psi_x, \quad b_y = b'\psi_y, \quad b_z = b'\psi_z, \\ &b_t = b'\psi_t, \quad c_x = c'\psi_x, \quad c_y = c'\psi_y, \quad c_z = c'\psi_z, \quad c_t = c'\psi_t, \quad \rho_x = \rho'\psi_x, \\ &\rho_y = \rho'\psi_y, \quad \rho_z = \rho'\psi_z, \quad \rho_t = \rho'\psi_t, \quad p_x = p'\psi_x, \quad p_y = p'\psi_y, \quad p_z = p'\psi_z. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1)–(1.3), приходим к системе

$$\begin{aligned}
&L_1 := \rho'(1+uf_1+vf_2+wf_3)+\rho(u'f_1+v'f_2+w'f_3)=0, \quad L_2 := a'f_1+b'f_2+c'f_3=0,\\
&L_3 := a'(1+vf_2+wf_3)-b'uf_2-c'uf_3-u'(bf_2+cf_3)+v'af_2+w'af_3=0,\\
&L_4 := -a'vf_1+b'(1+uf_1+wf_3)-c'vf_3+u'bf_1-v'(af_1+cf_3)+w'bf_3=0,\\
&L_5 := -a'wf_1-b'wf_2+c'(1+uf_1+vf_2))+u'cf_1+v'cf_2-w'(af_1+bf_2)=0,\\
&L_6 := u'\rho(1+uf_1+vf_2+wf_3)+p'f_1-\mu^{-1}[a'(bf_2+cf_3)-b'bf_1-c'cf_1]=0,\\
&L_7 := v'\rho(1+uf_1+vf_2+wf_3)+p'f_2-\mu^{-1}[-a'af_2+b'(af_1+cf_3)-c'cf_2]=0,\\
&L_8 := w'\rho(1+uf_1+vf_2+wf_3)+p'f_3-\mu^{-1}[-a'af_3-b'bf_3+c'(af_1+bf_2)]=0,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

сводя систему (0.1)–(0.4) к системе ОДУ. Здесь штрихом обозначена производная по ψ и

$$f_1(\psi)=\psi_x/\psi_t, \quad f_2(\psi)=\psi_y/\psi_t, \quad f_3(\psi)=\psi_z/\psi_t, \quad \psi_t\neq 0. \tag{1.6}$$

Нетрудно проверить, что решение системы (1.6) имеет вид $\psi = t + xf_1(\psi) + yf_2(\psi) + zf_3(\psi)$, где $f_i(\psi)$ $(i = 1, 2, 3)$ — произвольные функции, задавая которые можно найти $\psi = \psi(x, y, z, t)$ (см., например, [12]).

Далее считаем, что функции $f_i(\psi)$ заданы произвольно, если не оговорены ограничения на их выбор.

Рассмотрим систему (1.5) как алгебраическую линейную относительно производных. Система (1.5) имеет нетривиальное решение, если определитель этой системы равен нулю. Вычисляя определитель системы (1.5), получаем, что он равен нулю, так как $L_2 - (f_1L_3 + f_2L_4 + f_3L_5) = 0$.

Проанализируем возможности представления системы (1.5) в виде системы ОДУ.

Из линейной комбинации $aL_6 + bL_7 + cL_8 = 0$ и $L_1 = 0$ находим, что

$$p' = -\frac{\rho(1+uf_1+vf_2+wf_3)}{af_1+bf_2+cf_3}(au'+bv'+cw'), \quad \rho' = -\frac{\rho(f_1u'+f_2v'+f_3w')}{1+uf_1+vf_2+wf_3}. \tag{1.7}$$

Из уравнений $L_i = 0$ $(i = 3, 4, 5)$, учитывая, что $L_2 = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
&a' = \frac{u'(bf_2+cf_3)-af_2v'-af_3w'}{1+uf_1+vf_2+wf_3}, \quad b' = \frac{-bf_1u'+v'(af_1+cf_3)-bf_3w'}{1+uf_1+vf_2+wf_3},\\
&c' = \frac{-cf_1u'-cf_2v'+w'(af_1+bf_2)}{1+uf_1+vf_2+wf_3}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Тогда уравнения $L_j = 0$ $(j = 6, 7, 8)$ принимают вид

$$A_1u'+A_2v'+A_3w'=0, \quad B_1u'+B_2v'+B_3w'=0, \quad C_1u'+C_2v'+C_3w'=0,$$

где

$$\begin{aligned}
&A_1 = (bf_2+cf_3)\alpha-\beta[c^2f_1^2+(bf_2+cf_3)^2+b^2f_1^2],\\
&A_2 = -\alpha bf_1-\beta[c^2f_1f_2-af_2(bf_2+cf_3)-bf_1(af_1+cf_3)],\\
&A_3 = -\alpha cf_1-\beta[-cf_1(af_1+bf_2)-af_3(bf_2+cf_3)+b^2f_1f_3],\\
&B_1 = -af_2\alpha-\beta[-af_2(bf_2+cf_3)-bf_1(af_1+cf_3)+c^2f_1f_2],\\
&B_2 = \alpha(af_1+cf_3)-\beta[a^2f_2^2+(af_1+cf_3)^2+c^2f_2^2],\\
&B_3 = -\alpha cf_2-\beta[a^2f_2f_3-bf_3(af_1+cf_3)-cf_2(af_1+bf_2)],\\
&C_1 = -\alpha af_3-\beta[-af_3(bf_2+cf_3)+b^2f_1f_3-cf_1(af_1+bf_2)],\\
&C_2 = -\alpha bf_3-\beta[a^2f_2f_3-bf_3(af_1+cf_3)-cf_2(af_1+bf_2)],\\
&C_3 = (af_1+bf_2)\alpha-\beta[a^2f_3^2+b^2f_3^2+(af_1+bf_2)^2],\\
&\alpha = \rho(1+uf_1+vf_2+wf_3)^2, \quad \beta = \mu^{-1}(af_1+bf_2+cf_3).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Определитель системы (1.9) равен нулю, следовательно, система имеет нетривиальные решения.

Рассматривая два первых уравнения этой системы для различных α и β, получим соответствующие системы ОДУ.

Утверждение 1. *Если $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ и заданы произвольные функции $f_j(\rho)$ $(j = 1, 2, 3)$, то система* (1.5) *сводится к системе* ОДУ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u = u(\rho)$, $v = v(\rho)$, $w = w(\rho)$. К двум первым уравнениям системы (1.9) присоединяем уравнение $L_1 = 0$. Получаем систему уравнений для определения u', v', w'

$$A_1u' + A_2v' + A_3w' = 0, \quad B_1u' + B_2v' + B_3w' = 0, \quad f_1u' + f_2v' + f_3w' = -\sqrt{\alpha}/(\rho\sqrt{\rho}).$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по $\psi = \rho$.

Считаем, что функции $f_j(\rho)$, $(j = 1, 2, 3)$ заданы. В результате, присоединяя к (1.7), (1.8) выражения u', v', w', для $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ приходим к системе ОДУ

$$\begin{aligned}
&p' = -\frac{\rho(1+uf_1+vf_2+wf_3)}{af_1+bf_2+cf_3}(au'+bv'+cw'), \quad a' = \frac{(bf_2+cf_3)u' - af_2v' - af_3w'}{1+uf_1+vf_2+wf_3},\\
&b' = \frac{-bf_1u' + v'(af_1+cf_3) - bf_3w'}{1+uf_1+vf_2+wf_3}, \quad c' = \frac{-cf_1u' - cf_2v' + w'(af_1+bf_2)}{1+uf_1+vf_2+wf_3},\\
&u' = \frac{(A_3B_2 - A_2B_3)\sqrt{\alpha}}{D_0\rho\sqrt{\rho}}, \quad v' = \frac{(A_1B_3 - B_1A_3)\sqrt{\alpha}}{D_0\rho\sqrt{\rho}}, \quad w' = \frac{(A_2B_1 - B_2A_1)\sqrt{\alpha}}{D_0\rho\sqrt{\rho}},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где $\quad D_0 = f_1(A_2B_3 - B_3A_2) + f_2(A_3B_1 - B_3A_1) + f_3(A_1B_2 - B_1A_2)$.

Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Если $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ и функции $f_j = f_j(\psi)$ $(j = 1, 2, 3)$ удовлетворяют условию $\sum T_jf_j = 0$, $T_j = \mathrm{const}$, то система* (1.5) *сводится к системе* ОДУ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\beta = \mu^{-1}(af_1+bf_2+cf_3) = 0$, $\alpha = \rho(1+uf_1+vf_2+wf_3)^2 \neq 0$, то из системы (1.9) имеем $au'+bv'+cw' = 0$. Продифференцировав выражение $\mu^{-1}(af_1+bf_2+cf_3) = 0$ по ψ и учитывая зависимость $L_2 = 0$, получаем, что $af_1'+bf_2'+cf_3' = 0$. Таким образом, для определения a, b, c приходим к системе трех линейных уравнений:

$$au' + bv' + cw' = 0, \quad af_1 + bf_2 + cf_3 = 0, \quad af_1' + bf_2' + cf_3' = 0.$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если соответствующий определитель равен нулю:

$$u'(f_2f_3' - f_3f_2') + v'(f_3f_1' - f_1f_3') + w'(f_1f_2' - f_2f_1') = 0.$$

Например, определитель равен нулю, если $u' = f_1$, $v' = f_2$, $w' = f_3$. Кроме того при $\beta = 0$ из уравнений $L_k = 0$, $(k = 3, 4, 5)$ имеем $a = T_1\rho$, $b = T_2\rho$, $C = T_3\rho$, где $T_i = \mathrm{const}$, $(i = 2, 3)$. Тогда систему (1.5) можно свести к виду

$$\begin{aligned}
&u' = f_1, \quad v' = f_2, \quad w' = f_3, \quad p' = -\sqrt{\rho\alpha}, \quad \rho' = -\frac{\rho f\sqrt{\rho}}{\sqrt{\alpha}}, \quad a' = -\frac{af\sqrt{\rho}}{\sqrt{\alpha}},\\
&b = a\frac{f_3f_1' - f_1f_3'}{f_2f_3' - f_3f_2'}, \quad c = a\frac{f_1f_2' - f_2f_1'}{f_2f_3' - f_3f_2'}, \quad f = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

если $\sum T_jf_j = 0$.

Утверждение доказано.

При заданных $f_1 = f_1(\psi)$, $f_2 = f_2(\psi)$, $f_3 = f_3(\psi)$ решение системы (1.11) легко выписывается в виде

$$u = \int f_1 d\psi + M, \quad v = \int f_2 d\psi + N, \quad w = \int f_3 d\psi + T, \quad \rho = \exp\left[M_1 - \int \frac{f d\psi}{1 + uf_1 + vf_2 + wf_3}\right],$$

$$p = N_1 - \int \rho(1 + uf_1 + vf_2 + wf_3)d\psi, \quad a = T_1\rho, \quad b = a\frac{f_3 f_1' - f_1 f_3'}{f_2 f_3' - f_3 f_2'}, \quad c = a\frac{f_1 f_2' - f_2 f_1'}{f_2 f_3' - f_3 f_2'}.$$

Здесь $M = \mathrm{const}$, $N = \mathrm{const}$, $T = \mathrm{const}$, $M_1 = \mathrm{const}$, $N_1 = \mathrm{const}$, $T_1 = \mathrm{const}$.

Утверждение 3. *Если $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ и функции $f_i = f_i(\psi)$ $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют зависимости $1 + u_0 f_1 + v_0 f_2 + w_0 f_3 = 0$, то система* (1.5) *сводится к системе* ОДУ*, имеющей решение $u = u_0 = \mathrm{const}$, $v = v_0 = \mathrm{const}$, $w = w_0 = \mathrm{const}$, $p = -0.5\mu^{-1}(a^2 + b^2 + c^2) + K$, $K = \mathrm{const}$, $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$, $c = \mathrm{const}$, $\rho = \rho(\psi)$— произвольная функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если

$$\alpha = \rho(1 + uf_1 + vf_2 + wf_3)^2 = 0, \quad \beta \neq 0,$$

то $1 + uf_1 + vf_2 + wf_3 = 0$. При таких предположениях имеем

$$\begin{aligned}
&L_1 := u'f_1 + v'f_2 + w'f_3 = 0,\\
&L_2 := a'f_1 + b'f_2 + c'f_3 = 0, \quad L_3 := -u'(af_1 + bf_2 + cf_3) = 0,\\
&L_4 := -v'(af_1 + bf_2 + cf_3) = 0, \quad L_5 := -w'(af_1 + bf_2 + cf_3) = 0,\\
&L_6 := p'f_1 - \mu^{-1}[a'(af_1 + bf_2 + cf_3) - f_1(aa' + bb' + cc')] = 0,\\
&L_7 := p'f_2 - \mu^{-1}[b'(af_1 + bf_2 + cf_3) - f_2(aa' + bb' + cc')] = 0,\\
&L_8 := p'f_3 - \mu^{-1}[c'(af_1 + bf_2 + cf_3) - f_3(aa' + bb' + cc')] = 0.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Отсюда при $\beta = (af_1 + bf_2 + cf_3) \neq 0$ имеем $u = u_0 = \mathrm{const}$, $v = v_0 = \mathrm{const}$, $w = w_0 = \mathrm{const}$, $p = -0.5\mu^{-1}(a^2+b^2+c^2)+K$, $K = \mathrm{const}$, $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$, $c = \mathrm{const}$, $\rho = \rho(\psi)$ — произвольная функция, если функции $f_i = f_i(\psi)$ $(i = 1, 2, 3)$ не произвольные, а удовлетворяют зависимости $1 + u_0 f_1 + v_0 f_2 + w_0 f_3 = 0$.

Утверждение доказано.

Следствие. *Если $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и $(f_3 f_2' - f_2 f_3') \neq 0$, то из системы* (1.5) *следует*

$$v = \frac{(1 + uf_1)f_3' - uf_1' f_3}{f_3 f_2' - f_2 f_3'}, \quad w = \frac{uf_2 f_1' - (1 + uf_1)f_2'}{f_3 f_2' - f_2 f_3'}, \quad b = a\frac{f_1 f_3' - f_3 f_1'}{f_3 f_2' - f_2 f_3'}, \quad c = a\frac{f_2 f_1' - f_1 f_2'}{f_3 f_2' - f_2 f_3'},$$

$\rho = \rho(\psi)$, $u = u(\psi)$, $a = a(\psi)$ — произвольные функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то из системы (1.12) (получена из (1.5)) имеем $u'f_1 + v'f_2 + w'f_3 = 0$, $a'f_1 + b'f_2 + c'f_3 = 0$, $p = -0.5\mu^{-1}(a^2 + b^2 + c^2) + K$. Тогда, выписав дифференциальные следствия выражений $1 + uf_1 + vf_2 + wf_3 = 0$ и $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ по ψ, получаем $uf_1' + vf_2' + wf_3' = 0$, $af_1' + bf_2' + cf_3' = 0$. Отсюда

$$v = \frac{(1 + uf_1)f_3' - uf_1' f_3}{f_3 f_2' - f_2 f_3'}, \quad w = \frac{uf_2 f_1' - (1 + uf_1)f_2'}{f_3 f_2' - f_2 f_3'}, \quad b = a\frac{f_1 f_3' - f_3 f_1'}{f_3 f_2' - f_2 f_3'}, \quad c = a\frac{f_2 f_1' - f_1 f_2'}{f_3 f_2' - f_2 f_3'},$$

$\rho = \rho(\psi)$, $u = u(\psi)$, $a = a(\psi)$ — произвольные функции.

Следствие доказано.

Таким образом, выше показано, что при разных α и β система (1.5) сводится к системе ОДУ. При сведении к системе ОДУ в одних случаях функции f_j $(j = 1, 2, 3)$ могут выбираться произвольно, а в других — на их выбор накладываются некоторые условия. Имеющийся произвол в выборе функций f_j $(j = 1, 2, 3)$ позволяет использовать его в приложениях.

2. Некоторые приложения

2.1. О движении потока ионизированного газа в заданном направлении

В предыдущем разделе в ряде случаев считалось, что функции $f_j(\psi)$ выбраны произвольно. Здесь покажем, что выбором функций $f_j(\psi)$ $(j = 1, 2, 3)$ можно обеспечить заданное направление движения потока.

Пусть задано направление движения потока ионизированного газа $u = u_0(\psi)$, $v = v_0(\psi)$, $w = w_0(\psi)$. Ищем условия, обеспечивающие такое направление движения потока, полагая, что $\alpha = 0$, $\beta = 0$:

$$1 + u_0 f_1 + v_0 f_2 + w_0 f_3 = 0, \quad a f_1 + b f_2 + c f_3 = 0. \tag{2.1}$$

При условиях (2.1) уравнения системы (1.5) обращаются в тождество, если $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$, $p' = 0$, $u_0' f_1 + v_0' f_2 + w_0' f_3 = 0$. Из второго соотношения (2.1) следует, что $a f_1' + b f_2' + c f_3' = 0$, тогда

$$b = a \frac{f_3' f_1 - f_1' f_3}{f_2' f_3 - f_3' f_2}, \quad c = a \frac{f_1' f_2 - f_2' f_1}{f_3' f_2 - f_2' f_3}. \tag{2.2}$$

Из уравнений $u_0 f_1 + v_0 f_2 + w_0 f_3 = -1$, $u_0' f_1 + v_0' f_2 + w_0' f_3 = 0$ находим

$$f_1 = \frac{f_3(v_0 w_0' - w_0 v_0') - v_0'}{u_0 v_0' - v_0 u_0'}, \quad f_2 = \frac{u_0' - f_3(w_0 u_0' - u_0 w_0')}{u_0 v_0' - v_0 u_0'}. \tag{2.3}$$

Подставив (2.2), (2.3) в выражение $a f_1 + b f_2 + c f_3 = 0$, получаем уравнение для определения f_3, а затем из (2.3) определим f_1 и f_2.

2.2. О движении потока ионизированного газа вблизи неподвижного тела

Перейдем в системе (0.1)–(0.4) к новым независимым переменным $z - \varphi(x, y) = \xi$, $x = \eta$, $y = \zeta$, $t = \tau$ и положим, что $\xi = 0$ — поверхность обтекаемого тела, на которой выполняются условия прилипания: $u(\tau, \eta, \zeta, \varphi(\eta, \zeta)) = 0$, $v(\tau, \eta, \zeta, \varphi(\eta, \zeta)) = 0$, $w(\tau, \eta, \zeta, \varphi(\eta, \zeta)) = 0$. Запишем полученную при этих условиях систему, исключая уравнение неразрывности, в матричной форме $-\mathbf{AU} = \mathbf{G}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b\varphi_y - c & -a\varphi_y & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b\varphi_x & a\varphi_x - c & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c\varphi_x & -c\varphi_y & a\varphi_x + b\varphi_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c - b\varphi_y & b\varphi_x & c\varphi_x & -\varphi_x \\ 0 & 0 & 0 & a\varphi_y & c - a\varphi_x & c\varphi_y & -\varphi_y \\ 0 & 0 & 0 & -a & -b & -(a\varphi_x + b\varphi_y) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_x & \varphi_y & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_\xi \\ v_\xi \\ w_\xi \\ a_\xi \\ b_\xi \\ c_\xi \\ p_\xi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a_\tau - (u_\zeta b - v_\zeta a) \\ b_\tau + (u_\eta b - v_\eta a) \\ c_\tau - (w_\eta a - u_\eta c) + (v_\zeta c - w_\zeta b) \\ \rho u_\tau + p_\eta + \mu^{-1}[c c_\eta + b(b_\eta - a_\zeta)] \\ \rho v_\tau + p_\zeta + \mu^{-1}[c c_\zeta - a(b_\eta - a_\zeta)] \\ \rho w_\tau - \mu^{-1}(a c_\eta + b c_\zeta) \\ -(a_\eta + b_\zeta) \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $\mathbf{A}$ равен нулю, поэтому система $-\mathbf{AU} = \mathbf{G}$ имеет решение только тогда, когда $\mathbf{NG} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{N}$ — левый нуль-вектор матрицы $\mathbf{A}$ (см. [11]). Заметим, что $\mathbf{N} = \mathbf{N}(a, b, c, \varphi_x, \varphi_y)$, следовательно, $\mathbf{NG} = \mathbf{0}$ можно рассматривать как уравнение первого порядка для определения функции $z = \varphi(x, y)$.

Уравнение неразрывности в новых переменных имеет вид

$$\rho_\tau + \rho(u_\eta + v_\zeta - u_\xi\varphi_x - v_\xi\varphi_y + w_\xi) = 0$$

и является вторым уравнением первого порядка, которому должна удовлетворять функция $z = \varphi(x, y)$.

Если эта система двух уравнений первого порядка совместна (выраженные из этой системы производные φ_x и φ_y имеют равные смешанные производные), что будет иметь место при выполнении определенных зависимостей между функциями p, u, v, w, a, b, c (условия согласования между давлением, скоростями и напряженностью магнитного поля на рассматриваемой поверхности тела), то поток ионизированного газа будет двигаться вдоль тела, в противном случае такое течение разрушается (см. например, [13]).

2.3. Об особенностях движения потока ионизированного газа вблизи плоскости

Рассмотрим подробнее движение ионизированного газа в окрестности каждой фиксированной точки на обтекаемом теле. Зададим касательную плоскость в точке

$$\xi = z + l_1 x + l_2 y = 0,$$

полагая, что $\{1, l_1, l_2\}$ — вектор нормали к телу в точке касания и поверхность уровня $\psi(x, y, z, t) = z + l_1 x + l_2 y + l_3 t$, $l_j = \text{const}$ $(j = 1, 2, 3)$. В точке касания выполняются условия прилипания $u = v = w = 0$. В этом случае система (1.5) имеет вид

$$\begin{aligned}
&L_1 := \rho' l_3 + \rho(u' l_1 + v' l_2 + w') = 0, \quad L_2 := a' l_1 + b' l_2 + c' = 0,\\
&L_3 := a' l_3 - u'(b l_2 + c) + v' a l_2 + w' a = 0, \qquad L_4 := b' l_3 + u' b l_1 - v'(a l_1 + c) + w' b = 0,\\
&L_5 := c' l_3 + u' c l_1 + v' c l_2 - w'(a l_1 + b l_2) = 0,\\
&L_6 := u' \rho l_3 + p' l_1 - \mu^{-1}[a'(b l_2 + c) - b' b l_1 - c' c l_1] = 0,\\
&L_7 := v' \rho l_3 + p' l_2 - \mu^{-1}[-a' a l_2 + b'(a l_1 + c) - c' c l_2] = 0,\\
&L_8 := w' \rho l_3 + p' - \mu^{-1}[-a' a - b' b + c'(a l_1 + b l_2)] = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Из уравнений $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$ системы (2.4) следует, что $a l_1 + b l_2 + c = C_1$, $l_3 \ln \rho = \text{const}$. Положим, что $\rho l_3 = C_2$, $C_k = \text{const}$ $(k = 1, 2)$. Тогда уравнения $L_j = 0$ $(j = 6, 7, 8)$ можно представить в виде

$$L_6 = C_2 u' + p' l_1 - \mu^{-1}(C_1 a' - 0.5\, l_1 D'), \quad L_7 = C_2 v' + p' l_2 - \mu^{-1}(C_1 b' - 0.5\, l_2 D'),$$

$$L_8 = C_2 w' + p_\prime - \mu^{-1}(C_1 c' - 0.5\, D'), \quad D = (a^2 + b^2 + c^2).$$

Отсюда после интегрирования получаем, что на плоскости $\xi = 0$

$$p l_1 - \mu^{-1}(C_1 a - 0.5 l_1 D) = C_3, \quad p l_2 - \mu^{-1}(C_1 b - 0.5 l_2 D) = C_4,$$

$$p - \mu^{-1}(C_1 c - 0.5 D) = C_5, \quad C_n = \text{const} \quad (n = 3, 4, 5),$$

и, следовательно, если $C_1 \neq 0$, то на плоскости $\xi = 0$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{C_1^2 l_1 + \mu l_1 l_2 (C_4 - C_5 l_2) - \mu(1 + l_2^2)(C_3 - C_5 l_1)}{C_1 l} = \text{const},\\
b &= \frac{C_1^2 l_2 + \mu l_1 l_2 (C_3 - C_5 l_1) - \mu(1 + l_1^2)(C_4 - C_5 l_2)}{C_1 l} = \text{const},\\
c &= \frac{C_1^2 + \mu l_1 (C_3 - C_5 l_1) - \mu l_2 (C_4 - C_5 l_2)}{C_1 l} = \text{const}, \quad l = (1 + l_1^2 + l_2^2).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Возвращаясь к системе (2.4), исследуем поведение выводящих производных вблизи плоскости $\xi = 0$.

Выразим u', v' w' из уравненийй $L_i = 0$ $(i = 6, 7, 8)$ и подставим в $L_j = 0$ $(j = 3, 4, 5)$. Учитывая, что $c' = -(a'l_1 + b'l_2)$, для определения a', b' придем к системе

$$\begin{aligned} &a'\Big(l_3 - \frac{2C_1 - q(C_1l_1 - al)}{2\mu C_2}\Big) + b'\frac{s(C_1l_1 - al)}{2\mu C_2} = p_0(al - C_1l_1),\\ &a'\frac{q(C_1l_2 - bl)}{2\mu C_2} + b'\Big(l_3 - \frac{2C_1 - s(C_1l_2 - bl)}{2\mu C_2}\Big) = p_0(bl - C_1l_2), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$q = 2(a + al_1 - C_1l_1 + bl_1l_2), \quad s = 2(b + bl_2 - C_1l_2 + al_1l_2), \quad p_0 = p'.$$

Выпишем определитель при выводящих производных в системе (2.6):

$$\Delta = \Big(l_3 - \frac{C_1}{\mu C_2}\Big)M_d, \quad M_d = l_3 - \frac{C_1}{\mu C_2} + \frac{C_1(sl_2 + ql_1) - (aq + bs)l}{2\mu C_2}.$$

Если $\Delta \neq 0$, то

$$\begin{aligned} &a' = \frac{p_0(al - C_1l_1)}{M_d}, \quad b' = \frac{p_0(bl - C_1l_2)}{M_d}, \quad c' = -(a'l_1 + b'l_2),\\ &u' = \frac{1}{\mu C_2}\big[(C_1a' - 0.5\,l_1D') - p_0l_1\big], \quad v' = \frac{1}{\mu C_2}\big[(C_1b' - 0.5\,l_2D') - p_0l_2\big],\\ &w' = \frac{1}{\mu C_2}\big[(C_1c' - 0.5\,D') - p_0\big]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Утверждение 4. *Если $M_d = 0$ $(\Delta = 0)$ и $C_3 \neq C_5l_1$, $C_4 \neq C_5l_2$, то*

$$\lim_{M\to\infty} a' = \infty, \qquad \lim_{M\to\infty} b' = \infty.$$

Если $C_3 = C_5l_1$ и $C_4 = C_5l_2$, то направление вектора магнитной напряженности совпадает с направлением нормали к плоскости $\xi = 0$:

$$a = C_1l_1/l, \quad b = C_1l_2/l, \quad c = C_1/l$$

и либо $a' = 0$, $b' = 0$, либо $l_3 - C_1/(\mu C_2) = 0$ $(\Delta = 0)$.

Это утверждение является следствием (2.5), (2.7).

Утверждение 5. *Если плотность вблизи плоскости $\xi = 0$ совпадает с плотностью на плоскости, то вектор скорости ионизированного газа около плоскости параллелен плоскости $\xi = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если плотность вблизи плоскости $\xi = 0$ совпадает с плотностью на плоскости, то $\rho' = 0$ и, как следует из уравнения неразрывности $L_1 = 0$, $u'l_1 + v'l_2 + w' = 0$. Но на плоскости $\xi = 0$ в любой момент времени $u = v = w = 0$, следовательно,

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{u(\xi + l_3\tau) - u(l_3\tau)}{\xi} = \lim_{\xi\to 0}\frac{u(\xi + l_3\tau)}{\xi}, \quad \lim_{\xi\to 0}\frac{v(\xi + l_3\tau) - v(l_3\tau)}{\xi} = \lim_{\xi\to 0}\frac{v(\xi + l_3\tau)}{\xi},$$

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{w(\xi + l_3\tau) - w(l_3\tau)}{\xi} = \lim_{\xi\to 0}\frac{w(\xi + l_3\tau)}{\xi},$$

тогда $u(\xi + l_3\tau)l_1 + v(\xi + l_3\tau)l_2 + w(\xi + l_3\tau) = o(\xi)$, что и требовалось доказать. □

Утверждение 6. *Если на плоскости $\xi = 0$ не выполняется условие $D' = -2p_0$, то скорость ионизированного газа не параллельна плоскости $\xi = 0$. Если $D' = -2p_0$, то вектор скорости течения ионизированного газа параллелен плоскости $\xi = 0$.*

Доказательство. Из соотношений (2.7) получаем, что

$$u'l_1 + v'l_2 + w' = -l(\mu C_2)^{-1}(0.5\,D' + p_0)$$

и если $D' \neq -2p_0$, то $u'l_1+v'l_2+w' \neq 0$ — скорость ионизированного газа не направлена параллельно плоскости $\xi = 0$, а имеет другое направление. Таким образом, условием существования течения ионизированного газа со скоростью, параллельной плоскости $\xi = 0$, является выполнение соотношения $D' = -2p_0$ (условие согласования).

Утверждение доказано.

Рассмотрим случай $C_1 = 0$.

В этом случае $c+bl_2+al_1 = 0$, следовательно, вектор магнитной напряженности параллелен плоскости $\xi = 0$.

Утверждение 7. *Если плотность около плоскости $\xi = 0$ совпадает с плотностью на плоскости, а вектор магнитной напряженности параллелен плоскости $\xi = 0$ $(al_1 + bl_2 + c = 0)$, то для того чтобы направление вектора скорости, задаваемое уравнениями $L_i = 0$ $(i = 6, 7, 8)$, совпадало с направлением вектора скорости, задаваемого уравнением $L_1 = 0$, необходимо совпадение давления около плоскости с давлением на плоскости $\xi = 0$ (условие согласования).*

Доказательство. Если около плоскости $\xi = 0$ плотность совпадает с плотностью на плоскости и $al_1 + bl_2 + c = 0$, то $\rho' = 0$, $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$ и $u'l_1 + v'l_2 + w' = 0$ (см. (2.4), $L_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$). Но в системе (2.4) $L_k = 0$ $(k = 5, 6, 7)$, и отсюда $l_1L_6 + l_2L_7 + L_8 = 0$, следовательно, $u'l_1+v'l_2+w' = -l(\mu C_2)^{-1}p_0$. Тогда $u'l_1+v'l_2+w' = 0$ при $p' = 0$, т. е. давление на плоскости $\xi = 0$ совпадает с давлением около плоскости.

Утверждение доказано.

Заключение

Очень актуальной задачей является управление потоком ионизированного газа (например, в ускорителях [6; 7]). Исследование этого вопроса с использованием геометрического метода показало, что, по крайней мере, для идеального ионизированного газа существуют решения уравнений динамики плазмы, обеспечивающие движение потока в заданном направлении.

Рассмотрение вопроса в последней части работы показывает, что отсутствие определенных условий согласования в каждой точке обтекаемого тела приводит к возникновению разнонаправленного движения ионизированного газа $(u(\xi + l_3\tau)l_1 + v(\xi + l_3\tau)l_2 + w(\xi + l_3\tau) = o(\xi)$, и $u(\xi + l_3\tau)l_1 + v(\xi + l_3\tau)l_2 + w(\xi + l_3\tau) \neq o(\xi))$ при разном направлении вектора магнитного поля $(c + bl_2 + al_1 = 0$ или $c + bl_2 + al_1 = C_1 \neq 0)$. Таким образом, как и в случае течения несжимаемой жидкости [13], в случае движения ионизированного газа причиной неустойчивостей может являться невыполнение определенных условий согласования между давлением, плотностью, магнитным полем и скоростью движения среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tonks L., Langmuir I.** Oscillations in ionized gases // Phys. Rev. 1929. Vol. 33, no. 2. P. 195–210. doi: 10.1103/PhysRev.33.195 .
2. **Галеев А.А., Судан Р.** Основы физики плазмы: в 2 т. М.: Энергоатомиздат. Т. 1, 1983, 640 с.; Т. 2, 1984, 631 с.
3. Энциклопедия низкотемпературной плазмы / ред. В.Е. Фортов. Т. I–IX. М.: Наука, 2000–2008.
4. **Калиткин Н.Н., Костомаров Д.П.** Математическое моделирование плазмы // Мат. моделирование. 2006. Т. 18, № 11. С. 67–94.
5. **Брушлинский К.В.** Численные модели течений ионизующегося газа // Энциклопедия низкотемпературной плазмы / ред. В.Е. Фортов. Сер. Б. Т. VII-1, ч. 2. М.: ЯНУС-К, 2008. С. 84–90.

6. Virtual charge state separator as an advanced tool coupling measurements and simulations / S. Yaramyshev [et al.] // Phys. Rev. ST Accel. Beams 18, 050103, 2015. doi: 10.1103/PhysRevSTAB.18.050103 .
7. **Перепелкин Е.Е., Репникова Н.П., Иноземцева Н.Г.** Точное решение задачи пространственного заряда для движения сферически симметричного пучка в однородном электрическом поле // Мат. заметки. 2015. Т. 98, вып. 3. С. 386–392.
8. **Берендеев Е.А.** Численное моделирование развития турбулентности при взаимодействии электронного пучка с плазмой / Е. А. Берендеев, В. А. Вшивков, А. А. Ефимова, Е. А. Месяц // Вычисл. методы и программирование. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 139–145.
9. **Михайловский А. Б.** Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1: Неустойчивости однородной плазмы. М., Атомиздат, 1975; Т. 2: Неустойчивости неоднородной плазмы. М.: Атомиздат, 1977.
10. A periodically active pulsar giving insight into magnetospheric physics / M. Kramer, A. G. Lyne, J. T. O'Brien, C. A. Jordan, D. R. Lorimer // Science. 2006. Vol. 312, no. 5773. P. 549–551. doi: 10.1126/science.1124060 .
11. **Courant R., Hilbert D.** Methods of mathematical physics. Vol. 2. Partial differential equations. N Y: Interscience, 1962. 830 p. ISBN: 9780470179857 .
12. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** О решении некоторых уравнений нелинейной акустики // Акустический журнал. 2015. Т. 61, № 5. С. 576–582.
13. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Об аналогиях в математическом описании явлений конической рефракции и турбулентности на примере течения вязкой несжимаемой жидкости // Тез. докл. Междунар. конф. "XIII Забабахинские научные чтения" (20–26 марта 2017, г. Снежинск). 2017. С. 46–47.

Рубина Людмила Ильинична
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург,
e-mail: rli@imm.uran.ru

Поступила 28.04.2018

Ульянов Олег Николаевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
ученый секретарь института
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: secretary@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Tonks L., Langmuir I. Oscillations in ionized gases. *Phys. Rev.*, 1929, vol. 33, no. 2, pp. 195–210. doi: 10.1103/PhysRev.33.195 .
2. Galeev A.A. Sudan R.N., *Basic plasma physics.* Amsterdam; N Y; Oxford: North-Holland Publ., 1983, vol. 1, 751 p. ISBN: 044486427X; 1985, vol. 2, 850 p. ISBN 0-444-86645-0 .
3. Fortov V.E. (ed.). *Entsiklopediya nizkotemperaturnoi plazmy, T. I–IX.* [Encyclopedia of low-temperature plasma, vol. I-IX]. Moscow, Nauka Publ., 2000–2008.
4. Kalitkin N.N., Kostomarov D.P. Mathematical models of plasma physics (review). *Mat. Model.*, 2006, vol. 18, no. 11, pp. 67–94 (in Russian).
5. Brushlinskii K.V. Numerical models of self-ionizing gas flows. In: *Encyclopedia of Low-Temperature Plasma*, V.E. Fortov (ed.), Moscow: YaNUS-K Publ., 2008, Ser. B (in Russian).
6. Yaramyshev S. et al. Virtual charge state separator as an advanced tool coupling measurements and simulations. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 2015, vol. 18, no. 5, 050103. doi: 10.1103/PhysRevSTAB.18.050103 .
7. Perepelkin E.E., Repnikova N.P., Inozemtseva N.G. An exact solution of the space charge problem for the motion of a spherically symmetric beam in a homogeneous electric field. *Math. Notes*, 2015, vol. 98, no. 3-4, pp. 448–453. doi: 10.1134/S0001434615090102 .

8. Berendeev E.A., Vshivkov V.A., Efimova A.A., Mesyats E.A. Numerical simulation of the turbulence development at interaction of an electron beam with plasma. *Vychisl. Metody Programm.*, 2015, vol. 16, no. 1, pp. 139–145 (in Russian).
9. Mikhailovskii A.B. *Theory of plasma instabilities.* Vol. 1: *Instabilities of a homogeneous plasma.* N Y: Springer, 1974, 308 p. ISBN: 978-0-3061-7181-9 ; Vol. 2: *Instabilities of an inhomogeneous plasma.* N Y: Springer, 1974, 314 p. ISBN: 978-1-4899-4787-1 . Original Russian text (2nd rev. and enl. ed.) published in Mikhailovskii A.B. *Teoriya plazmennykh neustoichivostei. T.* 1. *Neustoichivosti odnorodnoi plazmy.* Moscow: Atomizdat Publ., 1975; *T.* 2. *Neustoichivosti neodnorodnoi plazmy.* Moscow: Atomizdat Publ., 1977.
10. Kramer M., Lyne A.G., O'Brien J.T., Jordan C.A., Lorimer D.R. A Periodically active pulsar giving insight into magnetospheric physics. *Science*, 2006, vol. 312, no. 5773, pp. 549–551. doi: 10.1126/science.1124060 .
11. Courant R., Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Vol. 2. Partial differential equations*, N Y: Interscience, 1962, 830 p. ISBN: 9780470179857 . Translated to Russian under the title *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi.* Moscow, Mir Publ., 1964, 830 p.
12. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On solving certain nonlinear acoustics problems. *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, no. 5, pp. 527–533. doi: 10.1134/S1063771015050152 .
13. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On analogies in the mathematical description of conical refraction and turbulence phenomena as an example of viscous flow of an incompressible fluid. *XIII Zababakhin Scientific Talks*, Abstr. Int. Conf. (March 20-24), 2017, Snezhinsk. ISBN: 978-5-902278-83-2 , pp. 46–47.

The paper was received by the Editorial Office on April 28, 2018.

Ljudmila Il'inichna Rubina, Cand. Sci (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990, Russia, e-mail: rli@imm.uran.ru .

Oleg Nikolaevich Ul'yanov, Cand. Sci (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990, Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: secretary@imm.uran.ru .