УДК 519.17

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ ШИЛЛА С $b_2 = sc_2$[1]

И. Н. Белоусов

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение, равное $a = a_3$. Граф Шилла имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. Дж. Кулен и Ж. Пак показали, что для заданного числа b существует только конечное число графов Шилла. Там же они нашли всевозможные допустимые массивы пересечений графов Шилла для $b \in \{2, 3\}$. Ранее автором совместно с А. А. Махневым изучены графы Шилла с $b_2 = c_2$. В данной работе исследуются графы Шилла с $b_2 = sc_2$; здесь s — целое число, большее 1. Для графов Шилла с указанным условием и вторым неглавным собственным значением -1 найдены пять бесконечных серий допустимых массивов пересечений. Показано, что в случае графов Шилла без треугольников с условием $b_2 = sc_2$ и $b < 170$ возможны лишь 6 допустимых массивов пересечений. В случае Q-полиномиального графа Шилла с условием $b_2 = sc_2$ найдены допустимые массивы пересечений в случаях $b = 4$ и $b = 5$. На основании этого результата удалось получить список допустимых массивов пересечений графов Шилла для $b \in \{4, 5\}$ в общем случае.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

I. N. Belousov. Shilla distance-regular graphs with $b_2 = sc_2$.

A Shilla graph is a distance-regular graph Γ of diameter 3 whose second eigenvalue is $a = a_3$. A Shilla graph has intersection array $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$. J. Koolen and J. Park showed that, for a given number b, there exist only finitely many Shilla graphs. They also found all possible admissible intersection arrays of Shilla graphs for $b \in \{2, 3\}$. Earlier the author together with A. A. Makhnev studied Shilla graphs with $b_2 = c_2$. In the present paper, Shilla graphs with $b_2 = sc_2$, where s is an integer greater than 1, are studied. For Shilla graphs satisfying this condition and such that their second nonprincipal eigenvalue is -1, five infinite series of admissible intersection arrays are found. It is shown that, in the case of Shilla graphs without triangles in which $b_2 = sc_2$ and $b < 170$, only six admissible intersection arrays are possible. For a Q-polynomial Shilla graph with $b_2 = sc_2$, admissible intersection arrays are found in the cases $b = 4$ and $b = 5$, and this result is used to obtain a list of admissible intersection arrays of Shilla graphs for $b \in \{4, 5\}$ in the general case.

Keywords: distance-regular graph, graph automorphism.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-16-26

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i = b_i(u, w)$ и $c_i = c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i для любого $i = 0, 1, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$, $k_i = |\Gamma_i(u)|$ и $k = k_1$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u [1]).

Пусть M — алгебра Бозе — Меснера дистанционно регулярного графа Γ диаметра d, порожденная матрицей смежности A (см, например [1, § 2.2]). Алгебра M имеет базис, состоящий из примитивных идемпотентов $\left\{E_0 = \dfrac{1}{v}J, E_1, \dots, E_d\right\}$, где $v = |\Gamma|$ и E_i — ортогональная проекция на собственное подпространство, отвечающее собственному значению θ_i. Далее,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061-П .

$E_i \circ E_j = \dfrac{1}{n}\sum_{l=0}^{d} q_{ij}^k E_k$, где $\circ$ — покомпонентное произведением. Числа $q_{ij}^k (0 \le i,j,k \le d)$ неотрицательны [1, теорема 2.3.2] и называются *параметрами Крейна.* Граф Γ называется *Q-полиномиальным,* если для некоторого упорядочения примитивных идемпотентов $E_0 = \dfrac{1}{v}J, E_1, \ldots, E_d$ числа $q_{1j}^k = 0$ при $|j-k| > 1$. Скажем, что Γ является Q-полиномиальным относительно θ, если E_1 — ортогональная проекция на собственное подпространство, отвечающее θ.

Второе собственное значение θ_1 дистанционно регулярного графа диаметра 3 не меньше $\min\{a_3, (a_1 + \sqrt{4k + a_1^2})/2\}$. По [2, теорема 7] из того, что $\theta_1 = a_3$ следует равенство $a_3 = (a_1 + \sqrt{4k + a_1^2})/2$. *Графом Шилла* называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением равным a_3. Граф Шилла имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$, где $a = a_3$ и $b = b_0/a$.

Ранее изучались графы Шилла с $b_2 = c_2$ [3; 4]. В данной работе изучаются графы Шилла с $b_2 = sc_2$, s – целое число, большее 1.

В теореме 1 доказано, что в графе Шилла с $\theta_2 = -1$ и псевдогеометрическим графом Γ_3 имеем $b_2 = sc_2$. Найдены также новые бесконечные серии допустимых массивов пересечений графов Шилла.

Теорема 1. *Пусть Γ является графом Шилла с $\theta_2 = -1$. Тогда $b_2 = a+1$ и $\theta_3 = -b - c_2$. Если Γ_3 является псевдогеометрическим графом, то выполняются следующие утверждения*:

(1) *$b_2 = sc_2$, Γ имеет массив пересечений*

$$\{b(sc_2-1), sc_2(b-1), sc_2; 1, c_2, (sc_2-1)(b-1)\},$$

кратности собственных значений равны

$$(bs+1)(c_2s-1)bc_2/(b+c_2-1), \quad (bc_2s-b+1)(bs+1)b/(c_2s+b+c_2-1),$$

$$(bc_2s-b+1)(c_2s-1)(b-1)bs/((c_2s+b+c_2-1)(b+c_2-1));$$

в случае $b = (s-1)c_2$ имеем $s = 2c_2$ и массив пересечений

$$\{(2c_2-1)c_2(2c_2^2-1), 2c_2^2((2c_2-1)c_2-1), 2c_2^2; 1, c_2, (2c_2^2-1)((2c_2-1)c_2-1)\}$$

является допустимым;

(2) *если $c_2 = 1$, то Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $pG_s(bs, s-1)$, $s - b$ делит $(b,s)(s-1, b-1)$ и возникают следующие бесконечные серии допустимых массивов пересечений*:

(*i*) *в случае $s = b^2$ имеем массив $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$*;

(*ii*) *в случае $s = b+2$ имеем массив $\{b(b+1), (b+2)(b-1), b+2; 1, 1, b^2-1\}$*;

(*iii*) *в случае $s = 2b-1$, $b \equiv \pm 1 \pmod 3$ имеем массив*

$$\{2b(b-1), (2b-1)(b-1), 2b-1; 1, 1, 2(b-1)^2\};$$

(3) *если $c_2 = (b-1)s$, $b = s+1$, то граф Γ имеет допустимый массив пересечений*

$$\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}$$

и является Q-полиномиальным, а граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $pG_s(s^2+s, s^3-1)$ (в случае $s=2$ граф с массивом пересечений $\{21, 16, 8; 1, 4, 14\}$ не существует по [5]).

Следующий результат посвящен графам Шилла без треугольников.

Предложение. *Пусть Γ — граф Шилла без треугольников с $b_2 = sc_2$. Тогда*

(1) $$\theta_{2,3} = (-c_2s - c_2 \pm \sqrt{c_2^2s^2 + 4b^2 + c_2^2 - 2(2bc_2 - c_2^2)s - 4c_2})/2.$$

(2) *Если* $b < 170$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{4,3,3;1,1,2\}$, $\{25,24,9;1,1,20\}$, $\{25,24,3;1,3,20\}$, $\{49,48,8;1,1,42\}$, $\{441,440,9;1,9,420\}$, $\{841,840,63;1,3,812\}$.

Заметим, что в [3, теорема 1, п. (2)] отсутствует массив $\{441,440,9;1,9,420\}$. Авторы проверили графы с числом вершин не большим 20000. Для указанного же массива число вершин равно 22464.

По [2, следствие 17] Γ является графом Шилла, Q-полиномиальным относительно θ_1, тогда и только тогда, когда наименьшее собственное значение θ_3 равно $-b(bb_2+c_2)/(b_2+c_2)$. Если $b_2 = sc_2$, то $\theta_3 = -b(bs+1)/(s+1)$, $s+1$ делит $b(b-1)$ и $-b^2+1 \le \theta_3 \le -b^2(b+3)/(3b+1)$. Если $b \le 3$, то по [2] граф Γ имеет массив пересечений $\{6,4,2;1,2,3\}$ (граф Хэмминга $H(3,3)$), $\{18,10,4;1,4,9\}$ (граф Джонсона $J(9,3)$), $\{42,30,12;1,6,28\}$ или $\{105,72,24;1,12,70\}$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *является графом Шилла с* $b_2 = sc_2$, Q*-полиномиальным относительно* θ_1. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $$(s+1)^2c_2/b = sb + (s+1)as/(bs+1), \quad s+1 \;\text{ делит }\; b(b-1),$$

$$s \;\text{ делит }\; c_2/(b,s) \;\text{ и }\; bs+1 \;\text{ делит }\; a(s+1,b-1);$$

(2) *если* $s+1 = b(b-1)$, *то* $b=2$, *а если* $s+1 = b(b-1)/2$, *то* $b=3$;

(3) *если* $b=4$, *то* $s=3$ *и* Γ *имеет массив пересечений*

$$\{104,81,27;1,9,78\} \quad \text{или} \quad \{156,120,36;1,12,117\};$$

(4) *если* $b=5$, *то* $s=4$ *и* Γ *имеет массив пересечений*

$$\{105t, 4(21t+1), 16(t+1); 1, 4(t+1), 84t\} \quad \text{и} \quad t \in \{3,4,19\}.$$

С помощью теоремы 2 найдены допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b \in \{4,5\}$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *является графом Шилла с* $b=4$. *Тогда* Γ *имеет массив пересечений из табл.* 1.

Следствие 2. *Пусть* Γ *является графом Шилла с* $b=5$. *Тогда* Γ *имеет массив пересечений из табл.* 2.

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *является графом Шилла с* $\theta_2 = -1$ *и* Γ_3 *является псевдогеометрическим графом. Тогда* $b_2 = sc_2$, Γ *имеет массив пересечений*

$$\{b(sc_2-1), sc_2(b-1), sc_2; 1, c_2, (sc_2-1)(b-1)\}, \tag{1.1}$$

и кратности собственных значений равны

$$\begin{gathered}(bs+1)(c_2s-1)bc_2/(b+c_2-1), \quad (bc_2s-b+1)(bs+1)b/(c_2s+b+c_2-1),\\ (bc_2s-b+1)(c_2s-1)(b-1)bs/((c_2s+b+c_2-1)(b+c_2-1))\end{gathered} \tag{1.2}$$

и $b+c_2-1$ *делит* $b(sc_2-1)((bs+1)c_2, (bc_2s-b+1)(b-1)s)$.

Т а б л и ц а 1

Допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b = 4$

$\{20, 18, 6; 1, 1, 15\}$	$\{20, 18, 6; 1, 3, 15\}$	$\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$
$\{28, 24, 12; 1, 1, 21\}$	$\{40, 33, 3; 1, 3, 30\}$	$\{44, 36, 12; 1, 3, 33\}$
$\{56, 45, 15; 1, 3, 42\}$	$\{60, 48, 16; 1, 1, 45\}$	$\{68, 54, 12; 1, 6, 51\}$
$\{80, 63, 12; 1, 12, 60\}$	$\{80, 63, 21; 1, 3, 60\}$	$\{84, 66, 20; 1, 4, 63\}$
$\{100, 78, 18; 1, 3, 75\}$	$\{104, 81, 27; 1, 9, 78\}$	$\{116, 90, 30; 1, 3, 87\}$
$\{116, 90, 30; 1, 6, 87\}$	$\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$	$\{140, 108, 24; 1, 9, 105\}$
$\{140, 108, 36; 1, 3, 105\}$	$\{152, 117, 39; 1, 9, 114\}$	$\{156, 120, 36; 1, 12, 117\}$
$\{164, 126, 40; 1, 4, 123\}$	$\{188, 144, 48; 1, 3, 141\}$	$\{196, 150, 48; 1, 4, 147\}$
$\{200, 153, 48; 1, 8, 150\}$	$\{204, 156, 48; 1, 12, 153\}$	$\{216, 165, 55; 1, 5, 162\}$
$\{220, 168, 48; 1, 3, 165\}$	$\{220, 168, 56; 1, 7, 165\}$	$\{224, 171, 57; 1, 3, 168\}$
$\{236, 180, 48; 1, 9, 177\}$	$\{260, 198, 66; 1, 9, 195\}$	$\{308, 234, 76; 1, 4, 231\}$
$\{308, 234, 78; 1, 3, 231\}$	$\{320, 243, 36; 1, 36, 240\}$	$\{356, 270, 90; 1, 9, 267\}$
$\{404, 306, 102; 1, 3, 303\}$	$\{420, 318, 104; 1, 4, 315\}$	$\{476, 360, 84; 1, 21, 357\}$
$\{476, 360, 120; 1, 3, 357\}$	$\{500, 378, 108; 1, 18, 375\}$	$\{572, 432, 144; 1, 9, 429\}$
$\{644, 486, 160; 1, 4, 483\}$	$\{680, 513, 168; 1, 8, 510\}$	$\{728, 549, 183; 1, 3, 546\}$
$\{764, 576, 192; 1, 9, 573\}$	$\{780, 588, 192; 1, 12, 585\}$	$\{804, 606, 202; 1, 2, 603\}$
$\{868, 654, 216; 1, 4, 651\}$	$\{980, 738, 246; 1, 3, 735\}$	

Т а б л и ц а 2

Допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b = 5$

$\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$	$\{25, 24, 9; 1, 1, 20\}$	$\{(30, 28, 2; 1, 2, 24\}$
$\{30, 28, 7; 1, 1, 24\}$	$\{30, 28, 9; 1, 3, 24\}$,	$\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$
$\{45, 40, 10; 1, 1, 36\}$	$\{45, 40, 13; 1, 1, 36\}$	$\{45, 40, 14; 1, 2, 36\}$
$\{45, 40, 15; 1, 3, 36\}$	$\{50, 44, 5; 1, 5, 40\}$	$\{55, 48, 9; 1, 3, 44\}$
$\{55, 48, 12; 1, 4, 44\}$	$\{55, 48, 12; 1, 6, 44\}$	$\{60, 52, 10; 1, 10, 48\}$
$\{65, 56, 5; 1, 5, 52\}$	$\{65, 56, 14; 1, 2, 52\}$	$\{75, 64, 8; 1, 8, 60\}$
$\{75, 64, 12; 1, 6, 60\}$	$\{90, 76, 14; 1, 2, 72\}$	$\{105, 88, 7; 1, 7, 84\}$
$\{105, 88, 22; 1, 2, 84\}$	$\{115, 96, 16; 1, 8, 92\}$	$\{120, 100, 5; 1, 5, 96\}$
$\{120, 100, 20; 1, 2, 96\}$	$\{120, 100, 25; 1, 1, 96\}$	$\{130, 108, 27; 1, 9, 104\}$
$\{130, 108, 36; 1, 2, 104\}$	$\{135, 112, 12; 1, 12, 108\}$	$\{135, 112, 20; 1, 8, 108\}$
$\{135, 112, 28; 1, 2, 108\}$	$\{135, 112, 28; 1, 4, 108\}$	$\{135, 112, 32; 1, 2, 108\}$
$\{135, 112, 35; 1, 5, 108\}$	$\{160, 132, 33; 1, 3, 128\}$	$\{165, 136, 30; 1, 15, 132\}$
$\{175, 144, 24; 1, 6, 140\}$	$\{175, 144, 36; 1, 4, 140\}$	$\{180, 148, 35; 1, 5, 144\}$
$\{195, 160, 40; 1, 8, 156\}$	$\{255, 208, 52; 1, 4, 204\}$	$\{255, 208, 52; 1, 8, 204\}$
$\{260, 212, 50; 1, 10, 208\}$	$\{265, 216, 45; 1, 5, 212\}$	$\{285, 232, 65; 1, 5, 228\}$
$\{305, 248, 62; 1, 2, 244\}$	$\{315, 256, 48; 1, 12, 252\}$	$\{315, 256, 50; 1, 20, 252\}$
$\{315, 256, 64; 1, 2, 252\}$	$\{315, 256, 64; 1, 16, 252\}$	$\{345, 280, 50; 1, 5, 276\}$
$\{345, 280, 64; 1, 4, 276\}$	$\{385, 312, 21; 1, 21, 308\}$	$\{385, 312, 33; 1, 33, 308\}$
$\{385, 312, 66; 1, 6, 308\}$	$\{405, 328, 80; 1, 5, 324\}$	$\{420, 340, 80; 1, 20, 336\}$
$\{520, 420, 100; 1, 20, 416\}$	$\{615, 496, 124; 1, 4, 492\}$	$\{665, 536, 134; 1, 2, 532\}$
$\{710, 572, 143; 1, 11, 568\}$	$\{715, 576, 132; 1, 16, 572\}$	$\{735, 592, 148; 1, 16, 588\}$
$\{765, 616, 150; 1, 15, 612\}$	$\{815, 656, 164; 1, 2, 652\}$	$\{855, 688, 170; 1, 5, 684\}$
$\{855, 688, 172; 1, 4, 684\}$	$\{910, 732, 180; 1, 10, 728\}$	$\{1000, 804, 201; 1, 3, 800\}$
$\{1045, 840, 180; 1, 24, 836\}$	$\{1045, 840, 210; 1, 6, 836\}$	$\{1055, 848, 212; 1, 4, 844\}$
$\{1080, 868, 215; 1, 5, 864\}$	$\{1155, 928, 232; 1, 2, 924\}$	$\{1185, 952, 245; 1, 5, 948\}$
$\{1195, 960, 240; , 1, 16, 956\}$	$\{1235, 992, 248; 1, 8, 988\}$	$\{1395, 1120, 240; 1, 24, 1116\}$
$\{1535, 1232, 308; 1, 8, 1228\}$	$\{1560, 1252, 310; 1, 10, 1248\}$	$\{1615, 1296, 324; 1, 12, 1292\}$
$\{1665, 1336, 334; 1, 2, 1332\}$	$\{1995, 1600, 320; 1, 80, 1596\}$	

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\theta_2 = -1$, то по [3, лемма 4, п. (1)] $b_2 = a+1$, $b_1 = tc_2$ и граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{a(b-1)}(ab,t)$, $k_2 = ab(a+1)(b-1)/c_2$, $k_3 = (a+1)bb_2/c_2$.

Граф Γ_3 является псевдогеометрическим, если $c_3 = a(b-1)$ делит $kb_1/c_2 = ab(a+1)(b-1)/c_2$. В этом случае c_2 делит $(a+1)b$. С другой стороны, c_2 делит $b_1 = (a+1)(b-1)$, поэтому c_2 делит $a+1$. Отсюда $b_2 = sc_2$, Γ_3 имеет неглавные собственные значения $s(b-1)$, $-(a+1) = -sc_2$ и $\mu(\Gamma_3) = bs^2c_2 - s^2(b-1)c_2 = s^2c_2$. Отсюда Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $pG_s(bs, sc_2-1)$ и $b+c_2-1$ делит $b(bs+1)c_2(sc_2-1)$.

Наконец, Γ имеет массив пересечений, указанный в (1.1), и кратности собственных значений равны значениям из списка (1.2).

Отсюда $b+c_2-1$ делит $b(sc_2-1)((bs+1)c_2, (bc_2s-b+1)(b-1)s)$. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть Γ является Q-полиномиальным графом Шилла с $b_2 = sc_2$. Тогда*

$$\theta_3 = -b(bs+1)/(s+1),$$

$$s+1 \ \text{ делит } \ b(b-1), \quad (s+1)^2c_2/b = sb + (s+1)as/(bs+1),$$

$$s \ \text{ делит } \ c_2/(b,s) \ \text{ и } \ bs+1 \ \text{ делит } \ a(s+1, b-1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По [2, следствие 17] $\theta_3 = -b(bs+1)/(s+1)$. Отсюда $s+1$ делит $b(b-1)$,

$$\theta_3 + 1 = (-b^2s - b + s + 1)/(s+1) = -(b-1)(sb+s+1)/(s+1)$$

и по [3, лемма 1] имеем

$$\theta_2 + 1 = (a+1-sc_2)(s+1)/(sb+s+1) = (s+1)(b(a-sc_2)-c_2)/(b(bs+1)) + 1$$

$$= (s+1)a/(bs+1) - (s+1)c_2/b + 1.$$

Отсюда $c_2(s+1)(1/b - s/(sb+s+1)) = 1 + (s+1)a/(bs+1) - (a+1)(s+1)/(sb+s+1)$, поэтому

$$c_2(s+1)^2/(b(sb+s+1)) = 1 + (s+1)(as-bs-1)/((bs+1)(sb+s+1))$$

и $(s+1)^2c_2/b = sb + (s+1)as/(bs+1)$.

Таким образом, s делит $c_2/(b,s)$ и $bs+1$ делит $a(s+1, b-1)$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть Γ является графом Шилла с $b_2 = sc_2$. Если Γ не содержит треугольников, то выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *имеет массив пересечений* $\{b^2, b^2-1, sc_2; 1, c_2, b^2-b\}$, $x^2 + x(c_2(s+1)-2b) = c_2(b-1)$,

$$\theta_{2,3} = (-c_2s - c_2 \pm \sqrt{c_2^2s^2 + 4b^2 + c_2^2 - 2(2bc_2 - c_2^2)s - 4c_2})/2; \tag{1.3}$$

(2) *если* $b < 170$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{4,3,3;1,1,2\}$, $\{25,24,9;1,1,20\}$, $\{25,24,3;1,3,20\}$, $\{49,48,8;1,1,42\}$, $\{441,440,9;1,9,420\}$, $\{841,840,63;1,3,812\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ является графом Шилла с $b_2 = sc_2$ и не содержит треугольников. Тогда $a_1 = a - b = 0$ и Γ имеет массив пересечений $\{b^2, b^2-1, sc_2; 1, c_2, b^2-b\}$. Далее, кратность θ_1 равна $s(b^5 + b^2c_2s + ((s+1)c_2-1)b^3 + bc_2)/(bc_2(2s+1)+c_2)$.

По [3, лемма 1, п. (2)] имеем

$$\theta_2 + \theta_3 = a_2 - k = -(s+1)c_2, \quad \theta_2\theta_3 = b(sc_2 - b) + c_2 = c_2(bs+1) - b^2$$

и $(\theta_2+1)(\theta_3+1) = (b-1)(sc_2-b-1)$. Поэтому для $\theta_{2,3}$ справедливы равенства (1.3).

Имеем

$$c_2^2s^2 + 4b^2 + c_2^2 - 2(2b-c_2)c_2s - 4c_2 = (c_2s - (2b-c_2))^2 + 4bc_2 - 4c_2 = (c_2(s+1)-2b)^2 + 4c_2(b-1),$$

поэтому $x^2 + x(c_2(s+1) - 2b) = c_2(b-1)$ и c_2 делит $x(x-2b)$.

Пусть $c_2(s+1) > 2b$. Тогда

$$c_2^2 s^2 + 4b^2 + c_2^2 - 2(2b - c_2)c_2 s - 4c_2 = (c_2(s+1) - 2b + 2x)^2,$$

поэтому $x^2 + x(c_2(s+1) - 2b) = c_2(b-1)$.

Если $x = b-1$, то $b - 1 + (c_2(s+1) - 2b) = c_2$ и $c_2 s = b+1$, противоречие.

Если $x = (b-1)/2$, то $c_2(s-1) = (3b+1)/2$ и $c_2(s+1) - 2b + 2x = c_2$, $\theta_2 = -c_2 s/2$, $\theta_3 = -c_2(s+2)$.

Если $x = c_2$, то $c_2(s+3-b) = 2b$, $c_2(s+1) - 2b + 2x = c_2 b$, $\theta_2 = c_2(b-s-1)/2$, $\theta_3 = -c_2(s+1+b)/2$.

Пусть $c_2(s+1) < 2b$. Тогда

$$c_2^2 s^2 + 4b^2 + c_2^2 - 2(2b - c_2)c_2 s - 4c_2 = (2b - c_2(s+1) + 2x)^2,$$

поэтому $x^2 + x(2b - c_2(s+1)) = c_2(b-1)$.

Если $x = b-1$, то $3b - 1 = c_2(s+2)$, противоречие.

Если $x = (b-1)/2$, то $(5b-1)/2 = c_2(s+3)$, $2b - c_2(s+1) + 2x = 3b - 1 - c_2(s+1) = c_2$, $\theta_2 = -c_2 s/2$, $\theta_3 = -c_2(s+2)$.

Если $x = c_2$, то $c_2 s = b+1$, $2b - c_2(s+1) + 2x = 2b - c_2(s-1) = b - 1 + c_2$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -(b + c_2)$.

Компьютерный перебор, использующий сформулированные выше ограничения, а также целочисленность кратностей собственных значений и неотрицательность параметров Крейна дистанционно регулярных графов, показывает, что в случае $b < 170$ граф Γ имеет один из указанных в п. (2) массивов пересечений. Лемма и предложение доказаны.

Заметим, что в утверждении (2) леммы 1.3 последний допустимый массив получен при $b = 29$. При этом в течение двух суток компьютерного перебора удается проверить массивы до $b = 169$.

2. Графы Шилла с $\theta_2 = -1$ и псевдогеометрическим графом Γ_3

В этом разделе предполагается, что Γ является графом Шилла с $\theta_2 = -1$ и псевдогеометрическим графом Γ_3. Из доказательства леммы 1.1 следует, что Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $pG_s(bs, sc_2 - 1)$ и $b + c_2 - 1$ делит $b(sc_2 - 1)(bs + 1)(c_2, (b-1)s)$.

Лемма 2.1. *Если $c_2 = 1$, то выполняются следующие утверждения*:

(1) Γ *имеет массив пересечений*

$$\{b(s-1), s(b-1), s; 1, 1, (s-1)(b-1)\}, \tag{2.1}$$

кратности собственных значений равны

$$(bs+1)(s-1), \quad (bs - b + 1)(bs+1)b/(s+b), \quad (bs - b + 1)(s-1)(b-1)s/(s+b); \tag{2.2}$$

(2) Γ_3 *является псевдогеометрическим графом для $pG_s(bs, s-1)$ и $b + 1 \le s \le b^2$;*

(3) $s - b$ *делит* $(b, s)(s-1, b-1)$ *и возникают следующие бесконечные серии допустимых массивов пересечений*:

(*i*) *в случае $s = b^2$ имеем массив $\{b(b^2-1), b^2(b-1), b^2; 1, 1, (b^2-1)(b-1)\}$;*

(*ii*) *в случае $s = b + 2$ имеем массив $\{b(b+1), (b+2)(b-1), b+2; 1, 1, b^2 - 1\}$;*

(*iii*) *в случае $s = 2b - 1$, $b \equiv \pm 1 \pmod 3$ имеем массив $\{2b(b-1), (2b-1)(b-1), 2b - 1; 1, 1, 2(b-1)^2\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c_2 = 1$. Тогда по лемме 1.1 граф Γ имеет массив пересечений (2.1) и кратности собственных значений равны значениям из (2.2) Из доказательства леммы 1.1 следует, что Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $pG_s(bs, s-1)$.

Теперь $b+s$ делит $(bs-b+1)((s-1)(b-1)s, b(sb+1))$. Так как

$$((b-1)s, sb+1) = (s+1, b-1), \quad (s-1, sb+1) = (s-1, b+1), \quad (b+s, sb-b+1) = (b+s, b^2+b-1),$$

то $b+s$ делит $(b^2+b-1)(b,s)(s+1,b-1)(s-1,b+1)$.

Далее, $a_1 = s-b-1$, окрестность вершины в Γ является объединением изолированных (a_1+1)-клик и $s-b$ делит $b(s-1)$, поэтому $s-b$ делит $(b,s)(s-1,b-1)$. С другой стороны, $\theta_3 = -(b+1)$ и ввиду границы Дельсарта максимальный порядок клики в Γ не больше

$$1 - k/\theta_3 = 1 + b(s-1)/(b+1) = s - (s-1)/(b+1),$$

поэтому $s-b+1 \le s-(s-1)/(b+1)$ и $s \le b^2$.

В случае $s = b^2$ все кратности являются целыми числами.

Пусть $s = b+1$. Тогда

$$(bs-b+1)(bs+1)b/(s+b) = (b^2+1)(b^2+b+1)b/(2b+1),$$

$(2b^2+2, 2b+1) = -(b-2, 2b+1)$ делит 5, $(2b^2+2b+2, 2b+1) = (b+2, 2b+1)$ делит 3, поэтому $b \in \{2, 7\}$.

Пусть $s = tb$. Тогда $t+1$ делит $(b^2+b-1)(b^2-1)$. Так как $s-b = b(t-1)$ делит $(b,s)(s-1,b-1)$, то $t-1$ делит $b-1$. В случае $t=2$ число b не делится на 3, в случае $t=3$ число b нечетно, и в случае $t=4$ число b сравнимо с 1 по модулю 3 и b сравнимо с $1, -1, 2$ по модулю 5.

Из условия $s-b$ делит $b(s-1)$ имеем $s = (b^2+(m-1)b)/m$ для некоторого целого m. Далее, $m = (b^2-b)/l$ и бесконечные серии возможны при $l \in \{1, 2, b-1, b, b^2-b\}$.

В случае $l=1$ имеем $s=b+1$. В случае $l=2$ имеем $s=b+2$ и кратности равны $(b-1)(b+2)(b^2+b+1)/2$ и $b(b+1)(b^2+b+1)/2$.

В случае $l = b-1$ имеем $s = 2b-1$ и кратности равны $2(b-1)(2b-1)(2b^2-b+1)/3$ и $(2b^2-b+1)(2b^2+1)/3$. Отсюда $b \equiv \pm 1 (\mod 3)$.

В случае $l = b$ имеем $s = 2b$ и кратности равны $2(2b-1)(b-1)^2(2b^2-2b+1)/(3b-1)$, $b(2b^2-2b+1)(2b^2-b+1)/(3b-1)$. Отсюда $b=2$.

В случае $l = b^2-b$ имеем $s = b^2$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* $b+c_2-1 = sc_2-1$, *то* $s = 2c_2$ *и* Γ *имеет допустимый массив пересечений*

$$\{(2c_2-1)c_2(2c_2^2-1), 2c_2^2((2c_2-1)c_2-1), 2c_2^2; 1, c_2, (2c_2^2-1)((2c_2-1)c_2-1)\}; \tag{2.3}$$

(2) *если* $c_2 = (b-1)s$, *то в случае* $b = s+1$ *граф* Γ *имеет допустимый массив пересечений*

$$\{(s+1)(s^3-1), s^4, s^3; 1, s^2, s(s^3-1)\}. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $b+c_2-1 = sc_2-1$. Тогда $b = (s-1)c_2$ и из целочисленности θ_2 следует, что $c_2s+b+c_2-1 = 2c_2s-1$ делит

$$(c_2^2s^2 - c_2^2s - sc_2 + c_2 + 1)(c_2s^2 - c_2s + 1)(sc_2 - c_2).$$

Так как

$$(2c_2s-1, 2c_2^2s^2 - 2c_2^2s - 2sc_2 + 2c_2 + 2) = (2c_2s-1, -c_2s+2) = (2c_2s-1, 3),$$

$$(2c_2s-1, 2c_2s^2 - 2c_2s + 2) = (2c_2s-1, s+1) = (2c_2+1, s+1),$$

$$(2c_2s-1, 2c_2s - 2c_2) = (2c_2s-1, 2c_2-1) = (2c_2-1, s-1),$$

$$(2c_2+1)(s-1)-(2c_2-1)(s+1)=2s-4c_2,$$

то $2c_2s-1$ делит $6(s-2c_2)$. Отсюда $s=2c_2$ и Γ имеет массив пересечений, указанный в (2.3).

Пусть $c_2=(b-1)s$. Тогда $b+c_2-1=(b-1)(s+1)$ и $s+1$ делит $b(sc_2-1)(bs+1)$. Так как

$$(s+1,sc_2-1)=-(s+1,c_2+1)=-(s+1,bs-s+1)=(s+1,b-2),\quad (s+1,bs+1)=-(s+1,b-1),$$

$$(bs-s+1)(b-1)-(bs+1)(s+1)=(bs^2-2bs+b+s-1)-(bs^2+bs+s+1)=-bs+b-2,$$

то $s+1$ делит $b(b-1)$. Далее, $c_2s+b+c_2-1=bs^2-s^2+b+bs-s-1=(b-1)(s^2+s+1)$ делит $(b-1)(bs^2-1)(bs+1)b$. Так как

$$(s^2+s+1,bs^2-1)=-(s^2+s+1,bs+b+1)=-(bs+b+1,b-s),$$

$$(s^2+s+1,bs+1)=(b-s-1,bs+1),\quad (bs+b+1)(b-s-1)-(bs+1)(b-s)=-2bs+b^2-b-1,$$

то s^2+s+1 делит $b(-2bs+b^2-b-1)$, Γ имеет массив пересечений

$$\{b((b-1)s^2-1),s^2(b-1)^2,(b-1)s^2;1,(b-1)s,((b-1)s^2-1)(b-1)\}$$

и кратности неглавных собственных значений равны

$$(bs^2-s^2-1)(bs+1)bs/(s+1),\ (bs^2-1)(bs+1)b/(s^2+s+1),\ (bs^2-s^2-1)(bs^2-1)bs/((s^2+s+1)(s+1)).$$

Отсюда s^2+s+1 делит $b(bs^2-1)((bs+1,bs^2-s^2-1)$. Так как

$$(bs+1,s^2+s+1)=(b-s-1,s^2+s+1),\quad (bs^2-1,s^2+s+1)=(bs+b+1,s^2+s+1)=(b-s,s^2+s+1).$$

Бесконечная серия допустимых массивов пересечений может возникнуть только при

$$b\in\{s,s+1\}.$$

В случае $b=s$ число $s+1$ делит $(bs^2-s^2-1)(bs+1)bs=(s^3-s^2-1)(s^2+1)s^2$ и $b=3$. В случае $b=s+1$ граф Γ имеет допустимый массив пересечений (2.4). Лемма доказана.

Из лемм 1.1, 2.1 и 2.2 следует теорема 1.

3. Q-полиномиальные графы Шилла с $b_2 = sc_2$

В этом разделе предполагается, что Γ — граф Шилла с $b_2=sc_2$, являющийся Q-полиномиальным относительно θ_1. По лемме 1.2 имеем $\theta_3=-b(bs+1)/(s+1)$ и $s+1$ делит $b(b-1)$. Если $b\le 3$, то по [2] Γ имеет массив пересечений $\{6,4,2;1,2,3\}$, $\{18,10,4;1,4,9\}$, $\{42,30,12;1,6,28\}$ или $\{105,72,24;1,12,70\}$.

Рассмотрим сначала случаи больших s.

Лемма 3.1. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) *если* $s+1=b(b-1)$, *то* $\theta_3=-b^2+1$ *и* $b=2$;
(2) *если* $s+1=b(b-1)/2$, *то* $\theta_3=-b^2+2$ *и* $b=3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s+1=b(b-1)$. Тогда $\theta_3=-(b(b^2-b-1)+1)/(b-1)=-(b^2-1)$ и по [2, теорема 20] имеем $b=2$.

Пусть $s+1=b(b-1)/2$. Тогда $s=(b-2)(b+1)/2$, $\theta_3=-2(b(b^2-b-2)/2+1)/(b-1)=-(b^2-2)$. Далее, $(b-2)(b+1)$ делит $2c_2$, $bs+1=(b^3-b^2-2b+2)/2=(b-1)(b^2-2)/2$ делит $a(s+1,b-1)$ и $a=(b^2-2)t/2$.

С другой стороны, $(s+1)^2c_2/b=sb+(s+1)as/(bs+1)$, поэтому

$$(b-1)^2c_2/4=s(1+(b-1)a/(b^3-b^2+2))$$

и $(b-1)/2$ делит $s=(b+1)(b-2)/2$. Отсюда $b=3$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Если* $b = 4$*,* $s > 1$*, то* $s = 3$*,* $a = 13t$*,* $\theta_3 = -4(13c_2/4c_2) = -13$*,* $c_2 = 3t + 3$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{52t, 3(13t + 1), 9t + 9; 1, 3t + 3, 39t\}$ *при* $t \in \{2, 3\}$.

Доказательство. Пусть $b = 4$. Тогда $s+1$ делит 12, s делит $c_2/(4, s)$ и $4s+1$ делит $a(s + 1, 3)$.

Ввиду леммы 3.1 можно считать, что $s + 1 \in \{3, 4\}$. Если $s = 3$, то 3 делит c_2 и $a = 13t$. Далее, $\theta_3 = -4(13c_2/4c_2) = -13$. По [3, лемма 1] имеем $\theta_2 = 13t - 4 - 4c_2 + 13$, $\theta_2 = 4t - c_2$ и $13t - 4 - 4c_2 + 13 = 4t - c_2$, поэтому $c_2 = 3t + 3$. Так как c_2 делит $13t(13t + 1)12$, то $t + 1$ делит $52 \cdot 12$. Компьютерные вычисления показывают, что массив пересечений $\{52t, 3(13t + 1), 9t + 9; 1, 3t + 3, 39t\}$ допустим только при $t \in \{2, 3\}$.

Если $s = 2$, то $c_2 = 4c$ и $a = 3t$. Далее, $\theta_3 = -4(9c_2/3c_2) = -12$. По [3, лемма 1] имеем $\theta_2 = 3t - 4 - 3c_2 + 12$, $12\theta_2 = 4(3t - 2c_2) - c_2$ и $3t - 3c_2 + 8 = t - 3c_2/4$, поэтому $9c = 2t + 8$. Так как c делит $9t(3t + 1)$, то $t + 4$ делится на 9 и делит $72 \cdot 99$. Компьютерные вычисления показывают, что допустимых массивов пересечений $\{12t, 3(3t + 1), 16(t + 4)/9; 1, 8(t + 4)/9, 9t\}$ не существует. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Если* $b = 5$*,* $s > 1$*, то* $s = 4$*,* $a = 21t$*,* $\theta_3 = -21$*,* $c_2 = 4t + 4$*,* Γ *имеет массив пересечений* $\{105t, 4(21t + 1), 16(t + 1); 1, 4(t + 1), 84t\}$ *и* $t \in \{3, 4, 19\}$.

Доказательство. Пусть $b = 5$. Тогда $s+1$ делит 20, s делит $c_2/(5, s)$ и $5s+1$ делит $a(s + 1, 4)$.

Ввиду леммы 3.1 можно считать, что $s + 1 \in \{4, 5\}$. Если $s = 4$, то 4 делит c_2 и $a = 21t$. Далее, $\theta_3 = -5(21c_2/5c_2) = -21$. По [3, лемма 1] имеем $\theta_2 = 21t - 5 - 5c_2 + 21$, $21\theta_2 = 5(21t - 4c_2) - c_2$ и $21t - 5c_2 + 16 = 5t - c_2$, поэтому $c_2 = 4t + 4$. Так как c_2 делит $21t(21t + 1)20$, то $t + 1$ делит $105 \cdot 20$. Компьютерные вычисления показывают, что массив пересечений $\{105t, 4(21t + 1), 16(t + 1); 1, 4(t + 1), 84t\}$ допустим только при $t \in \{3, 4, 19\}$.

Если $s = 3$, то c_2 делится на 3 и $a = 4t$. Далее, $\theta_3 = -5(16c_2/4c_2) = -20$. По [3, лемма 1] имеем $\theta_2 = 4t-5-4c_2+20$, $20\theta_2 = 5(4t-3c_2)-c_2$ и $4t-4c_2+15 = t-4c_2/5$, поэтому $16c_2 = 15(t+5)$. Так как $c_2 = 15c$, $c = (t + 5)/16$ и c_2 делит $80t(4t + 1)$, то $t(4t + 1)$ делится на 3, $t + 5$ делится на 16 и делит $80 \cdot 16 \cdot 19$. Компьютерные вычисления показывают, что допустимых массивов пересечений $\{20t, 4(4t + 1), 45(t + 5)/16; 1, 15(t + 5)/16, 16t\}$ не существует. Лемма доказана.

Из лемм 1.2, 3.1–3.3 следует теорема 2.

Лемма 3.4. *Если* Γ *является графом Шилла с* $b = 4$*, то* Γ *имеет массив пересечений из табл.* 1.

Доказательство. Пусть $b = 4$. Допустим, что Γ является Q-полиномиальным графом относительно θ_1. По [2, следствие 16 и теорема 20] имеем $-b^2 + 2 \le \theta_3 \le -b - 1$. Далее, $4(4b_2 + c_2)/(b_2 + c_2) = -\theta_3$. С другой стороны, по [2, лемма 10] число c_2 делит $(a + 4)b_2$ и $(a + 4)b_2 \ge (a + 1)c_2$. В случае $\theta_3 = -9$ имеем $4(4b_2 + c_2) = 9(b_2 + c_2)$, $c_2 = 7b_2/5$. Отсюда 7 не делит $(12a(a + 1), a + 4)$, противоречие.

В случае $\theta_3 = -10$ имеем $b_2 = c_2$, противоречие с теоремой 2. В случае $\theta_3 = -11$ имеем $4(4b_2 + c_2) = 11(b_2 + c_2)$, $5b_2 = 7c_2$ и 5 не делит $(12a(a + 1), a + 4)$, противоречие.

В случае $\theta_3 = -12$ имеем $4(4b_2 + c_2) = 12(b_2 + c_2)$ и $4b_2 = 8c_2$, противоречие с теоремой 2. В случае $\theta_3 = -13$ имеем $4(4b_2 + c_2) = 13(b_2 + c_2)$, $3b_2 = 9c_2$ и имеем два массива из п. (3) теоремы 2. В случае $\theta_3 = -14$ имеем $4(4b_2 + c_2) = 14(b_2 + c_2)$, $2b_2 = 10c_2$, противоречие с теоремой 2.

Итак, можно считать, что Γ не является Q-полиномиальным графом относительно θ_1. По [2, лемма 14] имеем $a \le b^4(b + 1)^2 = 2^8 \cdot 5^2$. Далее, c_2 делит $(12a(a + 1), (a + 4)b_2)$. С помощью компьютерного перебора получаем искомые массивы. Лемма и следствие 1 доказаны.

Лемма 3.5. *Если* Γ *является графом Шилла с* $b = 5$*, то* Γ *имеет массив пересечений из табл.* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $b = 5$. Допустим, что Γ является Q-полиномиальным графом относительно θ_1. По [2, следствие 16 и теорема 20] имеем $-b^2 + 2 \leq \theta_3 \leq -b - 1$. Далее, $5(5b_2 + c_2)/(b_2 + c_2) = -\theta_3$. С другой стороны, по [2, лемма 10] число c_2 делит $(a+5)b_2$ и $(a + 5)b_2 \geq (a + 1)c_2$. В случае $\theta_3 = -13$ имеем $5(5b_2 + c_2) = 13(b_2 + c_2)$, $8c_2 = 12b_2$, $(a+5)b_2 \geq 3(a+1)b_2/2$ и $a \leq 7$. Далее, Γ имеет массив пересечений $\{5a, 4(a+1), 2t; 1, 3t, 4a\}$ и 3 делит $(20a(a+1), a+5)$, противоречие.

В случае $\theta_3 = -14$ имеем $11b_2 = 9c_2$ и 11 не делит $(20a(a+1), a+5)$. В случае $\theta_3 = -15$ имеем $5(5b_2 + c_2) = 15(b_2 + c_2)$ и $b_2 = c_2$, противоречие с теоремой 2.

В случае $\theta_3 = -16$ имеем $5(5b_2+c_2) = 16(b_2+c_2)$, $9b_2 = 11c_2$ и 9 не делит $(20a(a+1), a+5)$. В случае $\theta_3 = -17$ имеем $5(5b_2+c_2) = 17(b_2+c_2)$ и $8b_2 = 12c_2$. Далее, Γ имеет массив пересечений $\{5a, 4(a+1), 3t; 1, 2t, 4a\}$ и t делит $10a(a+1)$. Отсюда $k_2 = 10a(a+1)/t$, $k_3 = 15(a+1)/2$ и $v = 1 + 5a + 10a(a+1)/t + 15(a+1)/2$. Из доказательства теоремы 9 в [2] следует, что либо $k < b^3 - b$, либо $v < k(2b^3 - b + 1)$. Если $k < b^3 - b = 120$, то допустимых массивов пересечений нет. Пусть $k > b^3 - b$. Тогда $a > b^2 - 1 = 24$ и

$$v = 1 + 5a + 10a(a+1)/t + 15(a+1)/2 < 5a(2b^3 - b + 1) = 1230a.$$

Отсюда $10a(a+1)/t < (2435a-17)/2$ и $a(a+1) < (2435a-17)/20$. Снова допустимых массивов пересечений нет.

В случае $\theta_3 = -18$ имеем $5(5b_2+c_2) = 18(b_2+c_2)$, $7b_2 = 13c_2$ и 7 не делит $(20a(a+1), a+5)$. В случае $\theta_3 = -19$ имеем $5(5b_2 + c_2) = 19(b_2 + c_2)$, $6b_2 = 14c_2$ и 3 не делит $(20a(a+1), a+5)$. В случае $\theta_3 = -20$ имеем $5(5b_2 + c_2) = 20(b_2 + c_2)$ и $5b_2 = 15c_2$, противоречие с теоремой 2. В случае $\theta_3 = -21$ имеем $5(5b_2 + c_2) = 21(b_2 + c_2)$, $4b_2 = 16c_2$ и имеем три массива из п. (4) теоремы 2.

В случае $\theta_3 = -22$ имеем $5(5b_2+c_2) = 22(b_2+c_2)$, $3b_2 = 17c_2$ и 3 не делит $(20a(a+1), a+5)$. В случае $\theta_3 = -23$ имеем $5(5b_2 + c_2) = 23(b_2 + c_2)$ и $2b_2 = 18c_2$, противоречие с теоремой 2.

Теперь можно считать, что Γ не является Q-полиномиальным графом относительно θ_1. По [2, лемма 14] имеем $a \leq b^4(b+1)^2 = 5^4 \cdot 6^2$. Далее, c_2 делит $(20a(a+1), (a+5)b_2)$. С помощью компьютерного перебора получаем искомые массивы. Лемма и следствие 2 доказаны.

Отметим, что при $b \leq 3$ имеется лишь 17 допустимых массивов пересечений [2, теоремы 12, 19] графов Шилла, при $b = 4$ получили 50 допустимых массивов, а при $b = 5$ — 83.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. **Koolen J.H., Park J.** Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. Vol. 31, no. 8. P. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
3. **Махнев А. А., Нирова М. С.** Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Мат. заметки. 2018. Т. 103, вып. 5. С. 730–744. doi: 10.4213/mzm11503 .
4. **Махнев А. А., Белоусов И. Н.** К теории графов Шилла $b_2 = c_2$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Vol. 14. P. 1135–1146. doi: 10.17377/semi.2017.14.097 .
5. **Coolsaet K.** Distance-regular graph with intersection array $\{21, 16, 8; 1, 4, 14\}$ does not exist // Europ. J. Comb. 2005. Vol. 26, no. 5. P. 709–716. doi: 10.1016/j.ejc.2004.04.005 .

Белоусов Иван Николаевич

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет,

г. Екатеринбург

e-mail: i_belousov@mail.ru

Поступила 20.02.2018

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
3. Makhnev A.A., Nirova M.S. Distance-regular Shilla graphs with $b_2 = c_2$. *Mat. Zametki*, 2018, vol. 103, no. 5, pp. 730–744 (in Russian). doi: 10.4213/mzm11503 .
4. Belousov I.N., Makhnev A.A. To the theory of Shilla graphs with $b_2 = c_2$. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2017, vol. 14, pp. 1135–1146. doi: 10.17377/semi.2017.14.097 .
5. Coolsaet K. Distance-regular graph with intersection array $\{21, 16, 8; 1, 4, 14\}$ does not exist. *Europ. J. Comb.*, 2005, vol. 26, no. 5, pp. 709–716. doi: 10.1016/j.ejc.2004.04.005 .

The paper was received by the Editorial Office on June 26, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00061-П).

Ivan Nikolaevich Belousov, Cand. Sci. (Phis.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: i_belousov@mail.ru .