ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 519.17

КОДЫ В ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С $\theta_2 = -1$

М. С. Нирова

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код C, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$ (Юришич и Видали). В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$ и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$, во втором случае Γ является графом Шилла. В работе изучаются графы с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$, в которых любые две вершины, находящиеся на расстоянии 3, лежат в максимальном 1-коде. В частности, найдены новые бесконечные серии допустимых массивов пересечений: $\{a(a-2), (a-1)(a-3), a+1; 1, a-1, a(a-3)\}$, $a \geq 5$, $\{a(2a+3), 2(a-1)(a+1), a+1; 1, a-1, 2a(a+1)\}$, a не сравнимо с 1 по модулю 3, $\{a(2a-3), 2(a-1)(a-2), a+1; 1, a-1, 2a(a-2)\}$, a четно и не сравнимо с 1 по модулю 3, $\{a(3a-4), (a-1)(3a-5), a+1; 1, a-1, a(3a-5)\}$, a четно и сравнимо с 0 или 2 по модулю 5.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, максимальный код.

M. S. Nirova. Codes in distance-regular graphs with $\theta_2 = -1$.

If a distance-regular graph Γ of diameter 3 contains a maximal 1-code C that is both locally regular and last subconstituent perfect, then Γ has intersection array $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ or $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, where $a = a_3$, $c = c_2$, and $p = p^3_{33}$ (Jurišić and Vidali). In first case, Γ has eigenvalue $\theta_2 = -1$ and the graph Γ_3 is pseudogeometric for $GQ(p+1, a)$. In the second case, Γ is a Shilla graph. We study graphs with intersection array $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ in which any two vertices at distance 3 are in a maximal 1-code. In particular, we find four new infinite families of intersection arrays: $\{a(a-2), (a-1)(a-3), a+1; 1, a-1, a(a-3)\}$ for $a \geq 5$, $\{a(2a+3), 2(a-1)(a+1), a+1; 1, a-1, 2a(a+1)\}$ for a not congruent to 1 modulo 3, $\{a(2a-3), 2(a-1)(a-2), a+1; 1, a-1, 2a(a-2)\}$ for even a not congruent to 1 modulo 3, and $\{a(3a-4), (a-1)(3a-5), a+1; 1, a-1, a(3a-5)\}$ for even a congruent to 0 or 2 modulo 5.

Keywords: distance-regular graph, maximal code.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-155-163

Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a, l) \in (P, \mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$. Коклика порядка $1 + st/\alpha$ в псевдогеометрическом графе для $pG_\alpha(s, t)$ называется *овоидом*.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра

d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0,\dots,b_{d-1};c_1,\dots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависит от выбора вершин u,w на расстоянии i. Положим $k_i=|\Gamma_i(u)|$ ($k=k_1$) и $a_i=k-b_i-c_i$. Определение чисел пересечений p^l_{ij} и параметров Крейна Q^l_{ij} см. в [1, глава 2]. Для графа Γ диаметра d и числа $i\in\{2,\dots,d\}$ определим граф Γ_i на том же множестве вершин, и две вершины u,w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u,w)=i$.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется e-кодом, если минимальное расстояний между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $|C|\le p^d_{dd}+2$ (см. [2]). В случае равенства код называется максимальным. Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $c_d\ge a_dp^d_{dd}$. В случае равенства код называется локально регулярным. Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $|C|\le k_d/\sum_{i=0}^e p^d_{id}+1$. В случае равенства код называется совершенным относительно последней окрестности.

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по [2, предложение 5] Γ имеет массив пересечений

$$\{a(p+1),cp,a+1;1,c,ap\}\quad\text{или}\quad\{a(p+1),(a+1)p,c;1,c,ap\},\quad\text{где}\quad a=a_3,c=c_2,p=p^3_{33}.$$

Указанные массивы совпадают в случае $c=a+1$. Но в этом случае по [3, теорема 1] получим граф Шилла с массивом пересечений $\{35,32,8;1,8,28\}$, противоречие с тем, что для этого массива $q^3_{33}=-36/25$.

В случае, когда Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1),cp,a+1;1,c,ap\}$, граф Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(p+1,a)$, а максимальному 1-коду отвечает разбиение графа Γ_3 овоидами.

Перечислим небольшие графы с массивом пересечений $\{a(p+1),cp,a+1;1,c,ap\}$.

1. Граф Сильвестра с массивом $\{5,4,2;1,1,4\}$.
2. Граф с массивом $\{35,24,8;1,6,28\}$.
3. Граф с массивом $\{44,30,5;1,3,40\}$ (не существует по [4]).
4. Граф с массивом $\{48,35,9;1,7,40\}$.
5. Граф с массивом $\{49,36,8;1,6,42\}$.
6. Граф с массивом $\{54,40,7;1,5,48\}$.
7. Граф с массивом $\{63,48,10;1,8,54\}$.
8. Граф с массивом $\{80,63,11;1,9,70\}$.
9. Граф с массивом $\{99,80,12;1,10,88\}$.

Можно выдвинуть следующее предположение

Гипотеза. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{a(p+1),cp,a+1;1,c,ap\}.$$

Тогда либо Γ принадлежит некоторому конечному множеству графов, либо $c=a-1$. В последнем случае граф $\bar\Gamma_2$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(p+1,2a)$ и кратности неглавных собственных значений равны

$$\frac{(a+1)a(p+2)(p+1)}{(a+p+1)},\quad\frac{(ap+a+1)a(p+2)(p+1}{(2a+p)(a+p+1)},\quad\frac{(ap+a+1)(p+1)p}{(2a+p)}.$$

В работе изучаются графы с массивом пересечений $\{a(p+1),cp,a+1;1,c,ap\}$, в которых любые две вершины, находящиеся на расстоянии 3, лежат в максимальном 1-коде. В этом случае Γ_3 является точечным графом обобщенного четырехугольника $GQ(p+1,a)$ (см. [3, лемма 3] и лемму 1).

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$, $\theta_0 = k > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$ *— собственные значения графа* Γ. *Тогда* $a < p(p+1)$ *и выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $a \le c$, *то либо* $a = c$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$, *либо* $2p + 2 \le a$;

(2) *параметр* a *не равен* $c - 1$;

(3) *если* $a = c - 2$, *то* $\theta_1 = a - x$, $\theta_3 = -(2p+3+a-x)$, $(a-x)(2p+3+a-x) = a(a+p+3)$ *и* $0 < x < p/2$;

(4) *если* $a = c + 2$, *то* $\theta_1 = a + x$, $\theta_3 = 2p + 1 - a - x$, $(a+x)(a+x-2p-1) = a(p+a-1)$ *и* $3p/2 < x < 2p + 1$.

(5) *если* $a = c + 1$ *и* Γ_3 *является псевдогеометрическим графом для* $GQ(p+1, a)$ *с квазиклассическими параметрами* $\{p+1, a\} = \{q, q\}, \{q^2, q\}, \{q^2, q^3\}, \{q-1, q+1\}$, *то* Γ *имеет массив пересечений*

$\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, q^2-q-2\}, \{15, 8, 4; 1, 2, 12\}, \{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ *или* $\{195, 168, 14; 1, 11, 182\}$.

Для массива пересечений $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$ при $1 \le a, p \le 1000$ только для следующих пар (a, p) кратности собственных значений целые: $(1, 4), (1, 54), (6, 28), (6, 119), (204, 984)$.

Для графа с $\theta_2 = -1$, отвечающего макимальному коду, найдены кратности неглавных собственных значений.

Предложение 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$. *Тогда кратности* m_i *неглавных собственных значений* θ_i *графа* Γ *равны*

$$m_2 = \big((p^2+3p+2)a^2 + (p^2+3p+2)a\big)/(a+p+1),$$

$$m_{1,3} = 1/2\Bigg((a^3 - 2a^2c + ac^2)p^5 + \big(5a^3 - 10a^2c + (5a+1)c^2 + 3a^2\big)p^4 + \Big(10a^3 + 2(5a+2)c^2$$
$$+12a^2 - 2(8a^2-1)c + 3a\Big)p^3 + a^3 + (a+1)c^2 + \big(10a^3 + 2(5a+3)c^2 + 18a^2 - 2(4a^2-2a-3)c + 9a + 1\big)p^2$$
$$+ 3a^2 + 2(a^2+2a+1)c + \big(5a^3 + (5a+4)c^2 + 12a^2 + 2(a^2+4a+3)c + 9a + 2\big)p$$
$$\pm\Big((a^2-ac)p^4 + \big(4a^2-(4a+1)c\big)p^3 + \big(4a^2 - 3(2a+1)c - 1\big)p^2 - a^2 - (a+1)c - \big((4a+3)c + 2a + 2\big)p - 2a - 1\Big)$$
$$\sqrt{(a-c)^2p^2 + (a+1+c)^2 + 2((a-c)^2 + a + c)p + 3a + 1}$$
$$/\Big((a^2 - 2ac + c^2)p^3 + a^3 + (a+1)c^2 + (a^3 + (a+3)c^2 + 3a^2 - 2(a^2+3a-1)c + 2a)p^2$$
$$+ 3a^2 + 2(a^2+2a+1)c + (2a^3 + (2a+3)c^2 + 5a^2 - 4(a^2-1)c + 4a + 1)p + 3a + 1\Big)\Bigg).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения получается с помощью компьютерного упрощения формул из [1, теорема 4.1.4]. □

В случае массива пересечений, отвечающего макимальному коду, с условием $c = a - 1$ найдены новые бесконечные серии допустимых массивов.

Теорема 2. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{a(p+1), (a-1)p, a+1; 1, a-1, ap\}$. *Тогда следующие серии содержат бесконечное число допустимых массивов*

(1) $p = a - 3 : \{a(a-2), (a-1)(a-3), a+1; 1, a-1, a(a-3)\}$, $a \ge 5$;

(2) $p = 2a + 2 : \{a(2a+3), 2(a-1)(a+1), a+1; 1, a-1, 2a(a+1)\}$, *a не сравнимо с* 1 *по модулю* 3;

(3) $p = 2a - 4 : \{a(2a-3), 2(a-1)(a-2), a+1; 1, a-1, 2a(a-2)\}$, *a четно и не сравнимо с* 1 *по модулю* 3;

(4) $p = 3a - 5 : \{a(3a-4), (a-1)(3a-5), a+1; 1, a-1, a(3a-5)\}$, *a четно и сравнимо с* 0 *или* 2 *по модулю* 5.

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведем вспомогательные результаты.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$, $\theta_0 = k > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$ — собственные значения графа Γ. Тогда по [3, лемма 1] имеем $\theta_1 + \theta_3 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 - k = (a-c)(p+1) - 1$ и $-\theta_1\theta_3 = k + ac = a(p+1+c)$. В случае $\theta_2 = -1$ по [3, лемма 3] имеем $b_2 = a_3 + 1$ и граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$.

Лемма 1. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(s,t)$, $s > \alpha$ и α делит st. Тогда дополнительный граф $\Delta = \bar{\Gamma}$ является псевдогеометрическим для $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha, s-\alpha)$.*

Доказательство. Заметим, что собственные значения Γ равны $s-\alpha$ и $-(t+1)$, поэтому собственными значениями Δ являются t и $-(s-\alpha+1)$, следовательно Δ может быть псевдогеометрическим для $pG_\beta(t+\beta, s-\alpha)$. Теперь степень вершины в графе Δ равна $(t+\beta)(s-\alpha+1) = k(k-\lambda-1)/\mu = s(st-\alpha t+t)/\alpha$ и $\beta = st/\alpha - t$.

Наконец, число точек в $pG_\alpha(s,t)$ равно числу точек в $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha, s-\alpha)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть Γ — граф с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$. Тогда $a+p+1$ делит $(p+1,a)(a+1)(p+2)$. Если $u^\perp$, $w^\perp$ – два овоида из Γ_3, то число $|u^\perp \cap w^\perp|$ равно a_1+2, если $d(u,w) = 1$, равно c_2, если $d(u,w) = 2$, равно 0, если $d(u,w) = 3$.*

Доказательство. Ввиду [3, лемма 3] и леммы 1 граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$, в частности, $a+p+1$ делит $(p+1,a)(a+1)(p+2)$.

Остальные утверждения леммы очевидны.

Лемма доказана.

В [6] изучены сильно регулярные графы, для которых граница Хофмана для коклик совпадает с границей Цветковича.

Предложение 2 [6, предложение]. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(s, (s-1)(s+1-\alpha))$, содержащий коклику C порядка $1+s(s-1)(s+1-\alpha)/\alpha$ и $\Sigma = \Gamma - C$. Тогда Σ — сильно регулярный граф с параметрами*

$$v = s(1+s(s-1)(s+1-\alpha)/\alpha), \quad k = (s-1)(s^2 - s\alpha + \alpha),$$

$$\lambda = (s-2)(1+(\alpha-1)(s+1-\alpha)), \quad \mu = \alpha(s^2 - s\alpha - s + 2\alpha - 1).$$

2. Графы с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ и $|a-c| \le 2$

В этом разделе предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$.

Лемма 3. *Имеем $a_1 = (a-c)p + a - 1 \ge 0$, $a < p(p+1)$, и в случае $a = c-i$, $i \ge 0$, выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $a = c$, то Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$, $\theta_1 + \theta_3 = -1$ и $-\theta_1\theta_3 = a(a+p+1)$, а если $1 \le a < p+1$, то $a = c$;*

(2) *параметр a не равен $c-1$, а если $p+1 \le a < c$, то $2p+2 \le a$;*

(3) *если $a = c-2$, то $\theta_1 = a-x$, $\theta_3 = -(2p+3+a-x)$, $(a-x)(2p+3+a-x) = a(a+p+3)$ и $0 < x < p/2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $a_1 = (a-c)p+a-1 \geq 0$. Так как Γ_3 содержит овоид, то по предложению 2 имеем $p(p+1) \geq a$. В случае $p(p+1) = a$ имеем псевдогеометрический граф для $GQ(s, s^2-s)$, $s = p+1$. По лемме 2 овоиды $u^\perp$, $w^\perp$ не пересекаются, если $d(u,w) = 3$. Противоречие с [7, лемма 2]. Значит, $a < p(p+1)$.

Пусть $a = c-i$, $i \geq 0$. Если $a = c$, то Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$ и ввиду предложения 1 кратности неглавных собственных значений равны

$$m_2 = (p^2+3p+2)(a^2+a)/(a+p+1),$$

$$m_{1,3} = 1/2\Big(4a^2p^4 + (4a^3+16a^2+5a)p^3 + 4a^3$$

$$+ (12a^3+28a^2+15a+1)p^2 + 8a^2 + (12a^3+24a^2+15a+2)p$$

$$\pm\Big(ap^3 + (2a^2+3a+1)p^2 + 2a^2 + (4a^2+5a+2)p + 3a+1\Big)\sqrt{4a^2+4ap+4a+1} + 5a+1\Big)$$

$$/\big(4a^3+4ap^2+8a^2+(8a^2+8a+1)p+5a+1\big).$$

По [3, лемма 1] имеем $\theta_1\theta_3 = -1$ и $-\theta_1\theta_3 = a(a+p+1)$.

Пусть $1 \leq a < p+1$. Если $a < c$, то $a_1 \leq -p+a-1$, противоречие. Значит, $a = c$.

Если $a = c-1$, то Γ является графом Шилла. Но в этом случае по [3, теорема 1] граф имеет массив пересечений $\{35, 32, 8; 1, 8, 28\}$, противоречие с тем, что для этого массива $q^3_{33} = -36/25$.

Пусть $p+1 \leq a < 2p+1$ и $a < c$. Если $i \geq 2$, то $a_1 \leq -2p+a-1$, противоречие. Значит, $i = 1$ и $a = c-1$, противоречие.

В случае $a = 2p+1$ число $a+p+1 = 3p+2$ делит $(a+1, p)(p+2, a-1)$, поэтому $3p+2$ делит 8, $p = 2$ и $a = c = 5$, противоречие.

Пусть $a = c-2$. Ввиду предложения 1 кратности неглавных собственных значений равны

$$m_2 = (a+1)a(p+2)(p+1)/(a+p+1),$$

$$m_{1,3} = 1/2\Big(4a^2p + 4ap^2 + 4p^3 \pm 2\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9}\,p^2 + 4a^2 + 16ap + 16p^2$$

$$\pm 2\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9}\,a - 5\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9}\,p + 12a + 21p$$

$$\pm 3\sqrt{4a^2+4(a+3)p+4p^2+12a+9} + 9\Big)(ap+a+1)(p+1)/\big((4a^2+4ap+4p^2+12a+12p+9)(a+p+1)\big).$$

По [3, лемма 1] имеем $\theta_1+\theta_3 = -(2p+3)$ и $-\theta_1\theta_3 = a(a+p+3)$. Отсюда $\theta_1 = a-x$ и $\theta_3 = -(2p+3+a-x)$, $(a-x)(2p+3+a-x) = a(a+p+3)$. Если $x = 0$, то $2p+3+a = a+p+3$, противоречие. Если $x < 0$, то $2p+3+a-x < a+p+3$, противоречие. Поэтому $x > 0$, $2p+3+a-x > a+p+3$ и $x < p$. Пусть $x \geq p/2$. Тогда $(a-p/2)(a+3p/2+3) \geq a(a+p+3)$ и $-3p^2/4 - 3p/2 \geq 0$, противоречие. Значит, $x < p/2$.

Имеем $(a-x)(2p+3+a-x) = a^2 + (2p-2x)a + 3a + x^2 - 3x = a^2 + ap + 3a$, поэтому $a(p-2x) = x(2p+3-x)$ и $0 < x < p/2$.

Лемма доказана.

Для массива пересечений $\{a(p+1), (a+2)p, a+1; 1, a+2, ap\}$ при $1 \leq a, p \leq 1000$ только для $a = 76, p = 75$ кратности целые. Но в этом случае $k < b_1$, противоречие.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* $p \leq 2$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{3, 2, 2; 1, 1, 2\}$, $\{9, 6, 4; 1, 3, 6\}$ *или* $\{15, 2c, 6; 1, c, 10\}$ *при* $c \in \{3, 5\}$;

(2) *если* $p = 3$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{4, 3, 2; 1, 1, 3\}$, $\{8, 3c, 3; 1, c, 6\}$ *при* $c \in \{1, 2\}$; $\{16, 3c, 5; 1, c, 12\}$ *при* $c \in \{2, 4\}$; $\{24, 3c, 7; 1, c, 18\}$ *при* $c \in \{3, 4, 6\}$; $\{32, 3c, 9; 1, c, 24\}$ *при* $c \in \{3, \ldots, 6, 8, 10\}$ *или* $\{44, 3c, 12; 1, c, 33\}$ *при* $c \in \{5, \ldots, 11, 13, 14\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 1$. Тогда $a \in \{1, 2, 4\}$. В случае $a = 1$ граф Γ имеет массив пересечений $\{2, 1, 2; 1, 1, 1\}$, в случае $a = 2$ граф Γ имеет массив пересечений $\{4, c, 3; 1, c, 2\}$, и в случае $a = 4$ граф Γ имеет массив пересечений $\{8, c, 5; 1, c, 4\}$. В любом случае имеем противоречие.

Пусть $p = 2$. Ввиду леммы 3 имеем $a \in \{1, 3, 5\}$. В случае $a = 1$ граф Γ имеет массив пересечений $\{3, 2, 2; 1, 1, 2\}$. В случае $a = 3$ граф Γ имеет массив пересечений $\{9, 2c, 4; 1, c, 6\}$, ввиду леммы 3 получим $c \in \{2, 3\}$ и при $c = 2$ граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(6, 3)$ и нарушается условие целочисленности.

В случае $a = 5$ граф Γ имеет массив пересечений $\{15, 2c, 6; 1, c, 10\}$ и ввиду леммы 3 получим $c \in \{3, 5\}$.

Пусть $p = 3$. Ввиду леммы 3 имеем $a \in \{1, 2, 4, 6, 8, 11\}$. В случае $a = 1$ граф Γ имеет массив пересечений $\{4, 3, 2; 1, 1, 3\}$. В случае $a = 2$ граф Γ имеет массив пересечений $\{8, 3c, 3; 1, c, 6\}$, ввиду леммы 3 имеем $c \in \{1, 2\}$ и при $c = 1$ граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(8, 2)$.

В случае $a = 4$ граф Γ имеет массив пересечений $\{16, 3c, 5; 1, c, 12\}$, ввиду леммы 3 получим $c \in \{2, 3, 4\}$, при $c = 3$ граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(8, 4)$ и нарушается условие целочисленности.

В случае $a = 6$ граф Γ имеет массив пересечений $\{24, 3c, 7; 1, c, 18\}$, ввиду леммы 3 имеем $c \in \{3, \dots, 6\}$, при $c = 5$ граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(8, 6)$ и нарушается условие целочисленности.

В случае $a = 8$ граф Γ имеет массив пересечений $\{32, 3c, 9; 1, c, 24\}$, ввиду леммы 3 получим $c \in \{3, \dots, 8, 10\}$, при $c = 7$ граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(8, 8)$ и нарушается условие целочисленности.

В случае $a = 11$ граф Γ имеет массив пересечений $\{44, 3c, 12; 1, c, 33\}$, ввиду леммы 3 имеем $c \in \{5, \dots, 11, 13, 14\}$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. В заключении леммы 4 нет допустимых массивов пересечений (в каждом случае найдется собственное значение, имеющее нецелую кратность).

Лемма 5. *Если $c = a - 2$, то Γ имеет массив пересечений*

$$\{a(p+1), (a-2)p, a+1; 1, a-2, ap\}, \quad \theta_1 = a + x, \quad \theta_3 = 2p + 1 - a - x,$$

$$(a + x)(a + x - 2p - 1) = a(p + a - 1) \quad \textit{и} \quad 3p/2 < x < 2p + 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По [3, лемма 1] имеем $\theta_1 + \theta_3 = (a - c)(p + 1) - 1$ и $-\theta_1\theta_3 = a(p + 1 + c)$. Если $c = a - 2$, то $\theta_1 + \theta_3 = 2p + 1$ и $-\theta_1\theta_3 = a(p + a - 1)$.

Положим $\theta_1 = a + x$. Тогда $\theta_3 = 2p + 1 - a - x$ и $(a + x)(a + x - 2p - 1) = a(p + a - 1)$. Если $x = 0$, то $a - 2p - 1 = p + a - 1$, противоречие. Если $x < 0$, то $a + x - 2p - 1 > p + a - 1$ и $x - 2p - 1 > p - 1$, противоречие. Значит, $x > 0$. Далее, $a(2x - 2p - 1) + x(x - 2p - 1) = a(p - 1)$ и $x(2p + 1 - x) = a(2x - 3p)$. Отсюда $3p/2 < x < 2p + 1$.

В случае $x = (3p + 1)/2$ получим $a = (3p + 1)(p + 1)/4$.

В случае $x = 3p/2 + 1$ получим $a = (3p + 2)p/8$.

В случае $x = 2p - 1$ получим $a(p - 2) = (2p - 1)2$ и $p = 8$ В случае $x = 2p - 2$ получим $a(p - 4) = 3(2p - 2)$ и $p - 4$ делит 18. Лемма доказана.

Из лемм 3–5 следует теорема 1 в случае $a \neq c + 1$.

3. Графы с массивом пересечений $\{a(p+1), (a-1)p, a+1; 1, a-1, ap\}$

В этом разделе предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{a(p + 1), (a - 1)p, a + 1; 1, a - 1, ap\}$.

Лемма 6. *Если $c = a - 1$, то выполняются следующие утверждения*:

(1) *граф* Γ_2 *является псевдогеометрическим для* $pG_{a(p-1)}(a(p+1), p-1)$, $2a+p$ *делит* $(p^2+p)(ap+a+1)$ *и в случае* $c = (p^2-4)/2$ *граф* Γ *не существует*;

(2) *кратности неглавных собственных значений графа* Γ *равны*

$$(a+1)a(p+2)(p+1)/(a+p+1), \quad (ap+a+1)a(p+2)(p+1)/((2a+p)(a+p+1)),$$

$$(ap+a+1)(p+1)p/(2a+p),$$

поэтому $a+p+1$ *делит* $(a, p+1)^2(p+2, a-1)$ *и*

$$2a+p \ \text{делит} \ (p-1, 2a+1)(p, 2a)(p+1, 2a-1)(p+2, 2a-2);$$

(3) *если* Γ_3 *является псевдогеометрическим графом для* $GQ(s,t)$, $s = p+1, t = a$ *с квазиклассическими параметрами* $\{s,t\} = \{q,q\}, \{q^2,q\}, \{q^2,q^3\}, \{q-1,q+1\}$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, q^2-q-2\}$, $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ *или* $\{195, 168, 14; 1, 11, 182\}$.

Доказательство. Пусть $c = a-1$. По [2, предложение 6] граф Γ_2 является псевдогеометрическим для $pG_{a(p-1)}(a(p+1), p-1)$ и $2a+p$ делит $(p^2+p)(ap+a+1)$. По лемме 1 граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим для $pG_2(p+1, 2a)$. Если еще $c = (p^2-4)/2$, то граф Γ является Q-полиномиальным и по [2, теорема 3] не существует.

Ввиду [3, лемма 1] граф Γ имеет собственные значения $\theta_1 = a+p$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -a$.

По предложению 1 кратности неглавных собственных значений равны

$$(a+1)a(p+2)(p+1)/(a+p+1),$$

$$(ap+a+1)a(p+2)(p+1)/((2a+p)(a+p+1)), \quad (ap+a+1)(p+1)p/(2a+p).$$

Заметим, что $(a+p+1, 2a+p) = (p+2, a-1)$ и $a+p+1$ делит $a(p+2)(p+1)(ap+p+1, a+1)$, поэтому $a+p+1$ делит $a(p+2)(p+1)$ и $a+p+1$ делит $(a, p+1)^2(p+2, a-1)$.

Аналогично $2a+p$ делит $(ap+a+1)(p+1)(2a, p)$. Так как $(ap+a+1, 2a+p)$ делит $(p-1, 2a+1)(p+2, 2a-2)$, то $2a+p$ делит $(p-1, 2a+1)(p, 2a)(p+1, 2a-1)(p+2, 2a-2)$.

Заметим, наконец, что $(a+p+1, 2a+p) = (p+2, a-1)$.

Пусть Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(s,t)$, $s = p+1, t = a$. Ввиду границ Хофмана и Цветковича для коклик имеем $|O| = st+1 \le s^2(st+1)/(s+t)$ и $t \le s^2 - s$.

Допустим теперь, что параметры (s,t) квазиклассические, т. е. либо $\{s,t\} = \{q^a, q^b\}$, $a = b$, $a = 2b$ или $2a = 3b$, либо $\{s,t\} = \{q-1, q+1\}$. В случаях $s = q, t = q^2$ и $s = q^3, t = q^2$ получим противоречие с тем, что $t \le s^2 - s$.

Покажем, что либо

(i) $p = q^2-1, a = q$ и $q = 2, 3$, либо

(ii) $p = 26, a = 9$, либо

(iii) $p = q-2, a = q+1$, либо

(iv) $p = q, a = q-1$, $q = 4, 14$.

По условию целочисленности для $pG_2(p+1, 2a)$ число $p+2a$ делит $(p+1)(p+2)a(2a+1)$.

Если $p = q-1, a = q$, то $3q-1$ делит $q^2(q+1)(2q+1)$. Так как $(3q-1, q+1)$ делит 4, $(3q-1, 2q+1)$ делит 5, то $3q-1$ делит 20 и $q = 2$. В этом случае $b_2 = 3 > b_1 = 1$, противоречие.

Если $p = q^2-1, a = q$, то q^2+2q-1 делит $q^3(q^2+1)(2q+1)$. Так как $(q^2+2q-1, q^2+1) = (q^2+1, 2q-2)$ делит 4, $(q^2+2q-1, 2q+1) = (q^2-2, 2q+1) = (q+4, 2q+1)$ делит 7, то q^2+2q-1 делит 28 и $q = 2, 3$.

Если $p = q^3-1, a = q^2$, то q^3+2q^2-1 делит $q^3(q^3+1)q^2(2q^2+1)$. Так как $(q^3+2q^2-1, q^3+1) = (2q^2-2, q^3+1) = (q+1)(2q-2, q^2-q+1)$ делит $(q+1)$, $(q^3+2q^2-1, 2q^2+1) = (2q^2+1, q^3-2) = (q+4, 2q^2+1) = (q+4, 8q-1)$ делит 33, то q^2+q-1 делит 33 и $q = 3$.

Если $p = q-2, a = q+1$, то $3q$ всегда делит $(q^2-1)q(2q+3)$.

Если $p=q, a=q-1$, то $3q-2$ делит $(q^2-1)(q+2)(2q-1)$. Так как $(3q-2,q+1)$ делит 5, $(3q-2,q+2)$ делит 8, $(3q-2,q-1)=(3q-2,2q-1)=1$, то $3q-2$ делит 40 и $q=2,4,14$. В случае $q=2$ имеем $p=2, a=1$ и $b_1=0$, противоречие.

Поэтому имеем бесконечную серию массивов пересечений

$$\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}, \quad q\geq 6$$

и шесть спорадических массивов

$$\{243,208,10;1,8,234\},\ \{243,208,28;1,26,216\},\ \{8,3,3;1,1,6\},$$

$$\{27,16,4;1,2,24\},\ \{15,8,4;1,2,12\}\ \text{ или }\ \{195,168,14;1,12,182\}.$$

Но первые два спорадических графа не существуют: они имеют собственное значение 35 кратностей 11529/11 и 8235/31 соответственно. В случае массива $\{8,3,3;1,1,6\}$ имеем $a_1=4$ и $[u]$ является объединением изолированных 5-клик, противоречие. Лемма и теорема 1 в случае $a=c+1$ доказаны.

Доказательство теоремы 2. В случае $p=a-3$ граф Γ имеет массив

$$\{a(a-2), (a-1)(a-3), a+1; 1, a-1, a(a-3)\}, \quad a\geq 5,$$

и кратности неглавных собственных значений равны

$$(a+1)a(a-1)(a-2)/(2a-2),\ (a-1)^2a(a-1)(a-2)/((3a-3)(2a-2)),\ (a-1)^2(a-2)(a-3)/(3a-3).$$

В случае $p=2a+2$ граф Γ имеет массив

$$\{a(2a+3), 2(a-1)(a+1), a+1; 1, a-1, 2a(a+1)\},$$

число a не сравнимо с 1 по модулю 3 и кратности неглавных собственных значений равны

$$(a+1)a(2a+4)(2a+3)/(3a+3),\ (2a^2+3a+1)a(2a+4)(2a+3)/((4a+2)(3a+3)),$$

$$(2a^2+3a+1)(2a+3)(2a+2)/(4a+2).$$

В случае $p=2a-4$ граф Γ имеет массив

$$\{a(2a-3), 2(a-1)(a-2), a+1; 1, a-1, 2a(a-2)\},$$

число a четно, не сравнимо с 1 по модулю 3 и кратности неглавных собственных значений равны

$$(a+1)a(2a-2)(2a-3)/(3a-3),\ (2a^2-3a+1)a(2a-2)(2a-3)/((4a-4)(3a-3)),$$

$$(2a^2-3a+1)(2a-3)(2a-4)/(4a-4).$$

В случае $p=3a-5$ граф Γ имеет массив

$$\{a(3a-4), (a-1)(3a-5), a+1; 1, a-1, a(3a-5)\},$$

число a четно, a сравнимо с 0 или 2 по модулю 5 и кратности неглавных собственных значений равны

$$(a+1)a(3a-3)(3a-4)/(4a-4),\ (3a^2-4a+1)a(3a-3)(3a-4)/((5a-5)(4a-4)),$$

$$(3a^2-4a+1)(3a-4)(3a-5)/(5a-5).$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. **Jurisic A., Vidali J.** Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 65, no. 1-2. P. 29–47. doi: 10.1007/s10623-012-9651-0 .
3. **Махнев А.А., Нирова М.С.** Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Мат. заметки 2018. Т. 103, вып. 5. С. 730–744. doi: 10.4213/mzm11503 .
4. **Koolen J.H., Park J.** Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. Vol. 31, no. 8. P. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
5. **Koolen J.H., Park J., Yu H.** An enequality involving the second largesr and smallest eigenvalues of a distance-regular graphs // Linear Algebra and Appl. 2011. Vol. 434, no. 12. P. 2404–2413. doi: 10.1016/j.laa.2010.12.032 .
6. **Махнев А.А.** Графы, в которых граница Хофмана для коклик совпадает с границей Цветковича // Докл. АН. 2011. Т. 438, № 3. С. 303–307.
7. **Махнев А.А. (мл.), Махнев А.А.** Овоиды и двудольные подграфы в обобщенных четырехугольниках // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 6. С. 878–885.

Нирова Марина Сефовна Поступила 26.06.2018

канд. физ.-мат. наук, доцент
Кабардино-балкарский государственный университет имени Х.М.Бербекова,
г. Нальчик
e-mail: m_nirova@mail.ru

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. Jurisic A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3. *Des. Codes Cryptogr.*, 2012, vol. 65, no. 1-2, pp. 29–47. doi: 10.1007/s10623-012-9651-0 .
3. Makhnev A.A., Nirova M.S. Distance-regular Shilla graphs with $b_2 = c_2$. *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 5-6, pp. 780–792. doi: 10.1134/S0001434618050103 .
4. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
5. Koolen J.H., Park J., Yu H. An inequality involving the second largest and smallest eigenvalue of a distance-regular graph. *Linear Algebra Appl.*, 2011, vol. 434, no. 12, pp. 2404–2412. doi: 10.1016/j.laa.2010.12.032 .
6. Makhnev A.A. On graphs in which the Hoffman bound for cocliques equals the Cvetcovich bound. *Dokl. Math.*, 2011, vol. 83, no. 3, pp. 340–343. doi: 10.1134/S106456241 .
7. Makhnev A.A. Jr., Makhnev A.A. Ovoids and bipartite subgraphs in generalized quadrangles. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, iss. 5-6, pp. 829–837. doi: 10.1023/A:102405391 .

The paper was received by the Editorial Office on June, 26, 2018.

Marina Sefovna Nirova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: nirova_m@mail.ru .