ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 3 2018

УДК 519.17

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_i может быть сильно регулярным для $i = 2$ или $i = 3$. Нахождение параметров Γ_i по массиву пересечений графа Γ является прямой задачей. Нахождение массива пересечений графа Γ по параметрам Γ_i является обратной задачей. Ранее прямая и обратная задачи были решены А. А. Махневым и М. С. Нировой для $i = 3$. В данной работе решена обратная задача для $i = 2$: по параметрам сильно регулярного графа Γ_2 найден массив пересечений дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3. Доказано, что граф Γ_2 не является графом в половинном случае Уточняются также результаты М. С. Нировой о дистанционно регулярных графах Γ диаметра 3, для которых Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Найдены новые бесконечные серии допустимых массивов пересечений: $\{r^2 + 3r + 1, r(r + 1), r + 2; 1, r + 1, r(r + 2)\}$, r нечетно и делится на 3, $\{2r^2 + 5r + 2, r(2r + 2), 2r + 3; 1, 2r + 2, r(2r + 3)\}$, r не делится на 3 и r не сравнимо с ±1 по модулю 5.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, дистанционно регулярный граф, массив пересечений.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Inverse problems in the theory of distance-regular graphs.

For a distance-regular graph Γ of diameter 3, the graph Γ_i can be strongly regular for $i = 2$ or 3. Finding the parameters of Γ_i given the intersection array of Γ is a direct problem, and finding the intersection array of Γ given the parameters of Γ_i is the inverse problem. The direct and inverse problems were solved earlier by A. A. Makhnev and M. S. Nirova for $i = 3$. In the present paper, we solve the inverse problem for $i = 2$: given the parameters of a strongly regular graph Γ_2, we find the intersection array of a distance-regular graph Γ of diameter 3. It is proved that Γ_2 is not a graph in the half case. We also refine Nirova's results on distance-regular graphs Γ of diameter 3 for which Γ_2 and Γ_3 are strongly regular. New infinite series of admissible intersection arrays are found: $\{r^2 + 3r + 1, r(r + 1), r + 2; 1, r + 1, r(r + 2)\}$ for odd r divisible by 3 and $\{2r^2 + 5r + 2, r(2r + 2), 2r + 3; 1, 2r + 2, r(2r + 3)\}$ for r indivisible by 3 and not congruent to ±1 modulo 5.

Keywords: strongly regular graph, distance-regular graph, intersection array.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-133-144

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависит от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). *Графом Тэйлора* называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061-П.

на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение через $pG_\alpha(s,t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается через $GQ(s,t)$.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$. В таких графах граница Хофмана для клик равна $s+1$ и каждая вершина вне $(s+1)$-клики L смежна с α вершинами из L.

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. *Обратной задачей* является восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры.

Например, в графе Тэйлора, содержащем треугольник, окрестность каждой вершины является сильно регулярным графом с $k = 2\mu$. Обратно, данному сильно регулярному графу Δ с параметрами (v,k,λ,μ) и $k = 2\mu$ отвечает граф Тэйлора с массивом пересечений $\{v, v-k-1, 1; 1, v-k-1, v\}$, в котором окрестность некоторой вершины изоморфна Δ. В этом случае прямая и обратная задачи имеют единственное решение с точностью до параметров сильно регулярного графа и массива пересечений дистанционно регулярного графа.

Если для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_3 сильно регулярен, то по [2, теорема 1] граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Обратно для графа $\bar\Gamma_3$, являющегося псевдогеометрическим для $pG_\alpha(l,t)$, граф Γ имеет массив пересечений $\{l, tc_2, l-\alpha+1; 1, c_2, \alpha\}$, $l-\alpha+1 \le tc_2 < l$, $c_2 \le \alpha$.

Если для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_2 сильно регулярен, то по [1, предложение 4.2.17] имеем $c_3(a_3+a_2-a_1) = b_1a_2$ (равносильно $p^1_{22} = p^3_{22}$). Более того, Γ_2 имеет параметры $(v, k_2, p^2_{22}, p^1_{22})$.

Известны следующие примеры:

Γ – обобщенный шестиугольник порядка (4,1) с массивом пересечений $\{8,4,4;1,1,2\}$, Γ_2 – единственный граф с параметрами (105,32,4,12);

Γ – граф Хэмминга $H(3,4)$ с массивом пересечений $\{9,6,3;1,2,3\}$, Γ_2 – граф с параметрами (64,27,10,12);

Γ – граф Джонсона $J(7,3)$ с массивом пересечений $\{12,6,2;1,4,9\}$, $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (35,16,6,8);

Γ – реберный граф $Ho{-}Si$ с массивом пересечений $\{12,6,5;1,1,4\}$, Γ_2 – граф с параметрами (175,72,20,36);

Γ – половинный 7-куб с массивом пересечений $\{21,10,3;1,6,15\}$, $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (64,28,12,12);

Γ – граф Джонсона $J(10,3)$ с массивом пересечений $\{21,12,5;1,7,40\}$, $\bar\Gamma_2$ – граф с параметрами (120,56,28,24).

Γ – свернутый половинный 12-куб с массивом пересечений $\{66,45,28;1,6,30\}$, Γ_2 – граф с параметрами (1024,495,238,240).

Интерес представляет следующий в о п р о с: какие сильно регулярные графы не изоморфны Γ_2 для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3?

Теорема 1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого граф Γ_i сильно регулярен, $i \in \{2,3\}$. Тогда Γ_i не является графом в половинном случае (т. е. графом с параметрами $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$).*

В следующем предложении приведен список допустимых массивов графов Γ с сильно регулярным графом Γ_2 (но не Γ_3) с числом вершин, не большим 1024.

Таблица

Параметры Γ с сильно регулярным Γ_2

№	массив Γ	параметры Γ_2
(1)	$\{8,4,4;1,1,2\}$ пример 1	$(105,32,4,12)$
(2)	$\{9,6,3;1,2,3\}$ пример 2	$(64,27,10,12)$
(3)	$\{11,10,4;1,1,5\}$	$(210,110,55,60)$
(4)	$\{12,6,2;1,4,9\}$ пример 3	как у $pG_3(6,2)$
(5)	$\{12,6,5;1,1,4\}$ пример 4	как у $pG_2(4,17)$
(6)	$\{19,16,8;1,2,8\}$	$(324,152,70,72)$
(7)	$\{21,10,3;1,6,15\}$ пример 5	как у $pG_4(7,4)$
(8)	$\{21,12,5;1,4,9\}$ пример 6	как у $pG_4(7,8)$
(9)	$\{22,16,5;1,2,20\}$	как у $pG_{30}(44,3)$
(10)	$\{22,21,4;1,2,14\}$	$(320,231,166,168)$
(11)	$\{33,30,15;1,2,15\}$ существует [4]	$(1024,495,238,240)$
(12)	$\{35,30,3;1,2,25\}$	$(624,525,440,450)$
(13)	$\{36,25,8;1,4,20\}$ не существует [1, теорема 4.4.4]	как у $pG_{10}(15,14)$
(14)	$\{36,28,4;1,2,24\}$	как у $pG_{20}(24,20)$
(15)	$\{42,30,2;1,10,36\}$	как у $pG_{15}(21,5)$
(16)	$\{42,32,9;1,6,24\}$	$(351,224,142,144)$
(17)	$\{45,30,7;1,2,27\}$ не существует [5]	как у $pG_{12}(15,44)$
(18)	$\{46,42,20;1,4,21\}$	$(990,483,240,231)$
(19)	$\{50,45,12;1,6,30\}$	$(576,375,246,240)$
(20)	$\{51,48,8;1,4,36\}$	$(800,612,468,468)$
(21)	$\{52,35,16;1,4,28\}$ не существует [6]	$(768,455,262,280)$
(22)	$\{52,42,16;1,6,28\}$	$(625,364,213,210)$
(23)	$\{56,42,20;1,6,28\}$	$(729,392,211,210)$
(24)	$\{60,45,8;1,12,50\}$	как у $pG_{30}(45,4)$
(25)	$\{63,42,12;1,9,49\}$	как у $pG_{28}(42,6)$
(26)	$\{65,54,9;1,6,45\}$	$(768,585,444,450)$
(27)	$\{66,45,28;1,6,30\}$ пример 7	$(1024,495,238,240)$
(28)	$\{72,45,16;1,8,54\}$ не существует [1, теорема 4.4.4]	как у $pG_{30}(45,8)$
(29)	$\{78,50,9;1,15,60\}$	как у $pG_{18}(26,9)$
(30)	$\{85,54,25;1,10,45\}$ не существует [1, теорема 4.4.4]	$(800,459,258,270)$
(31)	$\{90,60,12;1,12,72\}$ не существует [1, теорема 4.4.4]	$(616,450,328,330)$
(32)	$\{104,66,8;1,12,88\}$ не существует [7]	как у $pG_{21}(26,21)$
(33)	$\{110,81,12;1,18,90\}$	как у $pG_{40}(55,8)$
(34)	$\{111,88,9;1,12,99\}$	как у $pG_{60}(74,10)$
(35)	$\{112,77,16;1,16,88\}$ не существует [1, теорема 4.4.4]	как у $pG_{35}(49,10)$
(36)	$\{145,84,25;1,20,105\}$ не существует [1, теорема 4.4.4]	как у $pG_{20}(29,20)$
(37)	$\{174,110,18;1,30,132\}$	как у $pG_{21}(29,21)$

Предложение 1. *Если Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, для которого граф Γ_2 (но не Γ_3) сильно регулярен и $v \le 1024$, то Γ имеет один из массивов, приведенных в таблице выше.*

Доказательство предложения 1 получено с привлечением списка массивов пересечений из [1, pp. 425–431].

Заметим, что из 37 случаев в заключении предложения 1 граф Γ_2 не является псевдогеометрическим в 18 случаях (при этом граф $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим в 11 случаях из этих 18). Среди псевдогеометрических графов Γ_2 в заключении предложения 1 сети встречаются 5 раз.

В работе решена обратная задача теории графов для $i = 2$: по параметрам сильно регулярного графа Γ_2 найден массив пересечений дистанционно регулярного графа Γ.

Теорема 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3, для которого Γ_2 — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) и собственными значениями $k, r, -s$. Тогда* *для* $x = b_2 + c_2 \le rs$, $\mu x \ne rs(r+1)(s-1)$ *можно представить массив пересечений графа* Γ *в следующем виде*:

(1) $b_0 = (\mu + rs)x/(rs)$,
$b_1 = \mu x/(r(s-1)) - s$,
$b_2 = x(rs(r+1)(s-1) - \mu x)/(r^2 s(s-1))$,
$c_2 = x(\mu x - rs(s-1))/(r^2 s(s-1))$,
$c_3 = \mu x/(r(s-1))$,

и для

$$u = \sqrt{\big(\mu x - s(s-1)(x(r+2s) - r(s-1))\big)^2 - 4s^3 x(-r+x)(r+s)(s-1)^2}$$

граф Γ *имеет спектр*:

• *значение* $(rs(s-1)(s+x-1) - \mu x - u)/(2rs(s-1))$ *кратности*

$(\mu+rs)(\mu+rs-r)(u^2(r+1)-u(x(\mu(r+2s-1)-rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$,

• *значение* $(rs(s-1)(s+x-1) - \mu x + u)/(2rs(s-1))$ *кратности*

$(\mu+rs)(\mu+rs-r)(u^2(r+1)+u(x(\mu(r+2s-1)-rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2)$,

• *значение* $-\mu x/(rs(s-1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(s-1)/(\mu(r+s))$;

(2) $b_0 = (\mu + rs)x/(rs)$,
$b_1 = \mu x/(s(r+1)) + r$,
$b_2 = x(rs(r+1)(s-1) - \mu x)/(rs^2(r+1))$,
$c_2 = x(\mu x + rs(r+1))/(rs^2(r+1))$,
$c_3 = \mu x/(s(r+1))$,

и для

$$u = \sqrt{(\mu x + r(r+1)(x(2r+s) + s(r+1)))^2 - 4r^3 x(r+1)^2(r+s)(s+x))}$$

граф Γ *имеет спектр*:

• *значение* $(rs(r+1)(-r+x-1) + \mu x - u)/(2rs(r+1))$ *кратности*

$(\mu+rs)(\mu+rs+s)\big(u^2(s-1)+u(x(\mu(2r+s+1)+rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)^2(s-1))\big)/(2\mu(r+s)u^2)$,

• *значение* $(rs(r+1)(-r+x-1) + \mu x + u)/(2rs(r+1))$ *кратности*

$(\mu+rs)(\mu+rs+s)(u^2(s-1)-u\big(x(\mu(2r+s+1)+rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)^2(s-1))\big)/(2\mu(r+s)u^2)$,

• *значение* $\mu x/(rs(r+1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs-r)(r+1)/(\mu(r+s))$;

(3) $\{\kappa, \kappa-1, 1; 1, \kappa-1, \kappa\}$.

В случае, когда Γ_2 является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника, получено

Следствие. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф такой, что граф* Γ_2 *сильно регулярен с параметрами обобщенного четырехугольника, т. е. имеет неглавные собственные значения* $r, -s$, *и параметр* μ *равен* s. *Тогда* Γ *имеет массив пересечений*

$$\big\{y(r+1)^2, r(y+1), ry(r+1)(s-y-1)/s; 1, ry(r+1)(y+1)/s, ry\big\}$$

для некоторого целого y *(это массив из п.* (2) *теоремы* 2 *при* $x = yr(r+1)$).

В [9] М. С. Нировой доказан следующий результат.

Предложение 2 [9, теорема 2, п. 1]. *Пусть* Γ *является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра* 3, *для которого графы* Γ_2 *и* Γ_3 *сильно регулярны. Тогда* $b_1 = tc_2$, $b_2 = a_3+1$, $a_2 = (t-1)(c_2+1)$, $c_3 = t(c_2+1)$, $a_1 = a_3+t-1$, $k_2 = kt$, $k_3 = k(a_3+1)/(c_2+1)$, $p^1_{33} = a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu(\Gamma_3)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{t(c_2+1)+a_3, tc_2, a_3+1; 1, c_2, t(c_2+1)\}$.

В данном предложении нет информации о параметрах графа Γ_2. Следующий результат дает необходимую информацию.

Предложение 3. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3. *Графы* Γ_2 *и* Γ_3 *сильно регулярны тогда и только тогда, когда массив пересечений* Γ *имеет вид, представленный в п.* (3) *предложения* 1 *или в п.* (1) *при* $x = r$:

$$\big\{\mu/s + r, \mu/(s-1) - s, r + 1 - \mu/(s(s-1)); 1, \mu/(s(s-1)) - 1, \mu/(s-1)\big\}.$$

В последнем случае Γ_2 *имеет параметры* $k(\Gamma_2) = k_2(\Gamma) = kr$, $\lambda(\Gamma_2) = rc_2 + (r-1)^2(c_2+1) + a_3$ *и* $\mu(\Gamma_2) = r(r-1)(c_2+1)$.

Ввиду предложения 3 возникает необходимость перечисления сильно регулярных графов с наименьшим собственным значением $-m$ и $m(m-1)$, делящим μ. Такой граф является псевдогеометрическим для $pG_{\beta t}(l,t)$, ему отвечают $r = l - t\beta$, $s = t+1$, $\mu = t(t+1)\beta$, $a_3 = r - \beta$ и массив $\{l, (t+1)(\beta-1), l - t\beta + 1 - \beta; 1, \beta - 1, (t+1)\beta\}$.

Из целочисленности k_3 следует, что $c_2 + 1$ делит $a_3(a_3+1)$. В случае $a_3 = c_2 + 1$ получим хорошо известное двупараметрическое семейство Юришича допустимых массивов пересечений $\{(t+1)a_3, t(a_3-1), a_3+1; 1, a_3-1, ta_3\}$, где $t = p^3_{33}$ (см. [10]). В случае $a_3 = c_2$ получим массив пересечений $\{r(c_2+1) + c_2, rc_2, c_2+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$ и $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r(c_2+1)}(r(c_2+1)+c_2, r)$. Для небольших параметров имеем: $r = c_2 - 1$ (массив $\{19, 12, 5; 1, 4, 15\}$), $r = 2c_2 + 1$ или $r = 3c_2 - 3$ (массив $\{49, 36, 5; 1, 4, 45\}$), $c_2 = 2r + 2$ (массив $\{77, 60, 13; 1, 12, 65\}$).

Теорема 3. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений*

$$\{r(c_2+1) + c_2, rc_2, c_2+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}.$$

Тогда

$$k(\Gamma_2) = k_2(\Gamma) = kr, \quad \lambda(\Gamma_2) = rc_2 + (r-1)^2(c_2+1) + c_2, \quad \mu(\Gamma_2) = r(r-1)(c_2+1),$$

$2c_2 + r + 1$ *делит* $(c_2r - c_2 - 1)(c_2r - c_2)(r, 2c_2+1)$, $\bar\Gamma_3$ *является псевдогеометрическим графом для* $pG_{r(c_2+1)}(r(c_2+1)+c_2, r)$, $(c_2 + r + 1)$ *делит* $(r+1)^2(rc_2 - 1)$ *и выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* $r = c_2 - 1$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{r^2+3r+1, r(r+1), r+2; 1, r+1, r(r+2)\}$ *и* Γ_2 *является псевдогеометрическим графом для* $pG_{(r-1)(r+2)}(r^2+3r+1, r-1)$, *где* r *нечетно и делится на* 3;

(2) *если* $r = 2c_2 + 1$ *или* $r = 3c_2 - 3$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{49, 36, 5; 1, 4, 45\}$ *и* Γ_2 *является псевдогеометрическим графом для* $pG_{40}(49, 8)$;

(3) *если* $c_2 = 2r + 2$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{2r^2 + 5r + 2, r(2r+2), 2r+3; 1, 2r+2, r(2r+3)\}$, Γ_2 — *псевдогеометрический граф для* $pG_{(r-1)(2r+3)}(2r^2+5r+2, r-1)$, r *не делится на* 3 *и* r *не сравнимо с* ± 1 *по модулю* 5.

1. Γ_2 – граф в половинном случае

В этом разделе мы докажем теорему 1. Сначала приведем два вспомогательных результата.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф диаметра* 3 *с собственными значениями* $k = \theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. *Тогда* $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = a_1 + a_2 + a_3 - k$, $\theta_1\theta_2\theta_3 = k(b_2 - a_3) + a_3c_2$ *и* $(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_3+1) = b_1(b_2 - a_3 - 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица T порядка 3, собственные значения которой совпадают с собственными значениями $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$ графа Γ, имеет вид [1, с. 130]

$$T = \begin{pmatrix} -1 & b_1 & 0 \\ 1 & k-b_1-c_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3-b_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\theta_1+\theta_2+\theta_3 = Tr(T) = a_1+a_2+a_3-k$ и $\theta_1\theta_2\theta_3 = \det(T) = k(b_2-a_3)+a_3c_2$. Наконец, $(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_3+1) = \det(T+I) = b_1(b_2-a_3-1)$. Лемма доказана.

Если $\theta_2 = -1$, то по лемме 1.1 имеем $b_2 = a_3+1$, $\theta_1+\theta_3 = 1+a_1+a_2+a_3-k$ и $-\theta_1\theta_3 = k+a_3c_2$.

Лемма 1.2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* 3 *с собственными значениями, для которого* Γ_2 *— сильно регулярный граф с собственными значениями* $k_2, r, -s$. *Тогда для* $x = b_2+c_2$ *верно одно из следующих утверждений*:

(1) $b_0 = (\mu+rs)x/(rs)$,
$b_1 = \mu x/(r(s-1)) - s$,
$b_2 = x(rs(r+1)(s-1)-\mu x)/(r^2s(s-1))$,
$c_2 = x(\mu x - rs(s-1))/(r^2s(s-1))$,
$c_3 = \mu x/(r(s-1))$;

(2) $b_0 = (\mu+rs)x/(rs)$,
$b_1 = \mu x/(s(r+1)) + r$,
$b_2 = x(rs(r+1)(s-1)-\mu x)/(rs^2(r+1))$,
$c_2 = x(\mu x + rs(r+1))/(rs^2(r+1))$,
$c_3 = \mu x/(s(r+1))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ_2 — сильно регулярный граф. Поскольку $\kappa = k_2 = k_2 - b_1 \ge p^1_{22} = \mu$, то Γ_2 не является полным многодольным, и, следовательно, $r \ne 0$. Если $s = 1$, то Γ_2 — объединение изолированных клик, Γ — двудольный граф и мы получаем случай (3) теоремы 2. Поэтому дальше будем предполагать, что $r > 0$, $s > 1$.

Имеем $\mu = p^1_{22} = b_1a_2/c_2$. Подставляя $a_2 = b_0-b_2-c_2$ и $b_0b_1 = c_2\kappa = c_2(\mu+rs)$ и выражая из полученного равенства b_1, получим $b_1 = c_2rs/(b_2+c_2)$. Положим $x = b_2+c_2$ и выразим b_0 из равенства $b_0b_1 = c_2(\mu+rs)$. В результате получим

$$b_0 = (\mu+rs)x/(rs), \qquad b_1 = c_2rs/x. \tag{1.1}$$

Неравенство $x \le rs$ теперь следует из неравенства $b_1 \ge c_{d-1} = c_2$ (см. [1, предложение 4.1.6]).

Из равенства $\lambda = p^2_{22}$ следует равенство $\mu+r-s = (b_1c_2+a_2^2+c_3b_2-b_0-a_1a_2)/c_2$. Выразим отсюда c_3: $c_3 = (b_0+c_2(\mu+r-s-b_1)-(b_0-b_2-c_2)(b_1-b_2-c_2+1))/b_2$. Подставим выражения для b_0, b_1 из (1.1) и $b_2 = x-c_2$, упростим и получим

$$c_3 = (\mu x^3 - rs(c_2r+x)(c_2s-x))/(rsx(x-c_2)). \tag{1.2}$$

Из равенства $|\Gamma_2| = |\Gamma|$ следует равенство

$$(\mu+r(s-1))(\mu+s(r+1))/\mu = 1+b_0+b_1b_0/c_2+b_2b_1b_0/(c_2c_3).$$

Выразим c_3: $c_3 = \mu b_0b_1b_2/(c_2((\mu+r(s-1))(\mu+s(r+1))-\mu(1+b_0))-\mu b_0b_1)$. Подставим сюда выражения для b_0, b_1 из (1.1) и $b_2 = x-c_2$, упростим и получим

$$c_3 = \mu rs(x-c_2)/(rs(r+1)(s-1)-\mu x). \tag{1.3}$$

В частности, отсюда следует неравенство $x \ne rs(r+1)(s-1)/\mu$.

Вычтем равенство (1.3) из (1.2), упростим и получим уравнение

$$\frac{(rs(r+1)(c_2s-x)-\mu x^2)(rs(s-1)(c_2r+x)-\mu x^2)}{rsx(x-c_2)(\mu x - rs(r+1)(s-1))} = 0,$$

которое выполняется при значениях c_2, приведенных в пп. (1) и (2). Остальные значения массива пересечений получаются подстановкой выражения для c_2 в формулы (1.1), (1.2) и $b_2 = x - c_2$.

Обратно, пусть массив пересечений Γ имеет указанный вид. Тогда сильная регулярность Γ_2 следует из выполнения уравнения $c_3(a_3 + a_2 - a_1) = b_1 a_2$ (см. [1, предложение 4.2.17]), которое проверяется непосредственным вычислением. Лемма доказана.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого граф Γ_3 является графом в половинном случае. Граф в половинном случае является псевдогеометрическим, если $\mu = u^2 + u$ и Γ имеет массив пересечений $\{2u + 2, 2u, u + 2; 1, 2, u + 1\}$. В этом случае Γ является графом Шилла с $a = u + 1, b = 2$ и по [8, теорема 12] не существует.

Пусть до конца раздела Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с массивом пересечений $\{k, b_1, b_2; 1, c_2, c_3\}$, для которого граф Γ_2 сильно регулярен.

Лемма 1.3. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) $c_3(a_3 + a_2 - a_1) = b_1 a_2$, $p^1_{22} = a_2 k_2 / k = b_1 a_2 / c_2$;
(2) $p^2_{22} = (c_2 b_1 + a_2(a_2 - a_1) + b_2 c_3 - k)/c_2$, $p^3_{22} = c_3(a_3 + a_2 - a_1)/c_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По [1, предложение 4.2.17] имеем $c_3(a_3 + a_2 - a_1) = b_1 a_2$. Остальные равенства следуют из [1, лемма 4.1.7]. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Если граф* Γ_2 *сильно регулярен, с параметрами* $(4\mu + 1, 2\mu, \mu - 1, \mu)$, *то выполняются следующие утверждения*:
(1) $a_2 = b_2 + c_2 = k/2$ *и* $k_2 = k_1 + k_3 = 2\mu$;
(2) $b_1 b_2 + c_2 c_3 = b_1 c_3$, $c_3(a_3 + a_2 - a_1) = b_1 a_2$ *и* c_3 *делит* $b_1(b_2, c_2)$;
(3) $a_2(a_2 - a_1) + b_2 c_3 = (k - c_2)(b_1 + 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $k_2 = k b_1 / c_2$, $k_3 = k_2 b_2 / c_3$ и по условию $k_2 = k + k_3 = 2\mu$, поэтому $k_2 = k_2 c_2 / b_1 + k_2 b_2 / c_3$ и $c_2/b_1 + b_2/c_3 = 1$. Отсюда $b_1 b_2 + c_2 c_3 = b_1 c_3$. Далее, по лемме 1.3 имеем $c_3(a_3 + a_2 - a_1) = b_1 a_2$. С другой стороны, $p^1_{22} = a_2 k_2 / k = k_2 / 2$, поэтому $k = 2a_2$. Утверждение (1) доказано.

Из равенств $b_1 b_2 + c_2 c_3 = b_1 c_3$ и $c_3(a_3 + a_2 - a_1) = b_1 a_2$ следует, что c_3 делит $b_1 b_2$ и c_3 делит $b_1 a_2$. Так как $a_2 = b_2 + c_2$, то c_3 делит $b_1(b_2, c_2)$. Утверждение (2) доказано.

Далее, $p^2_{22} = (c_2 b_1 + a_2(a_2 - a_1) + b_2 c_3 - k)/c_2 = k_2/2 - 1 = k b_1 / c_2 - 1$, поэтому $c_2 b_1 + a_2(a_2 - a_1) + b_2 c_3 - k = k b_1 - c_2$. Отсюда $a_2(a_2 - a_1) + b_2 c_3 = (k - c_2)(b_1 + 1)$. Лемма доказана.

Завершим д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. По [11, теорема 6] дистанционно регулярный граф диаметра 3 либо является двудольным графом или графом Тэйлора, либо имеет c_2, не большее $k/2$. Так как $a_2 > 0$, то граф не является двудольным. Далее, граф Γ_2 имеет диаметр 2, поэтому Γ не является графом Тэйлора. Наконец,

Может оказаться полезным следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1:

Если Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* 3 *и граф* Γ_2 *сильно регулярен, то число* $(p^2_{22} - p^3_{22})^2 + 4(k_2 - p^3_{22})$ *является квадратом.*

2. Случай сильно регулярного графа Γ_2

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и граф Γ_2 сильно регулярен.

Лемма 2.1. *Для массива типа* (1) *из теоремы* 2 *положим*

$$u = \sqrt{(\mu x - s(s-1)(x(r+2s) - r(s-1)))^2 - 4s^3 x(-r+x)(r+s)(s-1)^2}.$$

Тогда Γ *имеет спектр*:

(1) *значение* $(rs(s-1)(s+x-1)-\mu x-u)/(2rs(s-1))$ *кратности*

$$(\mu+rs)(\mu+rs-r)(u^2(r+1)-u(x(\mu(r+2s-1)-rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2);$$

(2) *значение* $(rs(s-1)(s+x-1)-\mu x+u)/(2rs(s-1))$ *кратности*

$$(\mu+rs)(\mu+rs-r)(u^2(r+1)+u(x(\mu(r+2s-1)-rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)(s-1)^2))/(2\mu(r+s)u^2);$$

(3) *значение* $-\mu x/(rs(s-1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs+s)(s-1)/(\mu(r+s))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Собственные значения найдены как собственные значения матрицы L_1 [1, с. 129]. Кратности посчитаны по формуле из [1, теорема 4.1.4]. Лемма доказана.

Если число u нецелое, то избавиться от иррациональности в кратности можно только при $x=(s-1)/((r+2s-1)/\bar{\mu}-1)$. Здесь $\bar{\mu}=\mu(\bar{\Gamma}_2)$.

Лемма 2.2. *Для массива типа* (2) *из теоремы* 2 *положим*

$$u=\sqrt{(\mu x+r(r+1)(x(2r+s)+s(r+1)))^2-4r^3x(r+1)^2(r+s)(s+x)}.$$

Тогда Γ *имеет следующие собственные значения*:

(1) *значение* $(rs(r+1)(-r+x-1)+\mu x-u)/(2rs(r+1))$ *кратности*

$$(\mu+rs)(\mu+rs+s)\big(u^2(s-1)+u(x(\mu(2r+s+1)+rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)^2(s-1))\big)/(2\mu(r+s)u^2);$$

(2) *значение* $(rs(r+1)(-r+x-1)+\mu x+u)/(2rs(r+1))$ *кратности*

$$(\mu+rs)(\mu+rs+s)\big(u^2(s-1)-u(x(\mu(2r+s+1)+rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)^2(s-1))\big)/(2\mu(r+s)u^2);$$

(3) *значение* $\mu x/(rs(r+1))$ *кратности* $(\mu+rs)(\mu+rs-r)(r+1)/(\mu(r+s))$.

Если число u нецелое, то избавиться от иррациональности в кратности можно только при $x=(r+1)/((2r+s+1)/\bar{\mu}+1)$.

Из лемм 1.2, 2.1, 2.2 следует теорема 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия. До конца раздела будем предполагать, что Γ_2 — псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(r+1,s-1)$. Тогда $\mu=s$.

По теореме 2 массив пересечений Γ соответствует пп. (1) или (2) теоремы. Допустим сначала, что массив Γ соответствует п. (1). Тогда Γ имеет собственное значение $-\mu x/(rs(s-1))$. Поскольку собственные значения графа — алгебраические целые числа, и $\mu=s$, то $r(s-1)$ делит x, и $x\neq r(s-1)$, так как $c_2>0$. При этом $x\le rs$, отсюда $s=2$, $x=2r$ и обобщенный четырехугольник Γ_2 является решеткой или графом Шрикханде при $r=2$.

Далее, из выражений для кратностей собственных значений в п. (1) теоремы следует, что число u либо целое, либо иррациональное и коэффициент при u равен 0. Рассмотрим случай, когда u целое. Выполним в выражении для u^2 подстановку $\mu=2$, $s=2$, $x=2r$. Получим $u^2=4r^2(4r^2+4r-7)$. Необходимо, чтобы число $4r^2+4r-7=(2r+1)^2-8$ было квадратом некоторого целого числа $n\ge 0$. Тогда $n^2+8=(2r+1)^2$ можно представить в виде $(n+a)^2$ для некоторого целого $a>0$, и мы получим $2an+a^2=8$. Таким образом, $a=2$, $n=1$, следовательно, $r=1$. Но тогда выражение для b_2 равно 0 — противоречие со связностью Γ. Значит, u не может быть целым.

Рассмотрим случай, когда u иррационально. Чтобы избавиться от иррациональности в выражении для кратности собственного значения из п. (1) теоремы, необходимо приравнять коэффициент при u к нулю: $x(\mu(r+2s-1)-rs(r+1)(s-1))-rs(r+1)(s-1)^2=0$. Подставим сюда $\mu=2$, $s=2$, $x=2r$ и получим уравнение $-2r(2r^2+r-5)=0$, которое имеет единственное целое решение при $r = 0$. Но ввиду теоремы 2 $r \neq 0$, противоречие. Значит, массив Γ не соответствует п. (1) теоремы.

Таким образом, массив Γ соответствует п. (2) теоремы. Тогда Γ имеет собственное значение $\mu x/(rs(r+1))$, которое является алгебраическим целым числом, поэтому $r(r+1)$ делит x. Сделав подстановку $\mu = s$, $x = yr(r+1)$ в формулах из п. (2) теоремы 2, получим массив из заключения следствия.

Следствие доказано.

3. Случай сильно регулярных графов Γ_2 и Γ_3

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 и графы Γ_2, Γ_3 сильно регулярны.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 3. По предложению 4.2.17 из [1] необходимо и достаточно проверить выполнение равенства $b_0 = b_2 + c_3 - 1$. В случае п. (3) предложения 1 все очевидно.

В случае п. (1) предложения 1 равенство принимает вид

$$\frac{(-r+x)(\mu x - rs(s-1))}{r^2 s(s-1)} = 0.$$

Поскольку $c_2 \neq 0$, то $\mu x - rs(s-1) \neq 0$. Поэтому равенство выполняется только при $x = r$.

В случае п. (2) предложения 1 равенство принимает вид

$$\frac{(s+x)(\mu x + rs(r+1))}{rs^2(r+1)} = 0.$$

Ясно, что это равенство не выполняется. Предложение 3 доказано.

Пусть до конца раздела Γ имеет массив пересечений $\{r(c_2+1)+a_3, rc_2, a_3+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$, $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r(c_2+1)}(r(c_2+1)+a_3, r)$ и Γ_2 имеет параметры $k_2 = kr$, $\lambda(\Gamma_2) = rc_2 + (r-1)^2(c_2+1) + a_3$, $\mu(\Gamma_2) = r(r-1)(c_2+1)$.

Лемма 3.1. Γ *имеет собственные значения* $\theta_1 = r + a_3$, $-\theta_3 = c_2 + 1$ *и следующие числа пересечений*:

(1) $p^1_{11} = a_3 + r - 1$, $p^1_{21} = c_2 r$, $p^1_{22} = (c_2+1)(r-1)r$, $p^1_{32} = (a_3+1)r$, $p^1_{33} = (a_3+1)a_3/(c_2+1)$;

(2) $p^2_{11} = c_2$, $p^2_{21} = (c_2+1)(r-1)$, $p^2_{22} = c_2r^2 - c_2r + r^2 + a_3 + c_2 - 2r + 1$, $p^2_{31} = a_3 + 1$, $p^2_{32} = (a_3+1)(r-1)$, $p^2_{33} = (a_3+1)a_3/(c_2+1)$;

(3) $p^3_{21} = (c_2+1)r$, $p^322 = (c_2+1)(r-1)r$, $p^3_{31} = a_3$, $p^3_{32} = a_3 r$, $p^3_{33} = (a_3^2 - a_3c_2 + c_2r - c_2 + r - 1)/(c_2+1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.1 имеем $-\theta_1\theta_3 = k + a_3c_2 = (r+a_3)(c_2+1)$, $\theta_1 + \theta_3 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 - k = a_1 - c_2 = a_3 + r - 1 - c_2$. Отсюда $\theta_1 = r + a_3$, $-\theta_3 = c_2 + 1$.

Числа пересечений находятся прямыми вычислениями. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Кратности собственных значений графа* Γ *равны*
$(c_2r + a_3 + r + 1)(c_2r + a_3 + r)r/((a_3 + c_2 + r + 1)(c_2 + 1))$;
$(c_2r + a_3 + c_2 + r + 1)(c_2r + a_3 + r)(a_3 + 1)/((a_3 + r + 1)(c_2 + 1))$;
$(c_2r + a_3 + c_2 + r + 1)(c_2r + a_3 + r + 1)(c_2r + a_3 + r)/((a_3 + c_2 + r + 1)(a_3 + r + 1)(c_2 + 1))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Результат получен с помощью компьютерного упрощения формул из [1, лемма 2.2.6]. Лемма доказана.

Ввиду лемм 3.1, 3.2 число c_2+1 делит $a_3(a_3+1)$, a_3+r+1 делит $c_2(a_3, r+1)(c_2r-1)(a_3+1, r)$ и $a_3 + c_2 + r + 1$ делит $(c_2r - c_2 - 1)(c_2r - c_2)(r, a_3 + c_2 + 1)$.

В леммах 3.3–3.5 предполагается, что $a_3 = c_2$.

Лемма 3.3. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) $a_3+r+1=c_2+r+1$ *делит* $(c_2,r+1)^2(c_2r-1)(c_2+1,r)$ *и* $2c_2+r+1$ *делит* $(c_2r-c_2-1)(c_2r-c_2)(r,2c_2+1)$;

(2) $\bar\Gamma_3$ *является псевдогеометрическим графом для* $pG_{r(c_2+1)}(r(c_2+1)+c_2,r)$ *и* (c_2+r+1) *делит* $(r+1)^2(rc_2-1)$;

(3) *если* $r=c_2-1$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{r^2+3r+1,r(r+1),r+2;1,r+1,r(r+2)\}$ *и* Γ_2 *является псевдогеометрическим графом для* $pG_{(r-1)(r+2)}(r^2+3r+1,r-1)$, *где* r *нечетно и делится на* 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_3=c_2$. Тогда $a_3+r+1=c_2+r+1$ делит $(c_2,r+1)^2(c_2r-1)(c_2+1,r)$ и $2c_2+r+1$ делит $(c_2r-c_2-1)(c_2r-c_2)(r,2c_2+1)$.

Напомним, что $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{(c_2+1)}(r(c_2+1)+c_2,r)$ и (c_2+r+1) делит $(r+1)^2(rc_2-1)$.

Пусть $r=c_2-1$. Тогда $k_2=(r^2+3r+1)r$, $\lambda(\Gamma_2)=(r+1)^2+(r-1)^2(r+2)$, $\mu(\Gamma_2)=r(r-1)(r+2)$. Поэтому $\lambda(\Gamma_2)-\mu(\Gamma_2)=(r+1)^2-(r-1)(r+2)=r+3$, $k_2-\mu(\Gamma_2)=r(r^2+3r+1-(r^2+r-2))=r(2r+3)$ и Γ_2 имеет неглавные собственные значения $2r+3,-r$. Наконец, кратность собственного значения $2r+3$ равна $(r-1)(r^2+3r+1)r(r^2+3r+2)r/(3(r+1)r(r-1)(r+2))=(r^2+3r+1)r/3$ и r делится на 3. Заметим, что Γ_2 является псевдогеометрическим графом для $pG_{(r-1)(r+2)}(r^2+3r+1,r-1)$.

По условию целочисленности для графа $\bar\Gamma_3$ число r нечетно. Лемма доказана.

Напомним, что граф с массивом пересечений $\{19,12,5;1,4,15\}$ не существует по [12].

Лемма 3.4. *Если* $r=2c_2+1$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{49,36,5;1,4,45\}$ *и* Γ_2 *является псевдогеометрическим графом для* $pG_{40}(49,8)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r=2c_2+1$. По лемме 3.3 число $c_2+r+1=3c_2+2$ делит $4(c_2(2c_2+1)-1)$, $(3c_2+2,2c_2^2+c_2-1)$ делит $(6c_2^2+4c_2,6c_2^2+3c_2-3)$, $(3c_2+2,c_2+3)$ делит 7 и $3c_2+2$ делит 28. Отсюда $c_2=4$ и Γ имеет массив пересечений $\{49,36,5;1,4,45\}$. Далее, $k_2=441$, $\lambda(\Gamma_2)=360$, $\mu(\Gamma_2)=360$. Поэтому Γ_2 имеет неглавные собственные значения $9,-9$ и является псевдогеометрическим графом для $pG_{40}(49,8)$. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Если* $r=3c_2-3$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{49,36,5;1,4,45\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r=3c_2-3$. По лемме 3.3 число $c_2+r+1=4c_2-2$ делит $(r+1)^2(rc_2-1)=(3c_2-2)^2(3c_2(c_2-1)-1)$. Далее, $(2c_2-1,3c_2-2)=1$, $(2c_2-1,3c_2^2-3c_2-1)$ делит $(6c_2^2-3c_2,6c_2^2-6c_2-2)$, $(2c_2-1,3c_2+2)$ делит 7 и $2c_2-1$ делит 7. Отсюда $c_2=4$ и Γ имеет массив пересечений $\{49,36,5;1,4,45\}$. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Если* $c_2=2r+2$, *то выполняются следующие утверждения*:

(1) Γ *имеет массив пересечений* $\{2r^2+5r+2,r(2r+2),2r+3;1,2r+2,r(2r+3)\}$, $\bar\Gamma_3$ *является псевдогеометрическим графом для* $pG_{r(2r+3)}(2r^2+5r+2,r)$ *и* $3(r+1)$ *делит* $(r+1)^2(2r^2+2r-1)$;

(2) r *не делится на* 3 *и* r *не сравнимо с* -1 *по модулю* 5;

(3) $\bar\Gamma_2$ — *псевдогеометрический граф для* $pG_{(r-1)(2r+3)}(2r^2+5r+2,r-1)$ *и* r *не сравнимо с* ±-1 *по модулю* 5.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c_2=2r+2$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{2r^2+5r+2,r(2r+2),2r+3;1,2r+2,r(2r+2)\}$, $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r(2r+3)}(2r^2+5r+2,r)$ и $3(r+1)$ делит $(r+1)^2(2r^2+2r-1)$. Поэтому 3 делит $(r+1)(2r^2+2r-1)$ и r не делится на 3.

По лемме 3.3 $2c_2+r+1=5(r+1)$ делит $(2r^2-3)(2r-2)(r+1)(r,4r+5)$ и r не сравнимо с -1 по модулю 5. Далее, $3(r+1)$ делит $(r+1)^2(rc_2-1)$ и 3 делит $(r+1)(r(2r+2)-1)$, снова r не делится на 3.

Граф Γ_2 имеет параметры $k_2=(2r^2+5r+2)r$, $\lambda(\Gamma_2)=r(2r+2)+(r-1)^2(2r+3)+2r+2$, $\mu(\Gamma_2)=r(r-1)(2r+3)$. Поэтому $\lambda(\Gamma_2)-\mu(\Gamma_2)=2r^2+4r+2-(r-1)(2r+3)=3r+5$,

$k_2-\mu(\Gamma_2) = (2r^2+5r+2)r-r(r-1)(2r+3) = r(4r+5)$. Отсюда Γ_2 имеет неглавные собственные значения $4r+5, -r$. Наконец, кратность собственного значения $4r+5$ равна $(r-1)(2r^2+5r+2)r(2r^2+5r+3)r/(2r+3r(r-1)(5r+5)) = (2r^2+5r+2)r/5$ и r не сравнимо с ±-1 по модулю 5. Заметим, что Γ_2 является псевдогеометрическим графом для $pG_{(r-1)(2r+3)}(2r^2+5r+2, r-1)$. Лемма доказана.

Из лемм 3.3–3.6 следует теорема 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 0387506195.
2. **Makhnev A., Nirova M.** On distance-regular Shilla graphs with $b_2 = c_2$ // Mat. Zametki. 2018. Vol. 103, no. 5. P. 730–744. doi: 10.4213/mzm11503.
3. **Coolsaet K., Jurisic A.** Using equality in the Krein conditions to prove the nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory Ser. A. 2008. Vol. 115. P. 1086–1095. doi: 10.1007/s10623-012-9651-0.
4. **Shi M., Krotov D., Sole P.** A new distance-regular graph of diameter 3 on 1024 vertices [e-resource]. 2018. 12 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1806.07069.pdf.
5. **Gavrilyuk A., Makhnev A.** Distance-regular graph with intersection array $\{45, 30, 7; 1, 2, 27\}$ does not exist // Discrete Math. Appl. 2013. Vol. 23. P. 225–244.
6. **Gavrilyuk A., Makhnev A.** Distance-regular graphs with intersection arrays $\{52, 35, 16; 1, 4, 28\}$ and $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$ do not exist // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 65. P. 49–54.
7. **Urlep M.** Triple intersection numbers in Q-polinomial distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2012. Vol. 33. P. 1246–1252.
8. **Koolen J.H., Park J.** Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. Vol. 31, no. 8. P. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012.
9. **Nirova M.** On distance-regular graphs Γ with strongly regular Γ_2 and Γ_3 // Sibirean Electr. Math. Reports. 2018. Vol. 15. P. 175–185. doi: 10.17377/semi.2018.15.017.
10. **Jurisic A., Vidali J.** Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 65, no. 1-2. P. 29–47. doi: 10.1007/s10623-012-9651-0.
11. **Koolen J.H., Park J.** A relationship between the diameter and the intersection number c_2 for a distance-regular graphs // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 65, no. 1-2. P. 55–63. doi: 10.1007/s10623-011-9600-3.
12. **Degraer J.** Isomorphism-free exhaustive generation algorithms for association schemes: PHD. Gent: Univ. Gent., 2007. 240 p.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН,
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 11.05.2018

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук, главный. науч. сотрудник
профессор РАН,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195.

2. Makhnev A., Nirova M. On distance-regular Shilla graphs with $b_2 = c_2$// Mat. Zametki. 2018. Vol. 103, № 5. P. 730–744. doi: 10.4213/mzm11503 .
3. Coolsaet K., Jurisic A. Using equality in the Krein conditions to prove the nonexistence of certain distance-regular graphs. *J. Comb. Theory Ser. A.*, 2008, vol. 115, pp. 1086–1095. doi: 10.1007/s10623-012-9651-0 .
4. Shi M., Krotov D., Sole P. A new distance-regular graph of diameter 3 on 1024 vertices [e-resource]. 2018. 12 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/1806.07069.pdf .
5. Gavrilyuk A., Makhnev A. Distance-regular graph with intersection array $\{45, 30, 7; 1, 2, 27\}$ does not exist. *Discrete Math. Appl.*, 2013, vol. 23, pp. 225–244.
6. Gavrilyuk A., Makhnev A. Distance-regular graphs with intersection arrays $\{52, 35, 16; 1, 4, 28\}$ and $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$ do not exist. *Des. Codes Cryptogr.*, 2012, vol. 65, pp. 49–54.
7. Urlep M. Triple intersection numbers in Q-polinomial distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2012, vol. 33, pp. 1246–1252.
8. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 2064–2073. doi: 10.1016/j.ejc.2010.05.012 .
9. Nirova M. On distance-regular graphs Γ with strongly regular Γ_2 and Γ_3. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, vol. 15, pp. 175–185. doi: 10.17377/semi.2018.15.017 .
10. Jurisic A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3. *Des. Codes Cryptogr.*, 2012, vol. 65, no. 1-2, pp. 29–47. doi: 10.1007/s10623-012-9651-0 .
11. Koolen J.H., Park J. A relationship between the diameter and the intersection number c_2 for a distance-regular graphs. *Des. Codes Cryptogr.*, 2012, vol. 65, no. 1-2, pp. 55–63. doi: 10.1007/s10623-011-9600-3 .
12. Degraer J. Isomorph-free exhaustive generation algorithms for association schemes: PHD. Gent: Univ. Gent., 2007. 240 p.

The paper was received by the Editorial Office on May 11, 2018.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00061-П).

Aleksandr Alekseevich Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: makhnev@imm.uran.ru .

Dmitrii Viktorovich Paduchikh, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: dpaduchikh@gmail.com .