

УДК 512.542+519.175

**СТАБИЛИЗАТОРЫ ВЕРШИН ГРАФОВ
С ПРИМИТИВНЫМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ
И УСИЛЕННАЯ ВЕРСИЯ ГИПОТЕЗЫ СИМСА. IV¹**

А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов

Четвертая из цикла статей, результаты которого влекут справедливость усиленной версии гипотезы Симса о конечных примитивных группах подстановок. Данная статья посвящена рассмотрению случая примитивных групп подстановок с простым цоколем ортогонального лиева типа и непараболическим стабилизатором точки. Пусть G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G . Для каждого $i \in \mathbb{N}$ индуктивно определим подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ из $M_1 \cap M_2$, называемые нами i -ми взаимными ядрами подгруппы M_1 относительно M_2 и подгруппы M_2 относительно M_1 соответственно. Положим $(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1}$ и $(M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}$. Для $i \in \mathbb{N}$, предполагая, что $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ уже определены, положим $(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_1}$ и $(M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_2}$. Нас интересует случай, когда $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$. Множество всех таких троек (G, M_1, M_2) обозначается через Π . Мы рассматриваем тройки из Π с точностью до следующей эквивалентности: тройки (G, M_1, M_2) и (G', M'_1, M'_2) из Π эквивалентны, если существует изоморфизм G на G' , отображающий M_1 на M'_1 и M_2 на M'_2 .

В данной статье доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $L = \text{Soc}(G)$ — простая ортогональная группа степени ≥ 7 и $M_1 \cap L$ — непараболическая подгруппа в L . Тогда $L \cong O_8^+(r)$, где r — некоторое нечетное простое число, $(M_1, M_2)^3 = (M_2, M_1)^3 = 1$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(a) $r \equiv \pm 1 \pmod{8}$, группа G изоморфна $O_8^+(r) : \mathbb{Z}_3$ или $O_8^+(r) : S_3$, $(M_1, M_2)^2 = Z(O_2(M_1))$ и $(M_2, M_1)^2 = Z(O_2(M_2))$ — элементарные абелевы группы порядка 2^3 , $(M_1, M_2)^1 = O_2(M_1)$ и $(M_2, M_1)^1 = O_2(M_2)$ — специальные группы порядка 2^9 , группа $M_1/O_2(M_1)$ изоморфна $L_3(2) \times \mathbb{Z}_3$ или $L_3(2) \times S_3$ соответственно и $M_1 \cap M_2$ — силовская 2-подгруппа в M_1 ;

(b) $r \leq 5$, группа G/L либо содержит $\text{Outdiag}(L)$, либо изоморфна \mathbb{Z}_4 , $(M_1, M_2)^2 = Z(O_2(M_1 \cap L))$ и $(M_2, M_1)^2 = Z(O_2(M_2 \cap L))$ — элементарные абелевы группы порядка 2^2 , $(M_1, M_2)^1 = [O_2(M_1 \cap L), O_2(M_1 \cap L)]$ и $(M_2, M_1)^1 = [O_2(M_2 \cap L), O_2(M_2 \cap L)]$ — элементарные абелевы группы порядка 2^5 , $O_2(M_1 \cap L)/[O_2(M_1 \cap L), O_2(M_1 \cap L)]$ — элементарная абелева группа порядка 2^6 , группа $(M_1 \cap L)/O_2(M_1 \cap L)$ изоморфна S_3 , $|M_1 : M_1 \cap M_2| = 24$, $|M_1 \cap M_2 \cap L| = 2^{11}$ и элемент порядка 3 из $M_1 \cap M_2$ (при $G/L \cong A_4$ или $G/L \cong S_4$) индуцирует на группе L ее стандартный графовый автоморфизм.

В каждом из случаев (a) и (b) тройки (G, M_1, M_2) существуют и образуют один класс эквивалентности.

Ключевые слова: конечная примитивная группа подстановок, стабилизатор точки, гипотеза Симса, почти простая группа, группа ортогонального лиева типа.

A. S. Kondrat'ev, V. I. Trofimov. Stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. IV.

This is the fourth in a series of papers whose results imply the validity of a strengthened version of the Sims conjecture on finite primitive permutation groups. In this paper, the case of primitive groups with simple socle of orthogonal Lie type and nonparabolic point stabilizer is considered. Let G be a finite group, and let M_1 and M_2 be distinct conjugate maximal subgroups of G . For any $i \in \mathbb{N}$, we define inductively subgroups $(M_1, M_2)^i$ and $(M_2, M_1)^i$ of $M_1 \cap M_2$, which will be called the i th mutual cores of M_1 with respect to M_2 and of M_2 with respect to M_1 , respectively. Put $(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1}$ and $(M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}$. For $i \in \mathbb{N}$, assuming that $(M_1, M_2)^i$ and $(M_2, M_1)^i$ are already defined, put $(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_1}$ and $(M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_2}$. We are interested in the case when $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ and $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$. The set of all such triples (G, M_1, M_2) is denoted by Π . We consider triples from Π up to the following equivalence: triples (G, M_1, M_2) and (G', M'_1, M'_2) from Π are equivalent if there exists an isomorphism from G to G' mapping M_1 to M'_1 and M_2 to M'_2 . In the present paper, the following theorem is proved.

¹Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00061-П).

Theorem. Suppose that $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $L = \text{Soc}(G)$ is a simple orthogonal group of degree ≥ 7 , and $M_1 \cap L$ is a nonparabolic subgroup of L . Then $L \cong O_8^+(r)$, where r is an odd prime, $(M_1, M_2)^3 = (M_2, M_1)^3 = 1$, and one of the following statements holds:

(a) $r \equiv \pm 1 \pmod{8}$, the group G is isomorphic to $O_8^+(r) : \mathbb{Z}_3$ or $O_8^+(r) : S_3$, $(M_1, M_2)^2 = Z(O_2(M_1))$ and $(M_2, M_1)^2 = Z(O_2(M_2))$ are elementary abelian groups of order 2^3 , $(M_1, M_2)^1 = O_2(M_1)$ and $(M_2, M_1)^1 = O_2(M_2)$ are special groups of order 2^9 , the group $M_1/O_2(M_1)$ is isomorphic to $L_3(2) \times \mathbb{Z}_3$ or $L_3(2) \times S_3$, respectively, and $M_1 \cap M_2$ is a Sylow 2-subgroup in M_1 ;

(b) $r \leq 5$; G/L either contains $\text{Outdiag}(L)$ or is isomorphic to \mathbb{Z}_4 , $(M_1, M_2)^2 = Z(O_2(M_1 \cap L))$ and $(M_2, M_1)^2 = Z(O_2(M_2 \cap L))$ are elementary abelian groups of order 2^2 , $(M_1, M_2)^1 = [O_2(M_1 \cap L), O_2(M_1 \cap L)]$ and $(M_2, M_1)^1 = [O_2(M_2 \cap L), O_2(M_2 \cap L)]$ are elementary abelian groups of order 2^5 , $O_2(M_1 \cap L)/[O_2(M_1 \cap L), O_2(M_1 \cap L)]$ is an elementary abelian group of order 2^6 ; the group $(M_1 \cap L)/O_2(M_1 \cap L)$ is isomorphic to the group S_3 , $|M_1 : M_1 \cap M_2| = 24$, $|M_1 \cap M_2 \cap L| = 2^{11}$, and an element of order 3 from $M_1 \cap M_2$ (in the case $G/L \cong A_4$ or $G/L \cong S_4$) induces on the group L its standard graph automorphism.

In any of cases (a) and (b), the triples (G, M_1, M_2) from Π exist and form one class up to equivalence.

Keywords: finite primitive permutation group, stabilizer of a point, Sims conjecture, almost simple group, group of orthogonal Lie type.

MSC: 20B15, 20D06, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-109-132

Введение

Пусть G — группа и M_1, M_2 — подгруппы группы G . Следуя [3], для каждого $i \in \mathbb{N}$ индуктивно определим подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ из $M_1 \cap M_2$, называемые нами i -ми взаимными ядрами подгруппы M_1 относительно M_2 и подгруппы M_2 относительно M_1 соответственно. Положим

$$(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1}, \quad (M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}.$$

Для $i \in \mathbb{N}$, предполагая, что $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ уже определены, положим

$$(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_1}, \quad (M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_2}.$$

Нас интересует случай, когда G — конечная группа, M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G , $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$ (соответствующую мотивировку, связанную с усиленной версией гипотезы Симса, см. в [4, ч. I]). Множество всех таких троек (G, M_1, M_2) обозначается через Π . Мы рассматриваем тройки из Π с точностью до следующей эквивалентности: тройки (G, M_1, M_2) и (G', M'_1, M'_2) из Π эквивалентны, если существует изоморфизм G на G' , отображающий M_1 на M'_1 и M_2 на M'_2 . Отметим, что согласно [4, ч. I, предложение 1.1(a)] вторые взаимные ядра $(M_1, M_2)^2$ и $(M_2, M_1)^2$ являются p -группами для некоторого простого числа p .

Цель нашего цикла статей — описать множество Π . Это описание существенно усилит результаты из [3]. Ранее нами рассмотрены случаи, когда группа G не является почти простой группой или имеет простой знакопеременный цоколь и когда G — группа с простым цоколем $\text{Soc}(G)$ неортогонального лиева типа и $M_1 \cap \text{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\text{Soc}(G)$ (см. [4]). Данная статья цикла посвящена рассмотрению случая, когда G — группа с простым ортогональным цоколем $\text{Soc}(G)$ и $M_1 \cap \text{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\text{Soc}(G)$.

Доказана следующая

Теорема. Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $L = \text{Soc}(G)$ — простая ортогональная группа степени ≥ 7 и $M_1 \cap L$ — непараболическая подгруппа в L . Тогда $L \cong O_8^+(r)$, где r — некоторое нечетное простое число, $(M_1, M_2)^3 = (M_2, M_1)^3 = 1$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(a) $r \equiv \pm 1 \pmod{8}$, группа G изоморфна $O_8^+(r) : \mathbb{Z}_3$ или $O_8^+(r) : S_3$, $(M_1, M_2)^2 = Z(O_2(M_1))$ и $(M_2, M_1)^2 = Z(O_2(M_2))$ — элементарные абелевы группы порядка 2^3 , $(M_1, M_2)^1 = O_2(M_1)$

и $(M_2, M_1)^1 = O_2(M_2)$ — специальные группы порядка 2^9 , группа $M_1/O_2(M_1)$ изоморфна $L_3(2) \times \mathbb{Z}_3$ или $L_3(2) \times S_3$ соответственно и $M_1 \cap M_2$ — силовская 2-подгруппа в M_1 ;

(b) $r \leq 5$, группа G/L либо содержит $\text{Outdiag}(L)$, либо изоморфна \mathbb{Z}_4 , $(M_1, M_2)^2 = Z(O_2(M_1 \cap L))$ и $(M_2, M_1)^2 = Z(O_2(M_2 \cap L))$ — элементарные абелевы группы порядка 2^2 , $(M_1, M_2)^1 = [O_2(M_1 \cap L), O_2(M_1 \cap L)]$ и $(M_2, M_1)^1 = [O_2(M_2 \cap L), O_2(M_2 \cap L)]$ — элементарные абелевы группы порядка 2^5 , $O_2(M_1 \cap L)/[O_2(M_1 \cap L), O_2(M_1 \cap L)]$ — элементарная абелева группа порядка 2^6 , группа $(M_1 \cap L)/O_2(M_1 \cap L)$ изоморфна S_3 , $|M_1 : M_1 \cap M_2| = 24$, $|M_1 \cap M_2 \cap L| = 2^{11}$ и элемент порядка 3 из $M_1 \cap M_2$ (при $G/L \cong A_4$ или $G/L \cong S_4$) индуцирует на группе L ее стандартный графовый автоморфизм.

В каждом из случаев (a) и (b) тройки (G, M_1, M_2) существуют и образуют один класс эквивалентности.

В конце статьи указаны опечатки в [4, ч. III].

1. Обозначения и предварительные результаты

Используемые в статье терминология и обозначения в основном стандартны (см., например, [6; 8; 9; 12; 13]). Следуя [6], простая ортогональная группа степени n над полем $GF(q)$ обозначается через $O_n(q)$ для нечетного n и через $O_n^\varepsilon(q)$ для четного n , где $\varepsilon \in \{+, -\}$.

В доказательстве теоремы мы используем следующее общее утверждение о взаимных ядрах подгрупп.

Лемма 1.1. Пусть G — конечная группа и L — нормальная подгруппа в G . Тогда для произвольных подгрупп M_1, M_2 группы G и произвольного целого положительного числа i имеем

$$(M_1, M_2)^i \cap L \leq (M_1 \cap L, M_2 \cap L)^i.$$

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} (M_1, M_2)^1 \cap L &= (\cap_{g \in M_1} ((M_1 \cap M_2)^g)) \cap L \leq (\cap_{g \in M_1 \cap L} ((M_1 \cap M_2)^g)) \cap L \\ &= \cap_{g \in M_1 \cap L} ((M_1 \cap M_2 \cap L)^g) = (M_1 \cap L, M_2 \cap L)^1, \end{aligned}$$

утверждение справедливо для $i = 1$. Предположим, что утверждение справедливо для $i = i_0$, где i_0 — некоторое целое положительное число, и покажем, что тогда утверждение справедливо и для $i = i_0 + 1$. Для этого замечаем, что

$$\begin{aligned} (M_1, M_2)^{i_0+1} \cap L &= \left(\cap_{g \in M_1} ((M_1, M_2)^{i_0} \cap (M_2, M_1)^{i_0})^g \right) \cap L \\ &\leq (M_1, M_2)^{i_0} \cap \left(\cap_{g \in M_1 \cap L} (((M_2, M_1)^{i_0})^g) \right) \cap L \\ &= ((M_1, M_2)^{i_0} \cap L) \cap \left(\cap_{g \in M_1 \cap L} (((M_2, M_1)^{i_0} \cap L)^g) \right) \\ &\leq (M_1 \cap L, M_2 \cap L)^{i_0} \cap \left(\cap_{g \in M_1 \cap L} (((M_2 \cap L, M_1 \cap L)^{i_0})^g) \right) \\ &= \cap_{g \in M_1 \cap L} \left(((M_1 \cap L, M_2 \cap L)^{i_0} \cap (M_2 \cap L, M_1 \cap L)^{i_0})^g \right) = (M_1 \cap L, M_2 \cap L)^{i_0+1}. \end{aligned}$$

□

В дальнейшем пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $\text{Soc}(G)$ — простая ортогональная группа $O_n(q)$ ($n \geq 7$ и nq нечетно) или $O_n^\varepsilon(q)$ ($n \geq 8$ четно и $\varepsilon \in \{+, -\}$), где q — степень простого числа r , $M_1 \cap \text{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\text{Soc}(G)$ и $M_2 = M_1^g = gM_1g^{-1}$, где $g \in G$. Положим для краткости $L = \text{Soc}(G)$ (мы считаем, что $L = \text{Inn}(L) \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(L)$), $M = M_1$, $M_0 = M \cap L$, $K_1 = (M_1, M_2)^2$, $K_2 = (M_2, M_1)^2$, $T_1 = K_1 \cap L$, $T_2 = K_2 \cap L$, $R_1 = O_p((M_1, M_2)^1)$ и $R_2 = O_p((M_2, M_1)^1)$. Ввиду [4, ч. I, предложение 1.1; 4, ч. II, предложение 1.1] подгруппа M

есть p -локальная максимальная подгруппа в G с $F^*(M) = O_p(M)$ для некоторого простого числа p (отличного от r), $F^*(M_0) = O_p(M_0)$, $G = ML$, $K_1 K_2 \leq R_1 \cap R_2 \leq O_p(M_1) \cap O_p(M_2)$, где $R_1 = O_p((M_1, M_2)^1)$, $R_2 = O_p((M_2, M_1)^1)$ и $K_1 \neq K_2$. Поскольку $G = ML$, будем считать, что $g \in L$. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем $F = \mathbb{F}_q$ с невырожденной квадратичной формой, ассоциированное с ортогональной группой L . Естественным образом считаем, что $L = O(V) \leq PSO(V) \leq PGO(V) \leq PCGO(V) \leq PGO(V) \leq Aut(L)$, причем $G \leq PGO(V)$ при $L \cong O_8^+(q)$ (мы используем обозначения из [8]).

Для произвольной подгруппы H группы $PGO(V)$ через \tilde{H} обозначается полный прообраз H при естественном гомоморфизме $GO(V) \rightarrow PGO(V)$. Для произвольного элемента h группы $PGO(V)$ через \tilde{h} обозначается (некоторый) его прообраз при естественном гомоморфизме $GO(V) \rightarrow PGO(V)$. Для произвольного элемента h группы $GO(V)$ через \bar{h} обозначается его образ при естественном гомоморфизме $GO(V) \rightarrow PGO(V)$.

Для векторного пространства мы используем как синонимы термины “одномерное подпространство” и “прямая”.

Под графовым автоморфизмом группы $O_8^+(q)$ будем понимать ее автоморфизм, определенный в [13, определение 2.5.13(b)], под стандартным графовым автоморфизмом группы $O_8^+(q)$ — ее автоморфизм, $Aut(O_8^+(q))$ -сопряженный с автоморфизмом из [13, теорема 2.5.1(d)].

Лемма 1.2. *Выполняется одно из следующих утверждений:*

- (i) *подгруппы K_1 и K_2 имеют нетривиальные пересечения с L ;*
- (ii) *$L \cong O_8^+(q)$, q нечетно, $p = 2$, $LE = Inndiag(L) < G$ для некоторой четверной подгруппы E , $M = N_L(E)$ и G содержит графовый автоморфизм порядка 3 группы L .*

Доказательство. Предположим, что п. (i) не верен, и пусть $K_1 \cap L = 1$ (случай $K_2 \cap L = 1$ рассматривается аналогично). Поскольку K_1 — неединичная нормальная p -подгруппа в M , существует минимальная неединичная нормальная в M подгруппа E , содержащаяся в K_1 . Ясно, что $M_0 = C_L(E)$.

Ввиду минимальности E , равенства $G = ML$ и [13, 2.5.12] либо $LE = Inndiag(L)$ и выполняется п. (ii), либо подгруппа E порождается некоторым элементом x порядка p . Таким образом, можно считать, что выполняется второй случай и, следовательно, $M_0 = C_L(x)$ и $M = N_G(\langle x \rangle)$. Элемент x индуцирует на L внешний автоморфизм порядка p . Согласно [13, 2.5.12] этот автоморфизм внутренне-диагональный, графовый, полевой или графово-полевой. Ввиду [13, 4.5.1, 4.7.3, 4.8.2, 4.9.1] и максимальности в G подгруппы M это противоречит равенству $F^*(M_0) = O_p(M_0)$. \square

2. Доказательство теоремы в случае, когда группа L не изоморфна $O_8^+(q)$

В данном разделе предполагается, что группа L не изоморфна $O_8^+(q)$.

Согласно теореме 2.2.19 из [8], являющейся уточненной версией теоремы Ашбахера [5], группа M принадлежит одному из классов Ашбахера $C_i(G)$ геометрических подгрупп группы G для $1 \leq i \leq 8$, которые мы определяем как факторгруппы по $Z(\tilde{G})$ геометрических подгрупп группы \tilde{G} из соответствующих ее классов C_i , определенных в [8, разд. 2.2]. Возможное строение $\tilde{M}_1 \cap \Omega(V)$ приведено в [8, табл. 2.3, 2.5–2.11].

Далее мы рассмотрим возможность включения подгруппы M в каждый класс $C_i(G)$, $1 \leq i \leq 8$, в отдельности.

Лемма 2.1. $M \notin C_1(G)$.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Тогда ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [8, табл. 2.3; 15, разд. 2.9, 4.1; 13, теорема 4.5.1] имеем $L \cong O_7(3)$, $M_0 \cong SO_3(3) \times SO_4^+(3) \cong S_4 \times ((SL_2(3) \circ SL_2(3)).2)$.

Ввиду леммы 1.2 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Положим $Z_i = Z(O_2(M_i \cap L))$ и $\langle z_i \rangle = [O_2(M_i \cap L), O_2(M_i \cap L)]$ для $i \in \{1, 2\}$. Можно считать, что $z_1^g = z_2$. Поскольку $T_1 T_2 \leq R_1 \cap R_2$, имеем $[T_i, T_i] \leq \langle z_1 \rangle \cap \langle z_2 \rangle = 1$ для $i \in \{1, 2\}$. Поэтому подгруппы T_1 и T_2 абелевы, а значит, подгруппы $Z_1 T_1$ и $Z_2 T_2$ абелевы.

Покажем, что $T_i \leq Z_i$ для $i \in \{1, 2\}$. Предположим противное, т. е. что $T_i \not\leq Z_i$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Подгруппа $M_i \cap L$ действует неприводимо на $O_2(M_i \cap L)/Z_i$, следовательно, $Z_i T_i = O_2(M_i \cap L)$, что противоречит некоммутативности подгруппы $O_2(M_i \cap L)$. Поэтому наше утверждение доказано.

Ввиду [6] подгруппа M_0 содержит некоторую силовскую 2-подгруппу S группы L и $N_L(S) < M_0$. Теорема Бернсайда [12, теорема 7.1.1] влечет, что подгруппа $\langle z_1 \rangle$ сильно замкнута в $Z(S)$ относительно L . Поэтому подгруппа $\langle z_1 \rangle$ сильно замкнута в $Z(O_2(M) \cap L)$ относительно L , а следовательно, подгруппа $\langle z_2 \rangle$ сильно замкнута в $Z(O_2(M_2) \cap L)$ относительно L .

Предположим, что T_2 не лежит в Z_1 . Тогда $C_{O_2(M) \cap L}(T_2) = Z_1 T_2 \leq M_1 \cap M_2$ и, следовательно, $Z_1 < Z_1 T_2 \leq R_1$. Подгруппа $M_1 \cap L$ действует неприводимо на $O_2(M_1 \cap L)/Z_1$, поэтому $R_1 \cap L = O_2(M_1 \cap L)$ и, следовательно, коммутант и центр подгруппы $R_1 \cap L$ равны $\langle z_1 \rangle$ и Z_1 соответственно. Подгруппа T_2 нормальна в R_1 и не содержится в Z_1 , следовательно, $\langle z_1 \rangle \leq [T_2, R_1 \cap L] \leq T_2$. Но тогда по предыдущему абзацу имеем $\langle z_1 \rangle = \langle z_2 \rangle$, что невозможно.

Итак, T_2 лежит в Z_1 . Ясно, что $T_2 < Z_1$. Аналогично получаем, что $T_1 < Z_2$. Тогда $|T_1|, |T_2| \leq 4$. Если $|T_1| = 2$, то $T_1 = \langle z_1 \rangle < Z_2$ и, следовательно, $\langle z_1 \rangle = \langle z_2 \rangle$, что невозможно. Аналогично получаем, что $|T_2| \neq 2$. Поэтому T_i — единственная четверная минимальная нормальная подгруппа в $M_i \cap L$ для $i \in \{1, 2\}$. Но тогда $Z_1 \cap Z_2 = T_1 = T_2$, что невозможно. \square

Лемма 2.2. $M \notin C_6(G)$.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Тогда согласно [8, табл. 2.9] имеем, что $O_p(M_0)$ — (нетривиальная) элементарная абелева группа, на которой группа $M_0/O_p(M_0)$ действует неприводимо. Так как согласно лемме 1.2 для каждого $i \in \{1, 2\}$ нормальная p -подгруппа T_i группы M_i неединична, то отсюда следует, что $T_i = O_p(M_i \cap L)$ для каждого $i \in \{1, 2\}$ и, в частности, $|T_1| = |T_2|$. Но $T_2 \leq O_p(M_1) \cap L = O_p(M_1 \cap L)$. Следовательно, $T_1 = T_2$, что невозможно. \square

Лемма 2.3. $M \notin C_i(G)$ для $i \in \{3, 4, 5, 7, 8\}$.

Доказательство. Лемма следует из равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [8, табл. 2.6–2.8, 2.10, 2.11; 15, разд. 2.9, 4.3, 4.4, 4.5, 4.7, 4.8]. \square

Лемма 2.4. $M \notin C_2(G)$.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Согласно [8, теорема 2.2.19.(i).(b)] подгруппа \widetilde{M}_1 есть стабилизатор в G ортогонального разложения $V = V_1 + \dots + V_t$ пространства V на изометричные невырожденные подпространства V_1, \dots, V_t , где $t \geq 2$ и $\dim V_i = m = n/t$ для всех $1 \leq i \leq t$, одного из перечисленных в [8, табл. 2.4] типов. В [8, табл. 2.5] для каждого из этих типов указано строение группы $M_0 = M_1 \cap L$ (точнее, группы $\widetilde{M}_0 \cap \Omega(V)$ — стабилизатора разложения в группе $\Omega(V)$), см. [8, теорема 2.2.19.(i).(b)]. Из этого строения и равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ следует, что $m \leq 4$ и $t \geq 3$. Отметим также, что согласно [8, табл. 2.5] (см. также [8, лемма 2.2.4]) группа M_0 индуцирует на множестве $\{V_1, \dots, V_t\}$ симметрическую или знакопеременную группу подстановок. Кроме того, в силу леммы 1.2 подгруппы $K_1 \cap L$ и $K_2 \cap L$ нетривиальны.

Положим $C_1 = \{h \in G: h(V_i) = V_i \text{ для всех } 1 \leq i \leq t\}$ — ядро действия M_1 на множестве $\{V_1, \dots, V_t\}$, $C_2 = gC_1g^{-1}$ — ядро действия M_2 на множестве $\{g(V_1), \dots, g(V_t)\}$. Имеет место включение

$$O_p(M_1) \leq C_1. \quad (2.1)$$

Действительно, из строения группы M_0 (см. [8, табл. 2.5]) легко следует справедливость (2.1) в случае $m \geq 3$, а также в случае $t \geq 5$ (в последнем случае достаточно воспользоваться тем, что M_0 индуцирует на $\{V_1, \dots, V_t\}$ либо симметрическую группу, либо знакопеременную группу). Что касается случая, когда $m \leq 2$ и $t \leq 4$, то он невозможен в силу $n \geq 7$ и $L \not\cong O_8^+(q)$.

Поскольку K_1 и K_2 являются подгруппами группы $O_p(M_1) \cap O_p(M_2)$, то из (2.1) следует

$$\langle K_1, K_2 \rangle \leq C_1 \cap C_2. \quad (2.2)$$

Так как $\{V_1, \dots, V_t\} \neq \{g(V_1), \dots, g(V_t)\}$ (поскольку $M_1 \neq M_2$), будем, не теряя общности, предполагать, что $g(V_1) \notin \{V_1, \dots, V_t\}$. Тогда найдется $w \in \tilde{g}(V_1)$ такой, что $w = w_1 + \dots + w_t$, где $w_i \in V_i$ для каждого $1 \leq i \leq t$, причем $w_k \neq 0 \neq w_l$ для некоторых $1 \leq k < l \leq t$.

С л у ч а й $m = 1$. Поскольку $1 \neq K_1 \cap L \trianglelefteq M_1$ (см. лемму 1.2), причем $K_1 \leq C_1$ (см. (2.2)), а M_1 индуцирует на множестве $\{V_1, \dots, V_t\}$ группу подстановок, содержащую знакопеременную группу, то согласно [8, табл. 2.5] некоторый элемент $h \in K_1 \cap L$ не стабилизирует подпространство $\langle w_k + w_l \rangle$ векторного пространства V . Но тогда (учитывая, что $h \in C_1$) элемент h не стабилизирует и подпространство $\langle w_1 + \dots + w_t \rangle = \langle w \rangle = g(V_1)$ векторного пространства V . Полученное противоречие с $K_1 \leq C_2$ (см. (2.2)) завершает рассмотрение случая $m = 1$.

С л у ч а й $m = 2$. Согласно [8, табл. 2.5] для \tilde{G} и \tilde{M}_1 имеет место случай \mathbf{O}^ε , тип $GO_2^{\varepsilon_1}(q) \wr S_t$. Далее, согласно [8, табл. 2.4] V_i невырождено и $\varepsilon_1 = \text{sgn}(V_i)$ для каждого $1 \leq i \leq t$, а $\varepsilon = -$ лишь при $\varepsilon_1 = -$ и нечетном t .

Если $\varepsilon_1 = +$, то, с учетом [8, табл. 2.5] и $O(V) = [PGO(V), PGO(V)]$, для каждого $1 \leq i \leq t$ стабилизатор V_i в группе $M_1 \cap O(V) = M_0$, индуцирует на множестве одномерных подпространств пространства V_i группу $PGO(V_i) \cong PGO_2^+(q) \cong D_{(2,q)(q-1)}$. Более того, для произвольных различных $1 \leq i_1, i_2 \leq t$ в M_0 имеется подгруппа R_{i_1, i_2} , стабилизирующая все одномерные подпространства пространств V_j , $1 \leq j \leq t$, $i_1 \neq j \neq i_2$, и индуцирующая на множестве одномерных подпространств пространства V_{i_1} группу $PGO(V_{i_1})$, а на множестве одномерных подпространств пространства V_{i_2} группу $PGO(V_{i_2})$. Отметим, что группа $PGO(V_i)$, $1 \leq i \leq t$, действует транзитивно на множестве (из $q-1$) несингулярных прямых V_i в случае четного q , а в случае нечетного q имеет на этом множестве в точности две орбиты, длиной $(q-1)/2$ каждая, являющиеся множеством несингулярных прямых V_i , значения квадратичной формы на векторах которых являются квадратами в поле F , и множеством прямых V_i , значения квадратичной формы на ненулевых векторах которых не являются квадратами в поле F .

Если $\varepsilon_1 = -$, то для каждого $1 \leq i \leq t$ подпространство V_i пространства V не содержит ненулевых сингулярных векторов и, с учетом [8, табл. 2.5] и $O(V) = [PGO(V), PGO(V)]$, ограничение на множество прямых V_i стабилизатора V_i в группе $M_1 \cap O(V) = M_0$, есть группа $PGO(V_i) \cong PGO_2^-(q) \cong D_{(2,q)(q+1)}$, индуцированная группой $GO(V_i) \cong GO_2^-(q) \cong D_{2(q+1)}$ и действующая транзитивно как на множестве прямых V_i , значения квадратичной формы на векторах которых являются квадратами в поле F , так и, в случае нечетного q , на множестве прямых V_i , значения квадратичной формы на ненулевых векторах которых не являются квадратами в поле F .

Из равенства $F^*(M_1 \cap L) = O_p(M_1 \cap L)$ с учетом [8, предложение 2.3.6] и [11] следует, что при $\varepsilon_1 = +$ либо $q = 9$ (при этом $p = 2$), либо q — простое нечетное число > 3 и $q-1$ — степень 2 (при этом $p = 2$), либо q — степень 2 и $q-1$ — простое нечетное число (при этом $p = q-1$), а при $\varepsilon_1 = -$ либо $q = 8$ (при этом $p = 3$), либо q — простое нечетное число и $q+1$ — степень 2 (при этом $p = 2$), либо q — степень 2 и $q+1$ — простое нечетное число (при этом $p = q+1$).

Рассмотрим отдельно случаи нечетного и четного q .

Предположим, что q нечетно (и, следовательно, $p = 2$). При этом предположении из вида M_0 (см. [8, табл. 2.5]) и $1 \neq K_1 \cap L \trianglelefteq M_1$ (см. лемму 1.2) следует существование для произвольных различных $1 \leq i_1, i_2 \leq t$ элемента h_{i_1, i_2} группы $\tilde{K}_1 \cap \tilde{L}$, который действует тождественно на каждом из подпространств V_i , $1 \leq i \leq t$, $i_1 \neq i \neq i_2$, векторного пространства V и

инвертирует подпространства V_{i_1} и V_{i_2} . Кроме того, из вида M_0 и $1 \neq g^{-1}(K_2 \cap L)g \leq M_1$ (см. лемму 2.2) следует, что $\tilde{g}h_{i_1, i_2}\tilde{g}^{-1} \in \tilde{K}_2 \cap \tilde{L} \leq O_2((M_1, M_2)^1)$ для всех $1 \leq i_1, i_2 \leq t$, $i_1 \neq i_2$. В частности, учитывая (2.2), для произвольных различных $1 \leq i_1, i_2 \leq t$ получаем, что элементы h_{i_1, i_2} и $\tilde{g}h_{i_1, i_2}\tilde{g}^{-1}$ содержатся в $\tilde{C}_1 \cap \tilde{C}_2 \cap \tilde{L}$.

Покажем, что если $\tilde{g}(V_i) \notin \{V_1, \dots, V_t\}$, где $1 \leq i \leq t$, то для некоторых $1 \leq i' < i'' \leq t$ имеем $\dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''})$, и что, аналогично, если $V_i \notin \{\tilde{g}(V_1), \dots, \tilde{g}(V_t)\}$, где $1 \leq i \leq t$, то для некоторых $1 \leq i' < i'' \leq t$ имеем $\dim(V_i \cap \tilde{g}(V_{i'})) = 1 = \dim(V_i \cap \tilde{g}(V_{i''}))$.

Следующие рассуждения аналогичны рассуждениям из доказательства леммы 2.8 (в случае $m = 2$) в [4, ч. III]. Пусть $\tilde{g}(V_i) \notin \{V_1, \dots, V_t\}$, где $1 \leq i \leq t$. Тогда найдется $v \in \tilde{g}(V_i)$ такой, что $v = v_1 + \dots + v_t$, где $v_j \in V_j$ для всех $1 \leq j \leq t$, причем $v_{i'} \neq 0 \neq v_{i''}$ для некоторых $1 \leq i' < i'' \leq t$. Докажем, что $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'} = \langle v_{i'} \rangle$ и $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''} = \langle v_{i''} \rangle$, для чего, очевидно, достаточно доказать, что $\tilde{g}(V_i)$ содержит $v_{i'}$ и $v_{i''}$. Но с учетом $h_{i', i''} \in \tilde{C}_2$ имеем $v_{i'} + v_{i''} = \frac{1}{2}(v - h_{i', i''}(v)) \in \tilde{g}(V_i)$, что с учетом $h_{i', j'} \in \tilde{C}_2$, где $1 \leq j' \leq t$, $i'_1 \neq j' \neq i''$, влечет $v_{i'} = \frac{1}{2}(v_{i'} + v_{i''} - h_{i', j'}(v_{i'} + v_{i''})) \in \tilde{g}(V_i)$ и $v_{i''} = \frac{1}{2}(v_{i'} + v_{i''} + h_{i', j'}(v_{i'} + v_{i''})) \in \tilde{g}(V_i)$, завершая доказательство первой части утверждения. Вторая часть утверждения доказывается сходным образом. Пусть $V_i \notin \{\tilde{g}(V_1), \dots, \tilde{g}(V_t)\}$, где $1 \leq i \leq t$. Тогда найдется $v \in V_i$ такой, что $v = v_1 + \dots + v_t$, где $v_j \in \tilde{g}(V_j)$ для всех $1 \leq j \leq t$, причем $v_{i'} \neq 0 \neq v_{i''}$ для некоторых $1 \leq i' < i'' \leq t$. Докажем, что $V_i \cap \tilde{g}(V_{i'}) = \langle v_{i'} \rangle$ и $V_i \cap \tilde{g}(V_{i''}) = \langle v_{i''} \rangle$, для чего, очевидно, достаточно доказать, что V_i содержит $v_{i'}$ и $v_{i''}$. Но с учетом $\tilde{g}h_{i', i''}\tilde{g}^{-1} \in \tilde{C}_1$ (выше было замечено, что $\tilde{g}h_{i_1, i_2}\tilde{g}^{-1} \in \tilde{C}_1$ для произвольных $1 \leq i_1, i_2 \leq t$, $i_1 \neq i_2$) имеем $v_{i'} + v_{i''} = \frac{1}{2}(v - \tilde{g}h_{i', i''}\tilde{g}^{-1}(v)) \in V_i$, что с учетом $\tilde{g}h_{i', j'}\tilde{g}^{-1} \in \tilde{C}_1$, где $1 \leq j' \leq t$, $i'_1 \neq j' \neq i''$, влечет $v_{i'} = \frac{1}{2}(v_{i'} + v_{i''} - \tilde{g}h_{i', j'}\tilde{g}^{-1}(v_{i'} + v_{i''})) \in V_i$ и $v_{i''} = \frac{1}{2}(v_{i'} + v_{i''} + \tilde{g}h_{i', j'}\tilde{g}^{-1}(v_{i'} + v_{i''})) \in V_i$, завершая доказательство утверждения.

Из доказанного утверждения вытекает справедливость следующих утверждений: $w = w_k + w_l$, $\tilde{g}(V_1) = \langle w_k, w_l \rangle$, $\langle w_k \rangle = V_k \cap \tilde{g}(V_1)$ и $\langle w_l \rangle = V_l \cap \tilde{g}(V_1)$, причем w_k и w_l не являются сингулярными (поскольку $(w_k, w_l) = 0$, а $\tilde{g}(V_1)$ невырождено) и лишь $\langle w_k \rangle$ и $\langle w_l \rangle$ являются одномерными подпространствами как некоторых V_i , $1 \leq i \leq t$, так и $\tilde{g}(V_1)$. Кроме того, поскольку $\dim(V_k \cap g(V_{i_0})) = 1$, из доказанного утверждения вытекает существование такого $2 \leq i_0 \leq t$, что $\dim(V_k \cap g(V_{i_0})) = 1$.

Пусть $1 \leq j \leq t$, $k \neq j \neq l$. Тогда элемент $h_{k, j}$ инвертирует вектор w_k и стабилизирует вектор w_l . Ясно, что $h_{k, j}$ нетривиально действует на множестве одномерных подпространств из $\tilde{g}(V_1)$, и, следовательно, не стабилизирует отличных от $\langle w_k \rangle$, $\langle w_l \rangle$ одномерных подпространств из $\tilde{g}(V_1)$.

Если $\varepsilon_1 = +$ и $q > 5$ (и тогда, см. выше, $q \geq 9$) или $\varepsilon_1 = -$ и $q > 3$ (и тогда, см. выше, $q \geq 7$), то для группы $R_{1, j'}^g$, где $2 \leq j' \leq t$ и $j' \neq i_0$, стабилизирующей все одномерные подпространства пространства $\tilde{g}(V_i)$, где $1 \leq i \leq t$ и $1 \neq i \neq j'$, содержащая $\langle w_k \rangle$ орбита на множестве одномерных подпространств пространства $\tilde{g}(V_1)$ имеет длину > 2 , и потому для некоторого $h \in R_{1, j'}^g$ элемент $\bar{h}_{k, j}$ не стабилизирует $h(\langle w_k \rangle)$, т. е.

$$h^{-1}\bar{h}_{k, j}h(\langle w_k \rangle) \neq \langle w_k \rangle. \quad (2.3)$$

В силу $h \in R_{1, j'}^g \leq M_1^g = M_2$ и $\bar{h}_{k, j} \in K_1 \leq (M_2, M_1)^1$ имеем $h^{-1}\bar{h}_{k, j}h \leq (M_2, M_1)^1 \leq M_1$. Таким образом, элемент $\tilde{h}^{-1}h_{k, j}\tilde{h}$ стабилизирует разложение $V = V_1 + \dots + V_t$. Кроме того, элемент $\tilde{h}^{-1}h_{k, j}\tilde{h}$ стабилизирует подпространство $\tilde{g}(V_1)$ пространства V , поскольку элементы \tilde{h} и $h_{k, j}$ стабилизируют $\tilde{g}(V_1)$. Так как лишь $\langle w_k \rangle$ и $\langle w_l \rangle$ являются одномерными подпространствами как некоторых V_i , $1 \leq i \leq t$, так и $\tilde{g}(V_1)$, из (2.3) следует, что $\tilde{h}^{-1}h_{k, j}\tilde{h}(\langle w_k \rangle) = \langle w_l \rangle$, а значит, $\tilde{h}^{-1}h_{k, j}\tilde{h}(V_k) = V_l$. Однако последнее равенство противоречит тому, что, поскольку элемент \tilde{h} стабилизирует каждое одномерное подпространство пространства $\tilde{g}(V_{i_0})$ и элемент $h_{k, j}$ стабилизирует каждое одномерное подпространство пространства V_k , имеет место равенство $\tilde{h}^{-1}h_{k, j}\tilde{h}(V_k \cap \tilde{g}(V_{i_0})) = V_k \cap \tilde{g}(V_{i_0})$.

Пусть $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$. Тогда для $1 \leq i \leq t$ группа $PGO(V_i)$ имеет на множестве несингулярных прямых пространства V_i две орбиты длины 2. А именно, если $\{e, f\}$ — гиперболическая пара гиперболической плоскости V_i , то $PGO(V_i)$ -орбитами на множестве несингулярных прямых V_i являются $X_i^- = \{\langle e + f \rangle, \langle e - f \rangle\}$ и $X_i^+ = \{\langle e + 2f \rangle, \langle e - 2f \rangle\}$, т. е. в точности все пары ортогональных несингулярных прямых V_i . Если v — ненулевой вектор прямой из X_i^- , то (v, v) не есть квадрат в поле F , а если v — вектор прямой из X_i^+ , то (v, v) есть квадрат в поле F .

Сходная ситуация имеет место при $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$. В этом случае для $1 \leq i \leq t$ группа $PGO(V_i)$ имеет на множестве прямых пространства V_i две орбиты X_i^- и X_i^+ длины 2 со следующими свойствами: если v — ненулевой вектор прямой из X_i^- , то (v, v) не есть квадрат в поле F , а если v — вектор прямой из X_i^+ , то (v, v) есть квадрат в поле F . При этом множества X_i^- , X_i^+ и только они являются парами ортогональных прямых V_i .

Дальнейшие рассуждения применимы как в случае $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$, так и в случае $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$. Для $1 \leq i \leq t$ ограничение на множество прямых V_i стабилизатора этого множества в группе M_1 содержит группу $PGO(V_i)$ (см. выше), но отлично от $PGO(V_i)$, что можно усмотреть из [15, предложение 6.2.11] и [8]. (Если ограничение на множество прямых V_i стабилизатора этого множества в группе M_1 есть группа $PGO(V_i)$, то группа \widetilde{M}_1 содержится в стабилизаторе ортогонального разложения V в сумму образов $\langle w_k \rangle$ под действием элементов из \widetilde{G} , причем содержится собственным образом, поскольку этот стабилизатор индуцирует на множестве слагаемых разложения группу, содержащую знакопеременную группу A_n , а группа M_1 не имеет секций, изоморфных A_n .) Следовательно, для $1 \leq i \leq t$ ограничение на множество прямых V_i стабилизатора этого множества в группе M_1 есть группа $PCGO(V_i)$. Но тогда, учитывая, что \widetilde{M}_0 индуцирует на множестве слагаемых разложения $V = V_1 + \dots + V_t$ симметрическую группу (см. [8, табл. 2.5]), заключаем, что в M_1 имеется элемент $h \in PCGO(V) \setminus PGO(V)$, который для каждого $1 \leq i \leq t$ оставляет на месте множество прямых подпространства V_i . Элемент h меняет при этом местами множества X_i^- и X_i^+ для каждого $1 \leq i \leq t$. Действительно, в противном случае имеются такие $1 \leq i_1, i_2 \leq t$, $i_1 \neq i_2$, что h меняет местами множества $X_{i_1}^-$ и $X_{i_1}^+$, а множества $X_{i_2}^-$ и $X_{i_2}^+$ стабилизирует. Но в группе \widetilde{M}_0 найдется элемент, меняющий местами V_{i_1} и V_{i_2} , и коммутатор этого элемента и элемента \tilde{h} меняет местами множества $X_{i_2}^-$ и $X_{i_2}^+$, что противоречит $[\widetilde{M}_0, \tilde{h}] \leq \tilde{L}$.

Пусть $\tilde{g}(V_i) \notin \{V_1, \dots, V_t\}$, где $1 \leq i \leq t$. Тогда, как было доказано выше, найдутся $1 \leq i', i'' \leq t$, $i' \neq i''$, такие, что $\dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''})$. Покажем, что для некоторого $1 \leq i^* \leq t$, $i^* \neq i$, также имеем $\dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i''})$, причем $\{\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}\} = X_{i'}^\xi$ и $\{\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i''}\} = X_{i''}^\xi$ для некоторого $\xi \in \{-, +\}$.

Так как $V_{i'} \notin \{\tilde{g}(V_1), \dots, \tilde{g}(V_t)\}$ (поскольку $\dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}) = 1$), то из доказанного выше следует существование такого $1 \leq i^* \leq t$, $i^* \neq i$, что $\dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}) = 1$. Ясно, что $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}$ и $\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}$ несингулярны (поскольку $V_{i'} = \langle \tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'} \rangle$ невырождено). Пусть $j' \in \{1, \dots, t\} \setminus \{i, i^*\}$. Тогда элемент $\tilde{g}h_{i,j'}\tilde{g}^{-1}$ из $\widetilde{K}_2 \cap \tilde{L} \leq O_2((M_1, M_2)^1) \cap \tilde{L}$ (см. выше) инвертирует $\tilde{g}(V_i)$ и централизует $\tilde{g}(V_{i^*})$, а следовательно, меняет местами несингулярные прямые подпространства $V_{i'}$ пространства V , отличные от $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}$ и $\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}$. Поскольку определенный выше элемент h группы M_1 меняет местами множества X_i^- и X_i^+ , отсюда следует, что содержащийся в $O_2((M_1, M_2)^1) \cap \tilde{L} \leq \widetilde{C}_1 \cap \widetilde{M}_2 \cap \tilde{L}$ элемент $\tilde{h}g h_{i,j'}\tilde{g}^{-1}\tilde{h}^{-1}$ меняет местами прямые $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}$ и $\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}$. Но тогда элемент $\tilde{h}\tilde{g}h_{i,j'}\tilde{g}^{-1}\tilde{h}^{-1}$ меняет местами $\tilde{g}(V_i)$ и $\tilde{g}(V_{i^*})$, оставляя на месте $V_{i'}$ и $V_{i''}$. Отсюда следует, что $\dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i''}) = 1$. Кроме того, с учетом $\tilde{h}\tilde{g}h_{i,j'}\tilde{g}^{-1}\tilde{h}^{-1} \in \tilde{L}$ отсюда следует, что $\{\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}\} = X_{i'}^\xi$ и $\{\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i''}\} = X_{i''}^{\xi'}$ для некоторых $\xi, \xi' \in \{-, +\}$. Остается доказать, что $\xi = \xi'$. Элемент $h_{i',j'} \in \tilde{L}$ инвертирует $V_{i'}$ и централизует $V_{i''}$, а следовательно, меняет местами несингулярные прямые подпространства $\tilde{g}(V_i)$ пространства V , отличные от $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}$ и $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''}$. Но тогда $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'} \in X_{i'}^{\xi''}$ и $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''} \in X_{i''}^{\xi''}$ для некоторого $\xi'' \in \{-, +\}$. Таким образом, $\xi = \xi'' = \xi'$.

Так как $\dim(\tilde{g}(V_1) \cap V_k) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_1) \cap V_l)$ (см. выше), то из доказанного утверждения следует существование такого $2 \leq i_0 \leq t$, что $\dim(\tilde{g}(V_{i_0}) \cap V_k) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_{i_0}) \cap V_l)$, причем $\{\tilde{g}(V_1) \cap V_k, \tilde{g}(V_{i_0}) \cap V_k\} = X_k^{\xi_0}$ и $\{\tilde{g}(V_1) \cap V_l, \tilde{g}(V_{i_0}) \cap V_l\} = X_l^{\xi_0}$ для некоторого $\xi_0 \in \{-, +\}$.

Если $a \in O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$, то согласно (2.1) элемент a стабилизирует каждое из множеств прямых X_i^- и X_i^+ для каждого $1 \leq i \leq t$. Покажем, что при этом для любого $\xi \in \{-, +\}$ элемент a либо стабилизирует каждую прямую из $\cup_{1 \leq i \leq t} X_i^\xi$, либо сдвигает каждую прямую из $\cup_{1 \leq i \leq t} X_i^\xi$. Предположим, что, напротив, для некоторого $a \in O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$ и некоторого $\xi \in \{-, +\}$ найдутся $1 \leq i', i'' \leq t$, $i' \neq i''$ такие, что элемент a меняет местами прямые из $X_{i'}^\xi$ и стабилизирует каждую прямую из $X_{i''}^\xi$. Так как группа \widetilde{M}_0 индуцирует на $\{V_1, \dots, V_t\}$ симметрическую группу (см. выше), то, заменяя в случае необходимости элемент a на элемент, сопряженный с ним в группе M_1 , будем без потери общности предполагать, что $i' = k$ и $i'' = l$. Далее, заменяя в случае необходимости элемент a на элемент hah^{-1} , будем без потери общности предполагать, кроме того, что $\xi = \xi_0$. Но тогда $\tilde{a}\tilde{g}(V_1) \notin \{\tilde{g}(V_1), \dots, \tilde{g}(V_t)\}$ и, следовательно, $a \notin M_2$, что противоречит $a \in O_2((M_1, M_2)^1) \leq M_2$.

Теперь мы можем завершить рассмотрение случая $\varepsilon_1 = +$, $q = 5$ и случая $\varepsilon_1 = -$, $q = 3$. Для произвольных $1 \leq i_1, i_2 \leq t$, $i_1 \neq i_2$, элемент $gh_{i_1, i_2}g^{-1} \in K_2 \cap L \leq O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$ стабилизирует согласно (2.2) каждое из множеств прямых X_i^- и X_i^+ для любого $1 \leq i \leq t$, причем, учитывая только что доказанное, для произвольного $\xi \in \{-, +\}$ либо стабилизирует каждую прямую из $\cup_{1 \leq i \leq t} X_i^\xi$, либо сдвигает каждую прямую из $\cup_{1 \leq i \leq t} X_i^\xi$. В частности, для произвольных $j' \in \{2, \dots, t\} \setminus \{i_0\}$ и $\xi' \in \{-, +\} \setminus \{\xi_0\}$ (i_0 и ξ_0 были определены выше) элемент $\tilde{g}h_{1, j'}\tilde{g}^{-1}$, который инвертирует подпространство $\tilde{g}(V_1)$ пространства V и централизует подпространство $\tilde{g}(V_{i_0})$ пространства V , меняет местами прямые из $X_i^{\xi'}$ для каждого $1 \leq i \leq t$. Мы покажем, однако, что последнее невозможно.

Пусть i — некоторый элемент из $\{2, \dots, t\} \setminus \{i_0\}$. Тогда (см. выше) справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) $\tilde{g}(V_i) \in \{V_1, \dots, V_t\}$;
- 2) найдутся $1 \leq i', i'' \leq t$, $i' \neq i''$, и $1 \leq i^* \leq t$, $i^* \neq i$, такие, что $\dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}) = \dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''}) = \dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i''})$.

Если имеет место 1), то, полагая выше $j' = i$, получаем, что элемент $\tilde{g}h_{1, j'}\tilde{g}^{-1}$ инвертирует подпространство $\tilde{g}(V_i) \in \{V_1, \dots, V_t\}$ пространства V и потому стабилизирует все прямые этого подпространства. Противоречие. Если имеет место 2), то, выбирая $j' \in \{2, \dots, t\} \setminus \{i_0, i, i^*\}$ (при этом мы пользуемся тем, что $L \not\cong O_8^+(q)$ и, следовательно, $t > 4$), получаем, что элемент $\tilde{g}h_{1, j'}\tilde{g}^{-1}$ централизует подпространства $\tilde{g}(V_i)$ и $\tilde{g}(V_{i^*})$ пространства V , а потому с учетом $\langle \tilde{g}(V_i), \tilde{g}(V_{i^*}) \rangle = \langle V_{i'}, V_{i''} \rangle$ централизует и подпространства $V_{i'}$ и $V_{i''}$ пространства V . Противоречие.

Предположим, что q четно. Рассмотрим отдельно случаи $\varepsilon_1 = +$ и $\varepsilon_1 = -$.

Предположим, что $\varepsilon_1 = +$. При этом предположении согласно [8, предложение 2.3.6] имеем $q \geq 8$. Из вида $\widetilde{M}_1 \cap \Omega(V)$ (см. [8, табл. 2.5]) и $1 \neq K_1 \cap L \trianglelefteq M_1$ (см. лемму 1.2) следует существование для произвольных различных $1 \leq i_1, i_2 \leq t$ элемента h_{i_1, i_2} группы \widetilde{K}_1 , который действует тождественно на каждом из подпространств V_i , $1 \leq i \leq t$, $i_1 \neq i \neq i_2$, векторного пространства V , не стабилизирует ни одну из несингулярных прямых подпространств V_{i_1} и V_{i_2} векторного пространства V и умножает векторы сингулярных прямых подпространств V_{i_1} и V_{i_2} векторного пространства V на неединичные элементы поля F (различные, вообще говоря, для различных прямых). Заметим, что h_{i_1, i_2} стабилизирует каждое подпространство $\tilde{g}(V_i)$, $1 \leq i \leq t$, векторного пространства V , поскольку $\bar{h}_{i_1, i_2} \in K_1 \leq O_p(M_2) \leq C_2$ (см. (2.1)). Заменяя в случае необходимости вектор w на вектор $w + h_{k, l}(w) \in \tilde{g}(V_1)$, будем в дальнейшем, не теряя общности, предполагать, что $w = w_k + w_l$. Выберем $1 \leq j \leq t$, отличное от k и l . Если ни один из векторов w_k, w_l не является сингулярным, то содержащиеся в $\tilde{g}(V_1)$ векторы $w, h_{k, j}(w)$ и $h_{l, j}(w)$ линейно независимы. Противоречие с $\dim(\tilde{g}(V_1)) = 2$. Следовательно, w_k или w_l является сингулярным. Пусть, для определенности, вектор w_k сингулярен. Тогда из

$w + h_{k,j}(w) \in \tilde{g}(V_1)$ вытекает $w_k \in \tilde{g}(V_1)$, что, в свою очередь, влечет $w_l = w + w_k \in \tilde{g}(V_1)$. Таким образом, гиперболическая плоскость $\tilde{g}(V_1)$ содержит ортогональные векторы $w_k \in V_k$ и $w_l \in V_l$, причем вектор w_k сингулярен, что невозможно. Полученное противоречие завершает рассмотрение случая $\varepsilon_1 = +$ для четного q .

Предположим теперь, что $\varepsilon_1 = -$. Из вида $\widetilde{M}_1 \cap \Omega(V)$ (см. [8, табл. 2.5]) и $1 \neq K_1 \cap L \leq M_1$ (см. лемму 2.2) следует существование для произвольных различных $1 \leq i_1, i_2 \leq t$ элемента h_{i_1, i_2} группы \widetilde{K}_1 , который действует тождественно на каждом из подпространств V_i , $1 \leq i \leq t$, $i_1 \neq i \neq i_2$, и не стабилизирует ни одну из прямых подпространств V_{i_1} и V_{i_2} векторного пространства V . Выбирая $1 \leq j \leq t$, отличное от k и l , получаем теперь (рассматривая “проекции” векторов w , $h_{k,j}(w)$ и $h_{l,j}(w)$ на $V_k + V_l$ для разложения $V = V_1 + \dots + V_t$ и учитывая $K_1 \leq C_2$, см. (2.2)), что содержащиеся в $\tilde{g}(V_1)$ векторы w , $h_{k,j}(w)$ и $h_{l,j}(w)$ линейно независимы. Противоречие с $\dim(\tilde{g}(V_1)) = 2$ завершает рассмотрение случая $\varepsilon_1 = -$ для четного q .

С л у ч а й $m = 3$. Случай невозможен ввиду равенства $F^*(M_1 \cap L) = O_p(M_1 \cap L)$ и [8, предложение 2.3.6].

С л у ч а й $m = 4$. В силу равенства $F^*(M_1 \cap L) = O_p(M_1 \cap L)$ и [8, предложение 2.3.6] для \tilde{G} и \widetilde{M}_1 имеет место случай O^ε , тип $GO_4^{\varepsilon_1}(q) \wr S_t$, из [8, табл. 2.4], где $\varepsilon = +$ (и, следовательно, $\text{sgn}(V) = +$), $\varepsilon_1 = +$ (и, следовательно, $\text{sgn}(V_i) = +$ для каждого $1 \leq i \leq t$) и $q = 3$, $p = 2$. При этом согласно [8, табл. 2.5] справедливы приводимые ниже утверждения 1)–3). (Предварительно напомним, что $|SO_4^+(3) : \Omega_4^+(3)| = |GO_4^+(3) : SO_4^+(3)| = |CGO_4^+(3) : GO_4^+(3)| = 2$, причем $\Omega_4^+(3) \cong F_1 \circ F_2$, где $F_1 \cong F_2 \cong SL_2(3)$ и $Z(F_1) = Z(F_2)$, $SO_4^+(3) \cong (F_1 \circ F_2)\langle a_1 \rangle$, где a_1 нормализует F_1 и F_2 , причем $F_1\langle a_1 \rangle \cong F_2\langle a_1 \rangle \cong GL_2(3)$, $GO_4^+(3) = SO_4^+(3)\langle a_2 \rangle$, где a_2 при сопряжении меняет местами F_1 и F_2 , и, наконец, $CGO_4^+(3) = GO_4^+(3)\langle a_3 \rangle$, где a_3 нормализует подгруппу $SO_4^+(3)$ группы $GO_4^+(3)$ и $SO_4^+(3)\langle a_3 \rangle \cong GL_2(3) \circ GL_2(3)$.)

1) Группа $\widetilde{M}_1 \cap \Omega(V)$ имеет вид $\Omega_4^+(3)^t \cdot 2^{2(t-1)} \cdot S_t$ (и при действии сопряжением индуцирует на множестве $\{V_1, \dots, V_t\}$ симметрическую группу S_t).

2) Группа $\widetilde{C}_1 \cap \Omega(V)$ имеет вид $\Omega_4^+(3)^t \cdot 2^{2(t-1)}$ и для каждого $1 \leq i \leq t$ индуцирует на V_i группу $GO(V_i) \cong GO_4^+(3)$, причем содержит подгруппу, индуцирующую на V_i группу $\Omega(V_i) \cong \Omega_4^+(3)$ и действующую тривиально на каждом подпространстве из $\{V_1, \dots, V_t\} \setminus \{V_i\}$.

3) Группа \widetilde{C}_1 для каждого $1 \leq i \leq t$ индуцирует на V_i либо группу $GO(V_i) \cong GO_4^+(3)$, либо группу $CGO(V_i) \cong CGO_4^+(3)$.

Из 1) и 3) следует, что $O_2(\widetilde{M}_1) = O_2(\widetilde{C}_1) \cong O_2(\Omega_4^+(3)^t)$. С учетом 2) это влечет существование для произвольных различных $1 \leq i_1, i_2 \leq t$ элемента h_{i_1, i_2} группы \widetilde{C}_1 , который действует тождественно на каждом из подпространств V_i , $1 \leq i \leq t$, $i_1 \neq i \neq i_2$, векторного пространства V и инвертирует подпространства V_{i_1} и V_{i_2} , причем элемент \tilde{h}_{i_1, i_2} принадлежит каждой неединичной нормальной подгруппе группы $M_1 \cap \Omega(V) = M_0$. В частности, с учетом $K_1 \cap L \neq 1 \neq K_2 \cap L$ (см. лемму 2.2) для произвольных различных $1 \leq i_1, i_2 \leq t$ имеем $h_{i_1, i_2} \in \widetilde{K}_1$ и $h_{i_1, i_2} \in \tilde{g}^{-1} \widetilde{K}_2 \tilde{g}$.

Докажем справедливость для произвольных $\lambda \in \{-1, 1\}$ и $1 \leq i \leq t$ равенства

$$V_i = (V_i \cap \tilde{g}^\lambda(V_1)) + (V_i \cap \tilde{g}^\lambda(V_2)) + \dots + (V_i \cap \tilde{g}^\lambda(V_t)). \quad (2.4)$$

Если $v = v_1 + \dots + v_t$, где $v \in V_i$ и $v_1 \in \tilde{g}^\lambda(V_1), \dots, v_t \in \tilde{g}^\lambda(V_t)$, то для произвольного $j \in \{1, \dots, t\}$ и произвольных различных j', j'' из $\{1, \dots, t\} \setminus \{j\}$ очевидным образом имеем

$$v_j = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (v - \tilde{g}^\lambda h_{j,j'} \tilde{g}^{-\lambda}(v)) - \tilde{g}^\lambda h_{j,j''} \tilde{g}^{-\lambda} \left(\frac{1}{2} (v - \tilde{g}^\lambda h_{j,j'} \tilde{g}^{-\lambda}(v)) \right) \right),$$

откуда в силу $\tilde{g}^\lambda h_{j,j'} \tilde{g}^{-\lambda}, \tilde{g}^\lambda h_{j,j''} \tilde{g}^{-\lambda} \in O_2(\widetilde{M}_1) \leq \widetilde{C}_1$ (см. (2.1) и предыдущий абзац) заключаем, что $v_j \in V_i$. Это доказывает (2.4).

Согласно 2) существует подгруппа A группы $\widetilde{C}_1 \cap \Omega(V)$, индуцирующая на V_1 группу $\Omega(V_1)$ и действующая тривиально на каждом из подпространств V_2, \dots, V_t векторного пространства V . Ясно, что тогда $\tilde{g} A \tilde{g}^{-1}$ — подгруппа группы $\widetilde{C}_2 \cap \Omega(V)$, индуцирующая на $\tilde{g}(V_1)$ группу $\Omega(\tilde{g}(V_1)) \cong \Omega_4^+(3)$ и действующая тривиально на каждом из подпространств $\tilde{g}(V_2), \dots, \tilde{g}(V_t)$

пространства V . Пусть $j \in \{1, \dots, t\} \setminus \{k, l\}$. Элемент $h_{k,j}$ группы $\widetilde{K}_1 \leq \widetilde{C}_2$ (см. (2.2)) инвертирует ненулевое (в силу (2.4) для $\lambda = -1$ и $i = 1$) подпространство $\tilde{g}(V_1) \cap V_k$ и централизует ненулевое (в силу (2.4) для $\lambda = -1$ и $i = 1$) подпространство $\tilde{g}(V_1) \cap V_l$ пространства $\tilde{g}(V_1)$. Поэтому подгруппа $B := \langle xh_{k,j}x^{-1} \mid x \in \tilde{g}A\tilde{g}^{-1} \rangle$ группы \widetilde{C}_2 индуцирует на $\tilde{g}(V_1)$ группу, содержащую $O_2(\Omega(\tilde{g}(V_1)))$, и, в частности, действует неприводимо на $\tilde{g}(V_1)$. Следовательно, учитывая, что $0 \neq \tilde{g}(V_1) \cap V_k \neq \tilde{g}(V_1)$, для некоторого $b \in B$ имеем $b(V_k) \neq V_k$. Но из $h_{k,j} \in \widetilde{K}_1$, $K_1 \leq (M_2, M_1)^1 \trianglelefteq M_2$ и $\tilde{g}A\tilde{g}^{-1} \leq \widetilde{M}_2$ следует, что $B \leq (\widetilde{M}_2, M_1)^1 \leq \widetilde{M}_1$, и потому B стабилизирует разложение $V = V_1 + \dots + V_t$. Следовательно, $b(V_k) = V_{k'}$ для некоторого $k' \in \{1, \dots, t\} \setminus \{k\}$. Далее, согласно (2.4) имеем

$$V_k = (V_k \cap \tilde{g}(V_1)) + (V_k \cap \tilde{g}(V_2)) + \dots + (V_k \cap \tilde{g}(V_t)),$$

$$V_{k'} = (V_{k'} \cap \tilde{g}(V_1)) + (V_{k'} \cap \tilde{g}(V_2)) + \dots + (V_{k'} \cap \tilde{g}(V_t)).$$

Для произвольного $i \in \{2, \dots, t\}$ группа B стабилизирует каждое одномерное подпространство векторного пространства $V_k \cap \tilde{g}(V_i)$. Действительно, для любого $x \in \tilde{g}A\tilde{g}^{-1}$ элемент $xh_{k,j}x^{-1}$ стабилизирует каждое одномерное подпространство векторного пространства $V_k \cap \tilde{g}(V_i)$, поскольку x действует тривиально на $\tilde{g}(V_i)$, а $h_{k,j}$ инвертирует V_k . Но тогда с учетом $B \leq \widetilde{C}_2$ для произвольного $i \in \{2, \dots, t\}$ имеем

$$V_k \cap \tilde{g}(V_i) = b(V_k \cap \tilde{g}(V_i)) = b(V_k) \cap b(\tilde{g}(V_i)) = V_{k'} \cap \tilde{g}(V_i),$$

что в силу $V_k \cap V_{k'} = \{0\}$ влечет $V_k \cap \tilde{g}(V_i) = \{0\}$. Таким образом,

$$V_k = (V_k \cap \tilde{g}(V_1)) + (V_k \cap \tilde{g}(V_2)) + \dots + (V_k \cap \tilde{g}(V_t)) = V_k \cap \tilde{g}(V_1)$$

и, следовательно, $V_k = \tilde{g}(V_1)$, что противоречит выбору V_1 с условием $\tilde{g}(V_1) \notin \{V_1, \dots, V_t\}$. Полученное противоречие завершает рассмотрение случая $m = 4$. \square

Справедливость теоремы в рассматриваемом в данном разделе случае следует из лемм 2.1–2.4.

3. Доказательство теоремы в случае, когда группа L изоморфна $O_8^+(q)$

В дальнейшем доказательстве теоремы будем предполагать, что группа L изоморфна $O_8^+(q)$, где $q = r^e$. Группа $Out(L)$ имеет следующее копредставление (см. [8, разд. 1.7.1]): $\langle \tau, \gamma, \varphi \mid \tau^3 = \gamma^2 = (\gamma\tau)^2 = \varphi^e = [\tau, \varphi] = [\gamma, \varphi] = 1 \rangle$ при четном q и $\langle \tau, \gamma, \varphi, \delta, \delta' \mid \tau^3 = \gamma^2 = (\gamma\tau)^2 = \delta^2 = \delta'^2 = 1, \delta\tau = \delta', (\delta')^\tau = \delta\delta', (\delta\gamma)^2 = \delta', \varphi^e = [\delta, \varphi] = [\tau, \varphi] = [\gamma, \varphi] = 1 \rangle$ при нечетном q . Здесь δ и δ' — диагональные автоморфизмы, порождающие $Inndiag(L)$, τ и γ — графовые автоморфизмы и φ — полевой автоморфизм порядка e группы L . Группа $\langle \delta' \rangle$ расширяет $Inn(L) = O(V)$ до $PSO(V)$, $\langle \delta', \gamma \rangle$ расширяет $O(V)$ до $PGO(V)$, $\langle \delta', \gamma, \delta \rangle$ расширяет $O(V)$ до $PCGO(V)$, $\langle \delta', \gamma, \delta, \varphi \rangle$ расширяет $O(V)$ до $P\Gamma O(V)$. Обозначим через c число L -классов подгрупп, сопряженных с M_0 в $Aut(L)$, а через S стабилизатор L -класса подгрупп с представителем M_0 относительно действия группы $Out(L)$.

Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$, [8, табл. 8.50] и [6] выполняется один из следующих случаев, которые упорядочены как в [8, табл. 8.50]:

(i) $q = 2$, $M_0 \cong \Omega_2^-(3) \times GU_3(2).2 \cong \mathbb{Z}_3 \times (3_+^{1+2} : 2S_4)$, $M \cong 3_+^{1+4} : 2S_4$ или $3_+^{1+4}.(2S_4 \times \mathbb{Z}_2)$, $S = Out(L)$;

(ii) $q = r \equiv \pm 3 \pmod{8}$, $\widetilde{M}_0 \cap \Omega(V) \cong 2^7.A_8$, $M_0 \cong 2^6.A_8$, $c = 2$, $S = \langle \gamma, \delta' \rangle$, $G/L \not\cong \langle \gamma\delta' \rangle$;

(iii) $q = r \equiv \pm 3 \pmod{8}$, $\widetilde{M}_0 \cap \Omega(V) \cong 2_+^{1+6}.A_8$, $M_0 \cong 2^6.A_8$, $c = 4$, $S = \langle \gamma, \delta' \rangle$;

(iv) $q = r \equiv \pm 1 \pmod{8}$, $\widetilde{M}_0 \cap \Omega(V) \cong 2^7.S_8$, $c = 4$, $S = \langle \gamma \rangle$;

(v) $q = r \equiv \pm 1 \pmod{8}$, $\widetilde{M}_0 \cap \Omega(V) \cong 2_+^{1+6}.S_8$, $c = 8$, $S = \langle \gamma \rangle$

(vi) $q = r \geq 3$, $\widetilde{M}_0 \cap \Omega(V) \cong 2^4 \cdot 2^6 \cdot L_3(2)$, $M_0 \cong 2^3 \cdot 2^6 \cdot L_3(2)$, $c = 4$, $G/L \cong \mathbb{Z}_3$ или S_3 , $S = \langle \gamma, \tau \rangle$;

(vii) $q \geq 5$, $\widetilde{M}_0 \cap \Omega(V) \cong \Omega_2^+(q)^4 \cdot [2(2, q-1)]^3 \cdot S_4$, $c = 1$, G/L не содержится в подгруппе из $Out(L)$, сопряженной с $\langle \gamma, \delta' \rangle$ или $\langle \tau, \gamma \rangle$ при $q = 5$;

(viii) $\widetilde{M}_0 \cap \Omega(V) \cong \Omega_2^-(q)^4 \cdot [2(2, q-1)]^3 \cdot S_4$, $c = 1$, G/L не содержится в подгруппе из $Out(L)$, сопряженной с $\langle \tau, \delta' \rangle$ или $\langle \tau, \gamma \rangle$ при $q = 3$;

(ix) $q = 3$, $\widetilde{M}_0 \cap \Omega(V) \cong \Omega_4^+(3)^2 \cdot [4] \cdot S_2$, $M_0 \cong 2 \cdot ((A_4 \wr 2) \wr 2) \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3)) \cdot D_8$, $c = 1$;

(x) $\widetilde{M}_0 \cap \Omega(V) \cong (D_{2(q^2+1)/(2, q-1)})^2 \cdot [2(2, q-1)] \cdot S_2$, $c = 1$.

Лемма 3.1. *Подгруппы K_1 и K_2 имеют нетривиальные пересечения с L .*

Доказательство. Предположим противное. Тогда ввиду леммы 1.2 число q нечетно, $LE = Inndiag(L) < G$ для некоторой четверной подгруппы E , $M = N_L(E)$ и, следовательно, выполняется один из случаев (vii)-(x). Если подгруппа $M_0 = C_L(E)$ максимальна в L , то $M_0 = C_L(x)$ для любой инволюции x из E , что противоречит [13, 4.5.1]. Поэтому выполняется либо случай (vii) с $q = 5$, либо случай (viii) с $q = 3$. Но тогда E централизует силовскую 2-подгруппу в M_0 , которая является силовской 2-подгруппой в L , и ввиду [14] имеем $M_0 < Y < X < L$, где $Y \cong 2^6 : A_8$ и $X \cong \Omega_8^+(2)$. Отсюда следует, что подгруппа E нормализует $O_2(Y)$ в противоречии с [14; 8, табл. 8.50]. \square

Рассмотрим далее каждый из случаев (i)-(x).

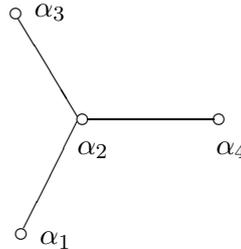
Пусть выполняется случай (i). Рассуждая, как в случае (iv) доказательства леммы 2.2 из [4, ч. III], приходим к противоречию.

Пусть выполняется один из случаев (ii)-(v). Тогда $M_i \cap L$ неприводимо действует на $O_2(M_i \cap L)$ для $i \in \{1, 2\}$ и, следовательно, $T_i = O_2(M_i \cap L)$ для $i \in \{1, 2\}$. Но $T_2 \leq O_2(M_1 \cap L)$ и, следовательно, $T_1 = T_2$, что невозможно.

Пусть выполняется случай (ix). Тогда $O_2(M_i \cap L) \cong 2_+^{1+16}$ и $M_i \cap L$ неприводимо действует на $O_2(M_i \cap L)/Z(O_2(M_i \cap L))$ для $i \in \{1, 2\}$. Поскольку $T_i \triangleleft M_i$ для $i \in \{1, 2\}$, отсюда следует, что $T_i = Z(O_2(M_i \cap L))$ для $i \in \{1, 2\}$. Поскольку $T_1 < T_1 T_2 \leq R_1 \cap L$, имеем $R_1 \cap L = O_2(M_0)$. Но тогда $T_2 \triangleleft O_2(M_0)$ и, следовательно, $T_1 = T_2$, что невозможно.

Пусть выполняется случай (x). Используя [11], получаем, что M_0 — p -замкнутая группа, $p > 2$ и подгруппа $O_p(M_0)$ абелева. Поскольку $1 \neq T_2 \leq O_p(M_0)$, имеем $O_p(M_0) \leq N_L(T_2) = M_2 \cap L$. Но подгруппа $M_2 \cap L$, равная gM_0g^{-1} , также p -замкнута, поэтому $O_p(M_0) = O_p(M_2 \cap L)$, что невозможно.

Пусть выполняется случай (vi). Тогда из [14] и [8, табл. 8.50] видно, что $M_0 < Y < X < L$, где $Y \cong 2^6 : A_8$ и $X \cong \Omega_8^+(2)$. Можно считать, что $X = \Phi(k)$, где Φ — корневая система типа D_4 и $k = GF(2)$. Ввиду [1, табл. IV] Φ имеет фундаментальную систему корней $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ со схемой Дынкина



и множеством положительных корней $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_2, \alpha_4 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\}$. Пусть $X_\alpha = \langle x_\alpha(1) \rangle$ — корневая подгруппа группы X , соответствующая корню $\alpha \in \Phi$. Положим для краткости $x_\alpha = x_\alpha(1)$. Пусть $U = \prod_{\alpha \in \Phi^+} X_\alpha$ — унипотентная подгруппа группы X . Используя коммутаторную формулу Шевалле (см. [9, теорема 5.2.2]), легко проверяется, что все нетривиальные коммутаторы пар порождающих x_α , $\alpha \in \Phi^+$, группы U

(с точностью до перестановки элементов пары) исчерпываются следующими: $[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}] = x_{\alpha_1+\alpha_2}$, $[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2+\alpha_3}] = [x_{\alpha_3}, x_{\alpha_1+\alpha_2}] = x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$, $[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2+\alpha_4}] = [x_{\alpha_4}, x_{\alpha_1+\alpha_2}] = x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4}$, $[x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}] = [x_{\alpha_3}, x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4}] = [x_{\alpha_4}, x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}] = x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}$, $[x_{\alpha_3}, x_{\alpha_2}] = x_{\alpha_2+\alpha_3}$, $[x_{\alpha_4}, x_{\alpha_2}] = x_{\alpha_2+\alpha_4}$, $[x_{\alpha_3}, x_{\alpha_1+\alpha_2}] = x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$, $[x_{\alpha_2}, x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}] = [x_{\alpha_1+\alpha_2}, x_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}] = [x_{\alpha_2+\alpha_3}, x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4}] = [x_{\alpha_2+\alpha_4}, x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}] = x_{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}$.

Поскольку $|M_0|_2 = |X|_2$, можно считать, что $U < M_0$. Ясно, что U является подгруппой Бореля, а M_0 — параболической подгруппой в X . Положим $P_i = \langle U, X_{-\alpha} \mid \alpha \in \Pi \setminus \{\alpha_i\} \rangle$ и $\Psi_i = \{ \sum_{j=1}^4 k_j \alpha_j \in \Phi^+ \mid k_i > 0 \}$ для $i \in \{1, 3, 4\}$. Ввиду [9, разд. 8.3] P_1, P_2, P_3, P_4 — все параболические максимальные подгруппы в X , содержащие U , и для $i \in \{1, 3, 4\}$ имеем $P_i = U_i L_i$, где $U_i = \prod_{\alpha \in \Psi_i} X_\alpha$ — унитарный радикал и $L_i = \langle X_{\pm\alpha} \mid \alpha \in \Pi \setminus \{\alpha_i\} \rangle$ — дополнение Леви в P_i , причем $L_i \cong GL_4(2) \cong A_8$ для $i \in \{1, 3, 4\}$. Из вышеприведенных коммутаторных соотношений следует, что $U_i \cong 2^6$ для $i \in \{1, 3, 4\}$.

Рассмотрим теперь параболическую подгруппу $P_0 = P_3 \cap P_4$ в X . Имеем $P_0 = U_0 L_0$, где $U_0 = U_3 U_4$ — унитарный радикал и $L_0 = \langle X_{\pm\alpha_1}, X_{\pm\alpha_2} \rangle \cong L_3(2)$ — дополнение Леви в P_0 . Из вышеприведенных коммутаторных соотношений следует, что

$$U_3 \cap U_4 = Z(U_0) = \Phi(U_0) = [U_0, U_0] = X_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \times X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} \times X_{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}.$$

Отсюда $U_0/Z(U_0) = (U_3/Z(U_0)) \times (U_4/Z(U_0))$ и L_0 точно и неприводимо действует на $Z(U_0)$, $U_3/Z(U_0)$ и $U_4/Z(U_0)$.

В рассматриваемом нами случае (vi) можно считать, что $M_0 = P_0$. Ввиду [14] и условия (vi) имеем $M/O_2(M_0) \cong L_3(2) \times \mathbb{Z}_3$ или $L_3(2) \times S_3$, следовательно, $O_2(M) = O_2(M_0)$ и M действует неприводимо на $U_0/Z(U_0)$. Ясно, что $K_1 = Z(U_0)$, $M/C_M(K_1) \cong L_3(2)$ и $C_{M_0}(K_1) = U_0$. Поэтому $[M_0, C_M(K_1)] \leq M_0 \cap C_M(K_1) = C_{M_0}(K_1) = U_0$ и, следовательно, $C_M(K_1)$ содержит элемент τ^* порядка 3, нормализующий подгруппу U . При этом можно считать, что $\tau^* L = \tau$.

Обозначим через $Ab(U)$ множество всех абелевых подгрупп наибольшего порядка из U . Ввиду [7, теорема 3.1, лемма 3.10] множество $Ab(U)$ состоит из семи элементарных абелевых подгрупп порядка 64 и содержит нормальные в U подгруппы U_1, U_3, U_4 . Подгруппа $\langle \tau^* \rangle$ действует на множестве $Ab(U)$, не фиксируя ввиду [8, табл. 8.50] ни одной из подгрупп U_1, U_3, U_4 . Пусть O_i обозначает $\langle \tau^* \rangle$ -орбиту на $Ab(U)$, содержащую U_i , для $i \in \{1, 3, 4\}$. Подгруппы из $O_3 \cup O_4$ содержатся в U_0 , а подгруппы из O_1 не содержатся в U_0 , так как $U_0 \triangleleft M_1$, $|U_0| = 2^9$ и $|U_1 U_3 U_4| = 2^{11}$. Поэтому орбиты O_1 и O_3 различны и, следовательно, множество $O_1 \cup O_3$ состоит из шести нормальных в U подгрупп. Но тогда и оставшаяся подгруппа из множества $Ab(U) \setminus (O_1 \cup O_3)$ также нормальна в U . Таким образом, каждая абелева подгруппа порядка 64 из U нормальна в U .

Поскольку $1 \neq K_i < O_2(M_i)$ для $i \in \{1, 2\}$, имеем $K_i = Z(O_2(M_i))$ для $i \in \{1, 2\}$, так что $K_2 = g K_1 g^{-1}$ и, следовательно, $O_2(M_2) = C_L(K_2) = g C_L(K_1) g^{-1} = g O_2(M_1) g^{-1} = g U_0 g^{-1}$.

Поскольку $K_1 < K_1 K_2 < R_1 \leq O_2(M_0)$, имеем $R_1 = O_2(M_0)$ и, следовательно, $K_2 \triangleleft U_0$. Поэтому $U_0 g U_0 g^{-1}$ является 2-подгруппой в M_0 . Подправляя элемент g на подходящий множитель из M_0 , мы можем считать, что $U_0 g U_0 g^{-1} \leq U$. Но тогда $g U_0 g^{-1} = g U_3 g^{-1} g U_4 g^{-1}$, где подгруппы $g U_3 g^{-1}$ и $g U_4 g^{-1}$ нормальны в U , поэтому подгруппа $g U_0 g^{-1}$ нормальна в U . Отсюда следует, что U и $g^{-1} U g$ являются силовскими 2-подгруппами в M_0 . Поэтому существует элемент $h \in M_0$ такой, что $h^{-1} (g^{-1} U g) h = U$. Поскольку элемент g можно заменить на элемент gh , мы можем считать, что g нормализует U и, в частности, $U \leq M_1 \cap M_2$.

Используя вышеприведенные коммутаторные соотношения, легко видеть, что

$$[U, U] = \Phi(U) = \langle X_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \rangle.$$

Кроме того, в силу [7, теорема 6.1(j)] подгруппа Томпсона $J(U) = \langle A \mid A \in Ab(U) \rangle$ группы U имеет вид $J(U) = [U, U](X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_3} \times X_{\alpha_4})$. Ясно, что $Z(U) = X_{\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}$ и, следовательно, $C_{M_0}(Z(U)) = J(U)\langle X_{\pm\alpha_2} \rangle \cong J(U) : S_3$ и $C_{M_1}(Z(U)) \cong J(U) : (S_3 \times 3)$ или $J(U) : (S_3 \times S_3)$. Поскольку g нормализует U , имеем $U \leq M_1 \cap M_2 \cap L \leq C_{M_0}(Z(U))$.

Предположим, что $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$, т. е. U — силовская 2-подгруппа в L . Ввиду [2, следствие] подгруппа U самонормализуема в L . Поэтому по теореме Бернсайда [12, теорема 7.1.1] каждая абелева подгруппа порядка 64 из U слабо замкнута в U относительно L . В частности, подгруппа $U_0 = U_3U_4$ слабо замкнута в U относительно L . Ввиду включения $U_0 \leq M_1 \cap gM_2g^{-1}$ отсюда следует, что элемент g нормализует U_0 и, следовательно, принадлежит M_0 ; противоречие.

Итак, $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$ и, следовательно, подгруппа U строго содержится в некоторой силовской 2-подгруппе T из L . Поэтому $U < N_T(U)$. Рассмотрим подгруппу $N = N_{L\langle\tau^*\rangle}(U)$ и положим $\hat{N} = N/\Phi(U)$. Тогда $\hat{U} = \widehat{X}_{\alpha_1} \times \widehat{X}_{\alpha_2} \times \widehat{X}_{\alpha_3} \times \widehat{X}_{\alpha_4}$ и, следовательно, можно рассматривать \hat{U} как 4-мерное пространство над полем $GF(2)$. Поскольку $N_{M_0}(U) = U$, имеем $N_{\hat{N}}(U_0) = U\langle\tau^*\rangle$ и $C_{\hat{N}}(\widehat{U}_0) = \hat{U}$. Таким образом, группа N/U действует на \hat{U} точно, оставляя 3-мерное подпространство $\widehat{J(U)}$ инвариантным, и стабилизатор в N/U гиперплоскости \widehat{U}_0 из $\widehat{J(U)}$ равен $U\langle\tau^*\rangle/U$. Поскольку $U < N_T(U)$, порядок группы N/U делится на 6. Теперь подгрупповое строение группы $GL_4(2) \cong A_8$ (см. [6]) показывает, что N/U — циклическая группа порядка 6 и, в частности, $N_L(U) = T$ и $|T : U| = 2$. Поскольку $g \in N$, можно считать, что элемент g централизует τ^* , поэтому $C_{M_1}(Z(U)) = C_{M_2}(Z(U)) = M_1 \cap M_2$. Отсюда ввиду теоремы из [16], примененной к амальгаме $\{M_1, M_2, M_1 \cap M_2\}$, получаем, что $M_1 \cap M_2 = U$.

Возьмем теперь любой элемент t из $N_T(U) \setminus U$, централизующий τ^* . Тогда $t^2 \in U$, $tMt^{-1} \neq M$ и $U \leq M \cap tMt^{-1}$. Имеем $O_2((M, tMt^{-1})^1) = U_0$ и $O_2((tMt^{-1}, M)^1) = tU_0t^{-1} \neq U_0$, причем U_0 и tU_0t^{-1} являются нормальными подгруппами индекса 8 в U . Подгруппа $J(U)$ имеет индекс 2 в U и содержит $U_0tU_0t^{-1}$. Группа $U_0tU_0t^{-1}/U_0 \cong U_0/(U_0 \cap tU_0t^{-1})$ содержится в группе $J(U)/U_0$, имеющей порядок 4. Поэтому $[U_0, U_0] \leq U_0 \cap tU_0t^{-1}$. Аналогично $[tU_0t^{-1}, tU_0t^{-1}] \leq U_0 \cap tU_0t^{-1}$. Поэтому $(M, tMt^{-1})^2 = [U_0, U_0] = Z(U_0)$ и $(tMt^{-1}, M)^1 = [tU_0t^{-1}, tU_0t^{-1}] = Z(tU_0t^{-1})$.

Итак, в случае (vi) для G имеется единственная с точностью до эквивалентности тройка (G, M_1, M_2) из Π , и для нее выполняется п. (а) теоремы.

Таким образом, можно считать, что выполняется один из случаев (vii), (viii). Рассмотрение этих случаев во многом аналогично рассмотрению случая $m = 2$ при доказательстве леммы 2.4. Особенно это справедливо для четного q , и наше рассмотрение случаев (vii) и (viii) при четном q состоит в указании немногочисленных изменений, которые необходимо внести для его получения в рассмотрение случая $m = 2$ при четном q из доказательства леммы 2.4. Однако при нечетном q многочисленные (и, по большей части, усложняющие доказательство) изменения, которые необходимо внести в рассмотрение случая $m = 2$ из доказательства леммы 2.4, чтобы адаптировать его к случаям (vii) и (viii), делают целесообразным изложить рассмотрение случаев (vii) и (viii) при нечетном q замкнутым образом.

Подгруппа \widetilde{M}_0 есть стабилизатор в \widetilde{L} ортогонального разложения $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ пространства V на изометричные невырожденные 2-мерные подпространства V_1, V_2, V_3, V_4 типа ε_1 . Строение группы \widetilde{M}_0 дается в (vii) при $\varepsilon_1 = +$ и дается в (viii) при $\varepsilon_1 = -$. Из этого строения следует, что группа \widetilde{M}_0 индуцирует на множестве $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ симметрическую группу подстановок S_4 . Напомним, что согласно лемме 3.1 подгруппы $K_1 \cap L$ и $K_2 \cap L$ нетривиальны.

Если $\varepsilon_1 = +$, то, учитывая $O(V) = [PGO(V), PGO(V)]$, замечаем, что для каждого $1 \leq i \leq 4$ стабилизатор V_i в группе $\widetilde{M}_1 \cap O(V) = \widetilde{M}_0$, индуцирует на множестве одномерных подпространств пространства V_i группу $PGO(V_i) \cong PGO_2^+(q) \cong D_{(2,q)(q-1)}$. Более того, для произвольных различных $1 \leq i_1, i_2 \leq 4$ в M_0 имеется подгруппа R_{i_1, i_2} , стабилизирующая все одномерные подпространства пространств V_j , $1 \leq j \leq 4$, $i_1 \neq j \neq i_2$, и индуцирующая на множестве одномерных подпространств пространства V_{i_1} группу $PGO(V_{i_1})$, а на множестве одномерных подпространств пространства V_{i_2} группу $PGO(V_{i_2})$. Отметим, что группа $PGO(V_i)$, $1 \leq i \leq 4$, действует транзитивно на множестве (из $q - 1$) несингулярных прямых V_i в случае четного q , а в случае нечетного q имеет на этом множестве в точности две орбиты, длиной $(q - 1)/2$ каждая, являющиеся множеством несингулярных прямых V_i , значе-

ния квадратичной формы на векторах которых являются квадратами в поле F , и множеством прямых V_i , значения квадратичной формы на ненулевых векторах которых не являются квадратами в поле F .

Если $\varepsilon_1 = -$, то для каждого $1 \leq i \leq 4$ подпространство V_i пространства V не содержит ненулевых сингулярных векторов и, поскольку $O(V) = [PGO(V), PGO(V)]$, стабилизатор V_i в группе $\overline{M_1 \cap O(V)} = \widetilde{M_0}$, индуцирует на множестве одномерных подпространств пространства V_i группу $PGO(V_i) \cong PGO_2^-(q) \cong D_{(2,q)(q+1)}$, действующую транзитивно как на множестве прямых V_i , значения квадратичной формы на векторах которых являются квадратами в поле F , так и, в случае нечетного q , на множестве прямых V_i , значения квадратичной формы на ненулевых векторах которых не являются квадратами в поле F .

Из равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ с учетом [8, предложение 2.3.6] и [11] следует, что при $\varepsilon_1 = +$ либо $q = 9$ (при этом $p = 2$), либо q — простое нечетное число > 3 и $q - 1$ — степень 2 (при этом $p = 2$), либо q — степень 2 и $q - 1$ — простое нечетное число (при этом $p = q - 1$), а при $\varepsilon_1 = -$ либо $q = 8$ (при этом $p = 3$), либо q — простое нечетное число и $q + 1$ — степень 2 (при этом $p = 2$), либо q — степень 2 и $q + 1$ — простое нечетное число (при этом $p = q + 1$).

Согласно (vii), (viii), если $\varepsilon_1 = +$ и $q \neq 5$ или $\varepsilon_1 = -$ и $q \neq 3$, то M_0 — максимальная подгруппа группы L , а если $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$ или $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$, то либо G/L — циклическая группа порядка 4 и G сопряжена в $Aut(L)$ с подгруппой группы $PCGO(V)$, либо $Inndiag(L) \leq G$ и $M_1 \cap Inndiag(L)$ — максимальная подгруппа группы $Inndiag(L)$.

Положим $C_1 = \{h \in M_0 \mid h(V_i) = V_i \text{ для всех } 1 \leq i \leq 4\}$ — ядро действия M_0 на множестве $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, $C_2 = gC_1g^{-1}$ — ядро действия $M_2 \cap L$ на множестве $\{g(V_1), g(V_2), g(V_3), g(V_4)\}$.

Так как $\{V_1, V_2, V_3, V_4\} \neq \{g(V_1), g(V_2), g(V_3), g(V_4)\}$ (поскольку $M_1 \neq M_2$), будем, не теряя общности, предполагать, что $g(V_1) \notin \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$. Тогда найдется $w \in \tilde{g}(V_1)$ такой, что $w = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$, где $w_i \in V_i$ для каждого $1 \leq i \leq 4$, причем $w_k \neq 0 \neq w_l$ для некоторых $1 \leq k < l \leq 4$.

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного q .

Предположим, что q четно. Если $G = L$, то сохраняют силу рассуждения, используемые для рассмотрения случая $t = 2$ при четном q из доказательства леммы 2.4 (для получения аналога включения (2.1) достаточно заметить, что p нечетно и, следовательно, $O_p(S_4) = 1$).

В общем случае (без предположения $G = L$) с учетом лемм 3.1 и 1.1 для $(G, M_1, M_2) \in \Pi$ имеем $(L, M_1 \cap L, M_2 \cap L) \in \Pi$, но последнее противоречит уже рассмотренному случаю $G = L$, q четно.

Предположим, что q нечетно. В этом случае $p = 2$ (см. выше).

Для $i \in \{1, 2\}$ положим $N_i = \Omega(Z(O_2(M_i \cap L)))$ (таким образом, $N_2 = gN_1g^{-1}$). Из строения группы $M_i \cap L$, $i \in \{1, 2\}$, следует, что N_i — элементарная группа порядка 4, неединичные элементы которой транзитивно переставляются подгруппой порядка 3 группы $M_i \cap L$. Отсюда вытекает, что N_i содержится в каждой неединичной нормальной подгруппе группы $M_i \cap L$, $i \in \{1, 2\}$. В частности, для $i \in \{1, 2\}$ с учетом $1 \neq K_i \cap L \trianglelefteq M_i \cap L$ (см. лемму 3.1) имеем

$$N_i \leq K_i \cap L,$$

что влечет

$$N_1 \leq O_2((M_2, M_1)^1 \cap L) \text{ и } N_2 \leq O_2((M_1, M_2)^1 \cap L).$$

Далее, с учетом $[PGO(V), PGO(V)] = O(V)$ для произвольных различных $1 \leq i_1, i_2 \leq 4$ в группе $\Omega(V)$ содержится элемент h_{i_1, i_2} , который действует тождественно на каждом из подпространств V_i , $1 \leq i \leq 4$, $i_1 \neq i \neq i_2$, векторного пространства V и инвертирует подпространства V_{i_1} и V_{i_2} . Ясно, что $N_1 = \{1, \bar{h}_{1,2}, \bar{h}_{1,3}, \bar{h}_{1,4}\}$ (если $\{i_1, i_2, i'_1, i'_2\} = \{1, 2, 3, 4\}$, то $\bar{h}_{i'_1, i'_2} = \bar{h}_{i_1, i_2}$).

Докажем, что

$$\langle N_1, N_2 \rangle \leq C_1 \cap C_2. \quad (3.1)$$

Покажем, что $N_1 \leq C_2$. Предположим противное, и пусть $a \in N_1 \setminus C_2$. Поскольку $N_1 \leq O_2((M_2, M_1)^1 \cap L)$, тогда нормальная 2-подгруппа $O_2((M_2, M_1)^1 \cap L)$ группы M_2 индуцирует на $\{\tilde{g}(V_1), \tilde{g}(V_2), \tilde{g}(V_3), \tilde{g}(V_4)\}$ регулярную элементарную абелеву группу порядка 4. Таким образом, не теряя общности, можно предполагать, что $\tilde{a}(\tilde{g}(V_1)) = \tilde{g}(V_2)$, $\tilde{a}(\tilde{g}(V_3)) = \tilde{g}(V_4)$ и, кроме того, имеется $b \in O_2((M_2, M_1)^1 \cap L)$, для которого $\tilde{b}(\tilde{g}(V_1)) = \tilde{g}(V_3)$ и $\tilde{b}(\tilde{g}(V_2)) = \tilde{g}(V_4)$. В группе $SO(V)$ содержится элемент x , действующий тождественно на каждом из подпространств $\tilde{g}(V_2), \tilde{g}(V_3), \tilde{g}(V_4)$ и стабилизирующий подпространство $\tilde{g}(V_1)$, на котором он индуцирует порождающий циклической группы $SO(\tilde{g}(V_1))$ (порядка $q - \varepsilon_1 - 1$). Заметим, что $x \in \widetilde{M}_2$ при $\varepsilon_1 = +$, $q = 5$ и при $\varepsilon_1 = -$, $q = 3$, так как в этих случаях $SO(V) \leq \widetilde{G}$. В общем же случае (при $\varepsilon_1 = +$, $q \geq 5$ и при $\varepsilon_1 = -$, $q \geq 3$) имеем $x^2 \in \widetilde{M}_2 \cap L$. Положим $y = x^2$ при $\varepsilon_1 = +$, $q > 5$ и при $\varepsilon_1 = -$, $q > 3$ (т. е. при $\varepsilon_1 = +$, $q \geq 9$ и при $\varepsilon_1 = -$, $q \geq 7$) и положим $y = x$ при $\varepsilon_1 = +$, $q = 5$ и при $\varepsilon_1 = -$, $q = 3$. Тогда элемент $[[y, \tilde{b}], \tilde{a}]$ содержится в \widetilde{N}_1 (так как $[y, \tilde{b}] \in [\widetilde{M}_2, O_2((M_2, M_1)^1 \cap L)] \leq O_2((M_2, M_1)^1 \cap L) \leq \widetilde{M}_0$ и $[\widetilde{M}_0, \tilde{a}] \leq [\widetilde{M}_0, \widetilde{N}_1] \leq \widetilde{N}_1$), причем (в силу выбора a и b) для каждого $1 \leq i \leq 4$ он стабилизирует $\tilde{g}(V_i)$ и индуцирует на нем квадрат порождающего циклической группы $SO(\tilde{g}(V_i))$ при $\varepsilon_1 = +$, $q > 5$ и при $\varepsilon_1 = -$, $q > 3$ и порождающий циклической группы $SO(\tilde{g}(V_i))$ при $\varepsilon_1 = +$, $q = 5$ и при $\varepsilon_1 = -$, $q = 3$. Это противоречит тому, что $\widetilde{N}_1 = Z(\widetilde{G}) \cup h_{1,2}Z(\widetilde{G}) \cup h_{1,3}Z(\widetilde{G}) \cup h_{1,4}Z(\widetilde{G})$.

Включение $N_2 \leq C_1$ доказывается аналогично.

Имея в виду использование леммы 1.1 для анализа общего случая (см. конец рассмотрения случаев (vii) и (viii)), мы будем сначала предполагать выполненным следующее условие (переход к рассмотрению общего случая будет явно оговорен):

(*) если $\varepsilon_1 = +$ и $q > 5$ или $\varepsilon_1 = -$ и $q > 3$, то $G = L$; если $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$ или $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$, то $G \leq PCGO(V)$, причем либо G/L — циклическая группа порядка 4, либо $G = \text{Inndiag}(L)$.

Начальный этап рассмотрения случая (*), по существу, дословно совпадает с одним из этапов рассмотрения случая $m = 2$ при доказательстве леммы 2.4, но ряд используемых символов имеет другое значение.

Покажем, что если $\tilde{g}(V_i) \notin \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, где $1 \leq i \leq 4$, то для некоторых $1 \leq i' < i'' \leq 4$ имеем $\dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''})$, и что, аналогично, если $V_i \notin \{\tilde{g}(V_1), \tilde{g}(V_2), \tilde{g}(V_3), \tilde{g}(V_4)\}$, где $1 \leq i \leq 4$, то для некоторых $1 \leq i' < i'' \leq 4$ имеем $\dim(V_i \cap \tilde{g}(V_{i'})) = 1 = \dim(V_i \cap \tilde{g}(V_{i''}))$.

Пусть $\tilde{g}(V_i) \notin \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, где $1 \leq i \leq 4$. Тогда найдется $v \in \tilde{g}(V_i)$ такой, что $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$, где $v_j \in V_j$ для всех $1 \leq j \leq 4$, причем $v_{i'} \neq 0 \neq v_{i''}$ для некоторых $1 \leq i' < i'' \leq 4$. Докажем, что $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'} = \langle v_{i'} \rangle$ и $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''} = \langle v_{i''} \rangle$, для чего, очевидно, достаточно доказать, что $\tilde{g}(V_i)$ содержит $v_{i'}$ и $v_{i''}$. Но с учетом $h_{i',i''} \in \widetilde{C}_2$ (см. (3.1)) имеем $v_{i'} + v_{i''} = \frac{1}{2}(v - h_{i',i''}(v)) \in \tilde{g}(V_i)$, что с учетом $h_{i',j'} \in \widetilde{C}_2$ для $1 \leq j' \leq 4$, $i'_1 \neq j' \neq i''$ (см. 3.1) влечет $v_{i'} = \frac{1}{2}(v_{i'} + v_{i''} - h_{i',j'}(v_{i'} + v_{i''})) \in \tilde{g}(V_i)$ и $v_{i''} = \frac{1}{2}(v_{i'} + v_{i''} + h_{i',j'}(v_{i'} + v_{i''})) \in \tilde{g}(V_i)$, завершая доказательство первой части утверждения. Вторая часть утверждения доказывается сходным образом. Пусть $V_i \notin \{\tilde{g}(V_1), \tilde{g}(V_2), \tilde{g}(V_3), \tilde{g}(V_4)\}$, где $1 \leq i \leq 4$. Тогда найдется $v \in V_i$ такой, что $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$, где $v_j \in \tilde{g}(V_j)$ для всех $1 \leq j \leq 4$, причем $v_{i'} \neq 0 \neq v_{i''}$ для некоторых $1 \leq i' < i'' \leq 4$. Докажем, что $V_i \cap \tilde{g}(V_{i'}) = \langle v_{i'} \rangle$ и $V_i \cap \tilde{g}(V_{i''}) = \langle v_{i''} \rangle$, для чего, очевидно, достаточно доказать, что V_i содержит $v_{i'}$ и $v_{i''}$. Но с учетом $\tilde{g}h_{i',i''}\tilde{g}^{-1} \in \widetilde{N}_2 \leq \widetilde{C}_1$ (см. (3.1)) имеем $v_{i'} + v_{i''} = \frac{1}{2}(v - \tilde{g}h_{i',i''}\tilde{g}^{-1}(v)) \in V_i$, что с учетом $\tilde{g}h_{i',j'}\tilde{g}^{-1} \in \widetilde{C}_1$ для $1 \leq j' \leq 4$, $i'_1 \neq j' \neq i''$ (см. (3.1)) влечет $v_{i'} = \frac{1}{2}(v_{i'} + v_{i''} - \tilde{g}h_{i',j'}\tilde{g}^{-1}(v_{i'} + v_{i''})) \in V_i$ и $v_{i''} = \frac{1}{2}(v_{i'} + v_{i''} + \tilde{g}h_{i',j'}\tilde{g}^{-1}(v_{i'} + v_{i''})) \in V_i$, завершая доказательство утверждения.

Из доказанного утверждения вытекает справедливость следующих утверждений: $w = w_k + w_l$, $\tilde{g}(V_1) = \langle w_k, w_l \rangle$, $\langle w_k \rangle = V_k \cap \tilde{g}(V_1)$ и $\langle w_l \rangle = V_l \cap \tilde{g}(V_1)$, причем w_k и w_l не являются сингулярными (поскольку $(w_k, w_l) = 0$, а $\tilde{g}(V_1)$ невырождено) и лишь $\langle w_k \rangle$ и $\langle w_l \rangle$ являются одномерными подпространствами как некоторых V_i , $1 \leq i \leq 4$, так и $\tilde{g}(V_1)$. Кроме того,

поскольку $\dim(V_k \cap g(V_1)) = 1$, из доказанного утверждения вытекает существование такого $2 \leq i_0 \leq 4$, что $\dim(V_k \cap g(V_{i_0})) = 1$.

Пусть $1 \leq j \leq 4$, $k \neq j \neq l$. Тогда элемент $h_{k,j}$ инвертирует вектор w_k и стабилизирует вектор w_l . Ясно, что $h_{k,j}$ нетривиально действует на множестве одномерных подпространств из $\tilde{g}(V_1) = \langle w_k, w_l \rangle$ и, следовательно, не стабилизирует отличных от $\langle w_k \rangle$, $\langle w_l \rangle$ одномерных подпространств из $\tilde{g}(V_1)$.

Если $\varepsilon_1 = +$ и $q > 5$ (и тогда, см. выше, $q \geq 9$) или $\varepsilon_1 = -$ и $q > 3$ (и тогда, см. выше, $q \geq 7$), то для группы $R_{1,j'}^g$, где $j' \in \{2, 3, 4\} \setminus \{i_0\}$, стабилизирующей все одномерные подпространства пространства $\tilde{g}(V_i)$, где $i \in \{2, 3, 4\} \setminus \{j'\}$, содержащая $\langle w_k \rangle$ орбита на множестве одномерных подпространств пространства $\tilde{g}(V_1)$ имеет длину > 2 , и потому для некоторого $h \in R_{1,j'}^g$ элемент $\bar{h}_{k,j}$ не стабилизирует $h(\langle w_k \rangle)$, т. е.

$$h^{-1}\bar{h}_{k,j}h(\langle w_k \rangle) \neq \langle w_k \rangle. \quad (3.2)$$

В силу $h \in R_{1,j'}^g \leq M_1^g = M_2$ и $\bar{h}_{k,j} \in N_1 \leq (M_2, M_1)^1$ имеем $h^{-1}\bar{h}_{k,j}h \leq (M_2, M_1)^1 \leq M_1$. Таким образом, элемент $\tilde{h}^{-1}h_{k,j}\tilde{h}$ стабилизирует разложение $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$. Кроме того, элемент $\tilde{h}^{-1}h_{k,j}\tilde{h}$ стабилизирует подпространство $\tilde{g}(V_1)$ пространства V , поскольку элемент \tilde{h} и (в силу (3.1)) элемент $h_{k,j}$ стабилизируют $\tilde{g}(V_1)$. Так как лишь $\langle w_k \rangle$ и $\langle w_l \rangle$ являются одномерными подпространствами как некоторых V_i , $1 \leq i \leq 4$, так и $\tilde{g}(V_1)$, из (3.2) следует, что $\tilde{h}^{-1}h_{k,j}\tilde{h}(\langle w_k \rangle) = \langle w_l \rangle$, а значит, $\tilde{h}^{-1}h_{k,j}\tilde{h}(V_k) = V_l$. Однако последнее равенство противоречит равенству $\tilde{h}^{-1}h_{k,j}\tilde{h}(V_k \cap \tilde{g}(V_{i_0})) = V_k \cap \tilde{g}(V_{i_0})$, которое справедливо в силу того, что элемент \tilde{h} стабилизирует каждое одномерное подпространство пространства $\tilde{g}(V_{i_0})$ и элемент $h_{k,j}$ стабилизирует каждое одномерное подпространство пространства V_k .

Итак, (при условии (*)) либо $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$, либо $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$.

Пусть $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$. Тогда для $1 \leq i \leq 4$ группа $PGO(V_i)$ имеет на множестве несингулярных прямых пространства V_i две орбиты длины 2. А именно, если $\{e, f\}$ — гиперболическая пара гиперболической плоскости V_i , то $PGO(V_i)$ -орбитами на множестве несингулярных прямых V_i являются $X_i^- = \{\langle e + f \rangle, \langle e - f \rangle\}$ и $X_i^+ = \{\langle e + 2f \rangle, \langle e - 2f \rangle\}$, т.е. в точности все пары ортогональных несингулярных прямых. Если v — ненулевой вектор прямой из X_i^- , то (v, v) не есть квадрат в поле F , а если v — вектор прямой из X_i^+ , то (v, v) есть квадрат в поле F .

Сходная ситуация имеет место при $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$. В этом случае для $1 \leq i \leq 4$ группа $PGO(V_i)$ имеет на множестве прямых пространства V_i две орбиты X_i^- и X_i^+ длины 2 со следующими свойствами: если v — ненулевой вектор прямой из X_i^- , то (v, v) не есть квадрат в поле F , а если v — вектор прямой из X_i^+ , то (v, v) есть квадрат в поле F . При этом множества X_i^- , X_i^+ и только они являются парами ортогональных прямых V_i .

Дальнейшие рассуждения применимы как в случае $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$, так и в случае $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$. Для $1 \leq i \leq 4$ ограничение на множество прямых V_i стабилизатора этого множества в группе M_1 содержит группу $PGO(V_i)$ (см. выше), но отлично от $PGO(V_i)$, что можно усмотреть из [15, предложение 6.2.11] и [8] (см. аналогичное место в доказательстве леммы 2.4, случай $m = 2$). Следовательно, для $1 \leq i \leq 4$ ограничение на множество прямых V_i стабилизатора этого множества в группе M_1 есть группа $PCGO(V_i)$. Но тогда, учитывая, что \tilde{M}_0 индуцирует на множестве слагаемых разложения $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ симметрическую группу S_4 , заключаем, что в M_1 имеется элемент $h \in PCGO(V) \setminus PGO(V)$, который для каждого $1 \leq i \leq 4$ оставляет на месте множество прямых подпространства V_i , меняя при этом местами множества X_i^- и X_i^+ .

Пусть $\tilde{g}(V_i) \notin \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, где $1 \leq i \leq 4$. Тогда, как было доказано выше, найдутся $1 \leq i', i'' \leq 4$, $i' \neq i''$, такие, что $\dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''})$. Покажем, что для некоторого $1 \leq i^* \leq 4$, $i^* \neq i$, также имеем $\dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i''})$, причем $\{\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}\} = X_{i'}^\xi$ и $\{\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i''}\} = X_{i''}^\xi$ для некоторого $\xi \in \{-, +\}$.

Так как $V_{i'} \notin \{\tilde{g}(V_1), \tilde{g}(V_2), \tilde{g}(V_3), \tilde{g}(V_4)\}$ (поскольку $\dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}) = 1$), то из доказанного выше следует существование такого $1 \leq i^* \leq 4$, $i^* \neq i$, что $\dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}) = 1$. Ясно, что

$\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}$ и $\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}$ несингулярны (поскольку $V_{i'} = \langle \tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'} \rangle$ невырождено). Пусть $j' \in \{1, \dots, 4\} \setminus \{i, i^*\}$. Тогда элемент $\tilde{g}h_{i,j'}\tilde{g}^{-1}$ из $\widetilde{N}_2 \leq \widetilde{C}_1 \cap O_2((M_1, M_2)^1)$ инвертирует $\tilde{g}(V_i)$ и централизует $\tilde{g}(V_{i^*})$, а следовательно, меняет местами несингулярные прямые подпространства $V_{i'}$ пространства V , отличные от $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}$ и $\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}$. Поскольку определенный выше элемент h группы M_1 меняет местами множества X_i^- и X_i^+ , отсюда с учетом (3.1) следует, что содержащийся в $\widetilde{C}_1 \cap O_2((M_1, M_2)^1) \leq \widetilde{C}_1 \cap \widetilde{M}_2$ элемент $\tilde{h}\tilde{g}h_{i,j'}\tilde{g}^{-1}\tilde{h}^{-1}$ меняет местами прямые $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}$ и $\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}$. Но тогда элемент $\tilde{h}\tilde{g}h_{i,j'}\tilde{g}^{-1}\tilde{h}^{-1}$ меняет местами $\tilde{g}(V_i)$ и $\tilde{g}(V_{i^*})$, оставляя на месте $V_{i'}$ и $V_{i''}$. Отсюда следует, что $\dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i''}) = \dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}) = 1$. Кроме того, с учетом $\tilde{h}\tilde{g}h_{i,j'}\tilde{g}^{-1}\tilde{h}^{-1} \in \tilde{L}$ отсюда следует, что $\{\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}\} = X_{i'}^\xi$ и $\{\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i''}\} = X_{i''}^{\xi'}$ для некоторых $\xi, \xi' \in \{-, +\}$. Остается доказать, что $\xi = \xi'$. Элемент $h_{i',j'} \in \tilde{L}$ инвертирует $V_{i'}$ и централизует $V_{i''}$, а следовательно меняет местами несингулярные прямые подпространства $\tilde{g}(V_i)$ пространства V , отличные от $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}$ и $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''}$. Но тогда $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'} \in X_{i'}^{\xi''}$ и $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''} \in X_{i''}^{\xi''}$ для некоторого $\xi'' \in \{-, +\}$. Таким образом, $\xi = \xi'' = \xi'$.

Так как $\dim(\tilde{g}(V_1) \cap V_k) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_1) \cap V_l)$ (см. выше), то из доказанного утверждения следует существование такого $2 \leq i_0 \leq 4$, что $\dim(\tilde{g}(V_{i_0}) \cap V_k) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_{i_0}) \cap V_l)$, причем $\{\tilde{g}(V_1) \cap V_k, \tilde{g}(V_{i_0}) \cap V_k\} = X_k^{\xi_0}$ и $\{\tilde{g}(V_1) \cap V_l, \tilde{g}(V_{i_0}) \cap V_l\} = X_l^{\xi_0}$ для некоторого $\xi_0 \in \{-, +\}$.

Если $a \in C_1 \cap O_2((M_1, M_2)^1)$, то элемент a стабилизирует каждое из множеств прямых X_i^- и X_i^+ для каждого $1 \leq i \leq 4$. Покажем, что при этом для любого $\xi \in \{-, +\}$ элемент a либо стабилизирует каждую прямую из $\cup_{1 \leq i \leq 4} X_i^\xi$, либо сдвигает каждую прямую из $\cup_{1 \leq i \leq 4} X_i^\xi$. Предположим, что, напротив, для некоторого $a \in C_1 \cap O_2((M_1, M_2)^1)$ и некоторого $\xi \in \{-, +\}$ найдутся $1 \leq i', i'' \leq 4$, $i' \neq i''$, такие, что элемент a меняет местами прямые из $X_{i'}^\xi$ и стабилизирует каждую прямую из $X_{i''}^\xi$. Так как группа \widetilde{M}_0 индуцирует на $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ симметрическую группу S_4 , то, заменяя в случае необходимости элемент a на элемент, сопряженный с ним в группе M_1 , будем без потери общности предполагать, что $i' = k$ и $i'' = l$. Далее, заменяя в случае необходимости элемент a на элемент hah^{-1} , будем без потери общности предполагать, кроме того, что $\xi = \xi_0$. Но тогда $a\tilde{g}(V_1) \notin \{\tilde{g}(V_1), \dots, \tilde{g}(V_i)\}$ и, следовательно, $a \notin M_2 \cap L$, что противоречит $a \in C_1 \cap O_2((M_1, M_2)^1) \leq M_2 \cap L$.

Для произвольных $1 \leq i_1, i_2 \leq 4$, $i_1 \neq i_2$, элемент $g\bar{h}_{i_1, i_2}g^{-1} \in N_2 \leq C_1 \cap O_2((M_1, M_2)^1)$ (см. (3.1)) стабилизирует каждое из множеств прямых X_i^- и X_i^+ для любого $1 \leq i \leq 4$, причем, учитывая только что доказанное, для произвольного $\xi \in \{-, +\}$ либо стабилизирует каждую прямую из $\cup_{1 \leq i \leq 4} X_i^\xi$, либо сдвигает каждую прямую из $\cup_{1 \leq i \leq 4} X_i^\xi$. В частности, для $i \in \{2, 3, 4\} \setminus \{i_0\}$ и $\xi' \in \{-, +\} \setminus \{\xi_0\}$ (i_0 и ξ_0 были определены выше) элемент $\tilde{g}h_{1,i}\tilde{g}^{-1}$, который инвертирует подпространство $\tilde{g}(V_1)$ пространства V и централизует подпространство $\tilde{g}(V_{i_0})$ пространства V , меняет местами прямые из каждого из множеств $X_1^{\xi'}, X_2^{\xi'}, X_3^{\xi'}, X_4^{\xi'}$. Но тогда $\tilde{g}(V_i) \notin \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ (поскольку элемент $\tilde{g}h_{1,i}\tilde{g}^{-1}$ инвертирует подпространство $\tilde{g}(V_i)$ пространства V), и потому, как было доказано ранее, найдутся $1 \leq i', i'' \leq 4$, $i' \neq i''$, и $1 \leq i^* \leq 4$, $i^* \neq i$, такие, что

$$\dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}) = \dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}) = 1 = \dim(\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''}) = \dim(\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i''}).$$

При этом ясно, что $\{1, i_0, i, i^*\} = \{1, 2, 3, 4\} = \{k, l, i', i''\}$.

Покажем, что $\{\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}\} = X_{i'}^{\xi_0}$, откуда, как было показано выше, будет следовать, что $\{\tilde{g}(V_i) \cap V_{i''}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i''}\} = X_{i''}^{\xi_0}$. Мы знаем, что элемент $\tilde{g}h_{1,i}\tilde{g}^{-1}$ меняет местами прямые из каждого из множеств $X_1^{\xi'}, X_2^{\xi'}, X_3^{\xi'}, X_4^{\xi'}$. Поэтому в случае $\{\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}, \tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}\} = X_{i'}^{\xi'}$ элемент $\tilde{g}h_{1,i}\tilde{g}^{-1}$ меняет местами прямые $\tilde{g}(V_i) \cap V_{i'}$ и $\tilde{g}(V_{i^*}) \cap V_{i'}$. Но элемент $\tilde{g}h_{1,i}\tilde{g}^{-1}$ инвертирует $\tilde{g}(V_i)$, что дает требуемое противоречие.

Для каждого $1 \leq s \leq 4$ пусть e_s, f_s — базис подпространства V_s пространства V такой, что при $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$ имеют место равенства $(e_s, e_s) = 0 = (f_s, f_s)$ и $(e_s, f_s) = 1$, а при $\varepsilon_1 = -$

и $q = 3$ имеют место равенства $(e_s, e_s) = 1 = (f_s, f_s)$ и $(e_s, f_s) = 0$. При $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$ для каждого $1 \leq s \leq 4$ положим $v_{s,1} = e_s + f_s$, $v_{s,2} = e_s - f_s$, $v_{s,3} = e_s + 2f_s$, $v_{s,4} = e_s - 2f_s$, а при $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$ для каждого $1 \leq s \leq 4$ положим $v_{s,1} = e_s + f_s$, $v_{s,2} = e_s - f_s$, $v_{s,3} = e_s$, $v_{s,4} = f_s$.

Пусть $\mathcal{V} := \{\{U_1, U_2, U_3, U_4\} \mid U_1, U_2, U_3, U_4 \text{ — невырожденные 2-мерные подпространства пространства } V \text{ типа } \varepsilon_1 \text{ такие, что } V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4\}$.

Положим (как при $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$, так и при $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$)

$$\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^- := \left\{ \left\{ \langle v_{1,1}, v_{s_1,1} \rangle, \langle v_{1,2}, v_{s_1,2} \rangle, \langle v_{s_2,1}, v_{s_3,1} \rangle, \langle v_{s_2,2}, v_{s_3,2} \rangle \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \langle v_{1,1}, v_{s_1,1} \rangle, \langle v_{1,2}, v_{s_1,2} \rangle, \langle v_{s_2,1}, v_{s_3,2} \rangle, \langle v_{s_2,2}, v_{s_3,1} \rangle \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \langle v_{1,1}, v_{s_1,2} \rangle, \langle v_{1,2}, v_{s_1,1} \rangle, \langle v_{s_2,1}, v_{s_3,1} \rangle, \langle v_{s_2,2}, v_{s_3,2} \rangle \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \langle v_{1,1}, v_{s_1,2} \rangle, \langle v_{1,2}, v_{s_1,1} \rangle, \langle v_{s_2,1}, v_{s_3,2} \rangle, \langle v_{s_2,2}, v_{s_3,1} \rangle \right\} \mid \{s_1, s_2, s_3\} = \{2, 3, 4\}, s_2 < s_3 \right\}$$

$(\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^-)$ есть двенадцатиэлементное подмножество множества \mathcal{V} , состоящее из таких $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$, что для каждого $1 \leq t \leq 4$ найдутся $1 \leq t_1 < t_2 \leq 4$ и $1 \leq t' \leq 4, t' \neq t$, со следующими свойствами: $U_t \cap V_{t_1} \in X_{t_1}^-, U_{t'} \cap V_{t_1} \in X_{t_1}^-, U_t \cap V_{t_2} \in X_{t_2}^-, U_{t'} \cap V_{t_2} \in X_{t_2}^-)$,

$$\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+ := \left\{ \left\{ \langle v_{1,3}, v_{s_1,3} \rangle, \langle v_{1,4}, v_{s_1,4} \rangle, \langle v_{s_2,3}, v_{s_3,3} \rangle, \langle v_{s_2,4}, v_{s_3,4} \rangle \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \langle v_{1,3}, v_{s_1,3} \rangle, \langle v_{1,4}, v_{s_1,4} \rangle, \langle v_{s_2,3}, v_{s_3,4} \rangle, \langle v_{s_2,4}, v_{s_3,3} \rangle \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \langle v_{1,3}, v_{s_1,4} \rangle, \langle v_{1,4}, v_{s_1,3} \rangle, \langle v_{s_2,3}, v_{s_3,3} \rangle, \langle v_{s_2,4}, v_{s_3,4} \rangle \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \langle v_{1,3}, v_{s_1,4} \rangle, \langle v_{1,4}, v_{s_1,3} \rangle, \langle v_{s_2,3}, v_{s_3,4} \rangle, \langle v_{s_2,4}, v_{s_3,3} \rangle \right\} \mid \{s_1, s_2, s_3\} = \{2, 3, 4\}, s_2 < s_3 \right\}$$

$(\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+)$ есть двенадцатиэлементное подмножество множества \mathcal{V} , состоящее из таких $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$, что для каждого $1 \leq t \leq 4$ найдутся $1 \leq t_1 < t_2 \leq 4$ и $1 \leq t' \leq 4, t' \neq t$, со следующими свойствами: $U_t \cap V_{t_1} \in X_{t_1}^+, U_{t'} \cap V_{t_1} \in X_{t_1}^+, U_t \cap V_{t_2} \in X_{t_2}^+, U_{t'} \cap V_{t_2} \in X_{t_2}^+)$.

Из доказанного ранее следует, что $\{\tilde{g}(V_1), \tilde{g}(V_2), \tilde{g}(V_3), \tilde{g}(V_4)\} \in \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^- \cup \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$.

Так как группа $GO(V)$ действует транзитивно на множестве \mathcal{V} , то из $c = 1$ в (vii) и (viii) следует транзитивность действия на этом множестве и группы \tilde{L} . Далее, несложно видеть, что множества $\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^-$ и $\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$ являются $\overline{M_1 \cap PSO(V)}$ -орбитами на \mathcal{V} (действительно, группа $\tilde{M}_1 \cap SO(V)$ индуцирует на множестве $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ симметрическую группу и, кроме того, в $\tilde{M}_1 \cap SO(V)$ имеется элемент, меняющий местами $\langle v_{1,1} \rangle$ с $\langle v_{1,2} \rangle$ и $\langle v_{1,3} \rangle$ с $\langle v_{1,4} \rangle$ и действующий тождественно на $V_2 + V_3 + V_4$).

Ранее было показано, что в M_1 имеется элемент $h \in PCGO(V) \setminus PGO(V)$, который для каждого $1 \leq i \leq t$ оставляет на месте множество прямых подпространства V_i , меняя при этом местами множества X_i^- и X_i^+ . Ясно, что элемент \tilde{h} меняет местами множества $\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^-$ и $\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$, откуда в силу $\tilde{M}_1 = \langle \overline{M_1 \cap PSO(V)}, \tilde{h} \rangle$ (напомним, что мы предполагаем выполненным условие (*)) следует, что множество $\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^- \cup \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$ является \tilde{M}_1 -орбитой на \mathcal{V} . В частности, все тройки вида (G, M_1, M_2') , где M_2' — стабилизатор в группе \tilde{G} разложения $V = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ для $\{U_1, U_2, U_3, U_4\} \in \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^- \cup \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$, сопряжены между собой элементами из M_1 и, следовательно, эквивалентны между собой (причем для каждой такой тройки (G, M_1, M_2') в L найдется элемент, сопрягающий M_1 в M_2'). Но нами показано, что при выполнении для рассматриваемой тройки (G, M_1, M_2) условия (*) группа \tilde{M}_2 есть стабилизатор в группе \tilde{G} разложения $V = \tilde{g}(V_1) + \tilde{g}(V_2) + \tilde{g}(V_3) + \tilde{g}(V_4)$, где $\{\tilde{g}(V_1), \tilde{g}(V_2), \tilde{g}(V_3), \tilde{g}(V_4)\} \in \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^- \cup \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$. Следовательно, для завершения рассмотрения случаев (vii) и (viii) при выполнении условия (*) остается проверить справедливости п. (b) теоремы для тройки

(G, M_1, M_2'') , где G удовлетворяет условию (*), \widetilde{M}_1 — стабилизатор в \widetilde{G} ортогонального разложения $V = \langle e_1, f_1 \rangle + \langle e_2, f_2 \rangle + \langle e_3, f_3 \rangle + \langle e_4, f_4 \rangle$, \widetilde{M}_2'' — стабилизатор в \widetilde{G} ортогонального разложения $V = \langle e_1 + f_1, e_2 + f_2 \rangle + \langle e_1 - f_1, e_2 - f_2 \rangle + \langle e_3 + f_3, e_4 + f_4 \rangle + \langle e_3 - f_3, e_4 - f_4 \rangle$. Такую проверку несложно осуществить, используя GAP (см. [10]). Этим рассмотрение случаев (vii) и (viii) при выполнении условия (*) завершено.

Теперь мы можем завершить рассмотрение случаев (vii) и (viii) в общем случае (не предполагая выполненным условие (*)).

Если $\varepsilon_1 = +$ и $q > 5$ или $\varepsilon_1 = -$ и $q > 3$, то для $(G, M_1, M_2) \in \Pi$ с учетом лемм 3.1 и 1.1 имеем $(L, M_1 \cap L, M_2 \cap L) \in \Pi$, что противоречит уже рассмотренному случаю $G = L$, $\varepsilon_1 = +$ и $q > 5$ или $\varepsilon_1 = -$ и $q > 3$.

Пусть $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$ или $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$. Если G/L — циклическая группа порядка 4, то, поскольку все (содержащие L) такие подгруппы G группы $Aut(L)$ сопряжены в группе $Aut(L)$, мы можем предполагать, что $G \leq PCGO(V)$. Но тогда выполняется условие (*). В силу доказанного ранее получаем, что теорема справедлива в случае, когда G/L — циклическая группа порядка 4, $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$ или $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$.

Пусть, наконец, $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$ или $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$, а G/L не есть циклическая группа порядка 4. Тогда согласно (vii), (viii) имеем $Inndiag(L) \trianglelefteq G$. Далее, согласно леммам 3.1 и 1.1 из $(G, M_1, M_2) \in \Pi$ следует $(Inndiag(L), M_1 \cap Inndiag(L), M_2 \cap Inndiag(L)) \in \Pi$, причем

$$(M_1, M_2)^i \cap Inndiag(L) \leq (M_1 \cap Inndiag(L), M_2 \cap Inndiag(L))^i,$$

$$(M_2, M_1)^i \cap Inndiag(L) \leq (M_2 \cap Inndiag(L), M_1 \cap Inndiag(L))^i$$

для $i \in \{1, 2\}$. Но для тройки $(Inndiag(L), M_1 \cap Inndiag(L), M_2 \cap Inndiag(L))$ из Π выполняется условие (*), и из ранее доказанного следует, что

$$(M_1 \cap Inndiag(L), M_2 \cap Inndiag(L))^i \text{ char } M_1 \cap Inndiag(L),$$

$$(M_2 \cap Inndiag(L), M_1 \cap Inndiag(L))^i \text{ char } M_2 \cap Inndiag(L)$$

для $i \in \{1, 2\}$. Таким образом,

$$(M_1 \cap Inndiag(L), M_2 \cap Inndiag(L))^i \trianglelefteq M_1,$$

$$(M_2 \cap Inndiag(L), M_1 \cap Inndiag(L))^i \trianglelefteq M_2$$

для $i \in \{1, 2\}$, что влечет

$$(M_1 \cap Inndiag(L), M_2 \cap Inndiag(L))^i \leq (M_1, M_2)^i \cap Inndiag(L),$$

$$(M_2 \cap Inndiag(L), M_1 \cap Inndiag(L))^i \leq (M_2, M_1)^i \cap Inndiag(L)$$

для $i \in \{1, 2\}$. Итак,

$$(M_1, M_2)^i \cap Inndiag(L) = (M_1 \cap Inndiag(L), M_2 \cap Inndiag(L))^i,$$

$$(M_2, M_1)^i \cap Inndiag(L) = (M_2 \cap Inndiag(L), M_1 \cap Inndiag(L))^i$$

для $i \in \{1, 2\}$.

Далее, если $(M_1, M_2)^1 \not\leq L$, то с учетом $G = LM_1$ имеем $L < (L(M_1, M_2)^1) \cap Inndiag(L)$. Но тогда $(M_1, M_2)^1 \cap Inndiag(L) \not\leq L$, что в силу доказанного равенства $(M_1, M_2)^1 \cap Inndiag(L) = (M_1 \cap Inndiag(L), M_2 \cap Inndiag(L))^1$ противоречит включению $(M_1 \cap Inndiag(L), M_2 \cap Inndiag(L))^1 \leq L$, справедливость которого следует (с учетом $(Inndiag(L), M_1 \cap Inndiag(L), M_2 \cap Inndiag(L)) \in \Pi$) из ранее рассмотренного случая (*). Таким образом, $(M_1, M_2)^1 \leq L$ и, следовательно,

$$(M_1, M_2)^i = (M_1 \cap Inndiag(L), M_2 \cap Inndiag(L))^i$$

для $i \in \{1, 2\}$. Аналогично доказывается, что $(M_2, M_1)^1 \leq L$ и

$$(M_2, M_1)^i = (M_2 \cap \text{Inndiag}(L), M_1 \cap \text{Inndiag}(L))^i$$

для $i \in \{1, 2\}$. Кроме того, из $(\text{Inndiag}(L), M_1 \cap \text{Inndiag}(L), M_2 \cap \text{Inndiag}(L)) \in \Pi$ и ранее рассмотренного случая (*) вытекает, что

$$|M_1 \cap M_2 \cap L| = |(M_1 \cap \text{Inndiag}(L)) \cap (M_2 \cap \text{Inndiag}(L)) \cap L| = 2^1 1.$$

На основании доказанного и в силу рассмотренного ранее случая (*) заключаем, что группы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ для $i \in \{1, 2\}$, а также группа $M_1 \cap M_2 \cap L$ имеют указанный в п. (b) вид.

Покажем, что произвольная тройка (G, M_1^*, M_2^*) из Π , где (далее мы используем введенные выше обозначения \mathcal{V} , $\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^-$ и $\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$) $\overline{M_i^* \cap \text{Inndiag}(L)}$, $i \in \{1, 2\}$, есть стабилизатор в $\overline{\text{Inndiag}(L)}$ некоторого разложения $V = V_{i,1}^* + V_{i,2}^* + V_{i,3}^* + V_{i,4}^*$, $\{V_{i,1}^*, V_{i,2}^*, V_{i,3}^*, V_{i,4}^*\} \in \mathcal{V}$, эквивалентна тройке (G, M_1, M_2) . Из $(G, M_1^*, M_2^*) \in \Pi$ следует (см. выше), что $(\overline{\text{Inndiag}(L)}, M_1^* \cap \text{Inndiag}(L), M_2^* \cap \text{Inndiag}(L)) \in \Pi$. Так как $M_1^* = N_G(M_1^* \cap \text{Inndiag}(L))$ и $\overline{\text{Inndiag}(L)}$ действует транзитивно на \mathcal{V} , то мы можем, не теряя общности (сопрягая в случае необходимости тройку (G, M_1^*, M_2^*) подходящим элементом из $\overline{\text{Inndiag}(L)}$), считать, что $M_1^* = M_1$ и $\{V_{1,1}^*, V_{1,2}^*, V_{1,3}^*, V_{1,4}^*\} = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$. Но тогда, как было доказано ранее, $(\overline{\text{Inndiag}(L)}, M_1^* \cap \text{Inndiag}(L), M_2^* \cap \text{Inndiag}(L)) \in \Pi$ влечет $\{V_{2,1}^*, V_{2,2}^*, V_{2,3}^*, V_{2,4}^*\} \in \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^- \cup \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$.

Кроме того, ранее было доказано, что действие группы $\overline{M_1 \cap \text{Inndiag}(L)} = (\overline{h}, M_1 \cap \text{PSO}(V))$ на $\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^- \cup \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$ транзитивно. Поэтому некоторый элемент из $M_1 \cap \text{Inndiag}(L)$ сопряжением переводит $M_2^* \cap \text{Inndiag}(L)$ в $M_2 \cap \text{Inndiag}(L)$, а следовательно, с учетом $M_2^* = N_G(M_2^* \cap \text{Inndiag}(L))$ и $M_2 = N_G(M_2 \cap \text{Inndiag}(L))$, также переводит M_2^* в M_2 . Таким образом, сопряжение тройки $(G, M_1^* = M_1, M_2^*)$ подходящим элементом из $M_1 \cap \text{Inndiag}(L)$ переводит ее в (G, M_1, M_2) , что доказывает эквивалентность (G, M_1^*, M_2^*) и (G, M_1, M_2) .

Покажем, что в общем случае (как при $\varepsilon_1 = +$ и $q = 5$, так и при $\varepsilon_1 = -$ и $q = 3$, как при циклической порядка 4 группе G/L , так и при $\text{Inndiag}(L) \trianglelefteq G$) имеем $|M_1 : M_1 \cap M_2| = 24$. Для этого заметим прежде всего, что множество всех троек вида (G, M_1, M_2^*) из Π инвариантно относительно сопряжения элементами из M_1 .

Если G/L — циклическая группа порядка 4, то (поскольку все такие подгруппы G группы $\text{Aut}(L)$ сопряжены в группе $\text{Aut}(L)$), мы можем, не теряя общности, предполагать, что $G \leq \text{PCGO}(V)$. При этом предположении, как было доказано при рассмотрении случая (*), во-первых, тройки вида (G, M_1, M_2^*) из Π характеризуются тем, что $\overline{M_2^*}$ есть стабилизатор в \tilde{G} разложения $V = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ для $\{U_1, U_2, U_3, U_4\} \in \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^- \cup \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$, а во-вторых, группа $\overline{M_1}$ действует транзитивно на $\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^- \cup \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$. Итак, множество всех троек вида (G, M_1, M_2^*) из Π имеет мощность 24, причем группа M_1 транзитивно действует на нем (сопряжением). Так как одним из элементов этого множества является тройка (G, M_1, M_2) , стабилизатор которой в M_1 (при указанном действии сопряжением) есть $M_1 \cap N_G(M_2) = M_1 \cap M_2$, то в случае, когда G/L — циклическая группа порядка 4, равенство $|M_1 : M_1 \cap M_2| = 24$ справедливо.

Пусть G/L не есть циклическая группа порядка 4 и, следовательно, $\text{Inndiag}(L) \trianglelefteq G$. Тогда (см. выше) тройки вида (G, M_1, M_2^*) из Π характеризуются тем, что $(\overline{\text{Inndiag}(L)}, M_1 \cap \text{Inndiag}(L), M_2^* \cap \text{Inndiag}(L)) \in \Pi$. Но, как было доказано при рассмотрении случая (*), во-первых, условие $(\overline{\text{Inndiag}(L)}, M_1 \cap \text{Inndiag}(L), M_2^* \cap \text{Inndiag}(L)) \in \Pi$ эквивалентно тому, что $\overline{M_2^* \cap \text{Inndiag}(L)}$ есть стабилизатор в $\overline{\text{Inndiag}(L)}$ разложения $V = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ для $\{U_1, U_2, U_3, U_4\} \in \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^- \cup \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$, а во-вторых, группа $M_1 \cap \text{Inndiag}(L)$ действует транзитивно на $\mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^- \cup \mathcal{V}_{\{V_1, V_2, V_3, V_4\}}^+$. Отсюда с учетом $(G, M_1, M_2^*) =$

($N_G(\text{Inndiag}(L)), N_G(M_1 \cap \text{Inndiag}(L)), N_G(M_2^* \cap \text{Inndiag}(L))$) заключаем, что множество всех троек вида (G, M_1, M_2^*) из Π имеет мощность 24, причем группа M_1 транзитивно действует на нем (сопряжением). Так как одним из элементов этого множества является тройка (G, M_1, M_2) , стабилизатор которой в M_1 (при указанном действии сопряжением) есть $M_1 \cap N_G(M_2) = M_1 \cap M_2$, то равенство $|M_1 : M_1 \cap M_2| = 24$ справедливо и в случае, когда G/L не есть циклическая группа порядка 4.

Остается проверить последнее утверждение из п. (b) теоремы. Пусть G/L изоморфна A_4 или S_4 и d — элемент порядка 3 из $M_1 \cap M_2$ (в силу $|M_1 : M_1 \cap M_2| = 24$ и $|M_1 \cap M_2 \cap L| = 2^{11}$ такой элемент существует, причем $d \notin L$). Заметим, что $M_1 \cap M_2 \cap L \neq Q$, где $Q = O_2(M_0)$. Действительно, 2-группа $M_1 \cap M_2 \cap L$ не является силовской 2-подгруппой группы $M_2 \cap L$ и, следовательно, нормализуется некоторым элементом из $(M_2 \cap L) \setminus (M_1 \cap M_2 \cap L) \subseteq M_2 \setminus M_1$, а $N_G(Q) = M_1$. Таким образом, $Q(M_1 \cap M_2 \cap L)$ — d -инвариантная силовская 2-подгруппа в M_0 , а следовательно, и в L .

Пусть τ^* — стандартный графовый автоморфизм порядка 3 группы L . Докажем, что d сопряжен с τ^* относительно $\text{Aut}(L)$. Предположим противное. Тогда ввиду [13, 4.7.3, 4.9.2] $q = 3$ и d сопряжен с τ^*z относительно $\text{Aut}(L)$ для некоторого корневого элемента z порядка 3 из $C_L(\tau^*)$, причем $C_L(\tau^*z) = C_L(\tau^*) \cap C_L(z)$ и $C_L(\tau^*) \cong G_2(3)$. Согласно [6] имеем $C_L(d)/O_3(C_L(d)) \cong SL_2(3)$. Поэтому силовская 2-подгруппа из $C_L(d)$ изоморфна группе кватернионов порядка 8. С другой стороны, как мы показали в предыдущем абзаце, элемент d нормализует некоторую силовскую 2-подгруппу S из M_0 и, следовательно, централизует подгруппу $Z(S)$ порядка 2. Поскольку $Z(S)$ содержится в четверной подгруппе K_1 , нормальной в M_1 , а d принадлежит M_1 , то d централизует четверную подгруппу K_1 из S . Полученное противоречие доказывает последнее утверждение из п. (b) теоремы.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Группа M_1 из п. (a) теоремы содержится в [14, таблица I, строки 51–54]. Группа M_1 из п. (b) теоремы содержится в [14, таблица I, строка 55] при $q = 5$ и содержится в [14, таблица I, строка 56] при $q = 3$. В обоих пп. (a) и (b) теоремы с учетом [14] имеем $M_1 \cap L < Y < X < L$, где $Y \cong 2^6 : A_8$ и $X \cong \Omega_8^+(2)$. Из приведенного доказательства теоремы следует, что в п. (a) теоремы группа $M_1/O_2(M_1)$ действует точно и неприводимо на $O_2(M_1)/Z(O_2(M_1))$ и неприводимо на $Z(O_3(M_1))$. Можно доказать также, что в п. (b) теоремы группа $(M_1 \cap L)/O_2(M_1 \cap L)$ действует неприводимо на $Z(O_2(M_1 \cap L))$, тривиально на $[O_2(M_1 \cap L), O_2(M_1 \cap L)]/Z(O_2(M_1 \cap L))$ и вполне приводимо на $O_2(M_1 \cap L)/[O_2(M_1 \cap L), O_2(M_1 \cap L)]$. Из приведенного доказательства теоремы следует, что любая тройка из п. (b) теоремы эквивалентна тройке (G, M_1, M_2) , у которой $O(V) \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(O(V))$ (причем либо $G/O(V)$ — циклическая группа порядка 4, либо $\text{Inndiag}(O(V)) \leq G$), $M_1 = N_G(M_1 \cap O(V))$, $M_2 = N_G(M_2 \cap O(V))$, $M_1 \cap O(V)$ — стабилизатор в $O(V)$ ортогонального разложения $V = \langle e_1, f_1 \rangle + \langle e_2, f_2 \rangle + \langle e_3, f_3 \rangle + \langle e_4, f_4 \rangle$, где для каждого $1 \leq s \leq 4$ при $q = 5$ имеют место равенства $(e_s, e_s) = 0 = (f_s, f_s)$ и $(e_s, f_s) = 1$, а при $q = 3$ имеют место равенства $(e_s, e_s) = 1 = (f_s, f_s)$ и $(e_s, f_s) = 0$, $M_2 \cap O(V)$ — стабилизатор в $O(V)$ ортогонального разложения $V = \langle e_1 + f_1, e_2 + f_2 \rangle + \langle e_1 - f_1, e_2 - f_2 \rangle + \langle e_3 + f_3, e_4 + f_4 \rangle + \langle e_3 - f_3, e_4 - f_4 \rangle$.

Авторы благодарны В. В. Кораблевой за помощь при вычислениях, использующих GAP.

Укажем на опечатки в [4, ч. III]:

вместо абзаца на с. 167, строки 1-3 снизу, и с. 168, строки 1-2 сверху, должно быть “Так как $C_S(S_1) = \langle z_1 \rangle \times S_2 = \langle z_1 \rangle \times S_1^u$, имеем $E_2 \cap Z(S) = \langle z_2 \rangle$ и, следовательно, E_1 и E_2 — единственные четверные подгруппы из $O_2(M_0)$, все неединичные элементы которых сопряжены с z_1 в L .”;

на с. 167, строка 17 снизу, вместо $S \in \text{Syl}_2(M_0)$ должно быть $S = S_1 \times S_2 \in \text{Syl}_2(M_0)$;

на с. 168, строка 18 снизу, вместо \times должно быть \oplus ;

на с. 169, строка 9 сверху, вместо $Sp_2(q)^t(q+1)^t : S_t$ должно быть $Sp_2(q)^t : S_t$;

на с. 169, строка 22 сверху, вместо $PSL(V_k)$ должно быть $PSL^\epsilon(V_k)$;

на с. 169, строка 35 сверху, вместо $PSL(V_k)$ должно быть $PSL^\epsilon(\tilde{g}(V_1))$;

- на с. 170, строка 13 снизу, вместо $O_3(M_0)$ должно быть $O_2(M_0)$;
 на с. 170, строка 7 снизу, вместо “ $x_1 = x^{2^{n-1}}$, $y_1 = y^{2^{n-1}}$, $w_1 = w^{2^{n-2}}$ ” должно быть “ $x_1 = x^{2^{k-1}}$, $y_1 = y^{2^{k-1}}$, $w_1 = w^{2^{k-3}}$ при $k > 2$ ”;
 на с. 170, строка 6 снизу, вместо $O_2(M)$ должно быть $O_2(M_0)$;
 на с. 171, строка 4 сверху, вместо “ L_1 не принадлежит A ” должно быть “ L_2 не принадлежит A ”;
 на с. 171, строка 11 сверху, вместо w^2 должно быть w ;
 на с. 171, строка 12 сверху, вместо “то M_0 централизует w_1 ” должно быть “то $k > 2$ и M_0 централизует w_1 ”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. 334 с.
2. **Кондратьев А.С.** Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
3. **Кондратьев А.С., Трофимов В.И.** Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гипотезы Симса // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 6. С. 741–743.
4. **Кондратьев А.С., Трофимов В.И.** Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. I, II, III // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 143–152; 2016. Т. 22, № 2. С. 177–187; 2016. Т. 22, № 4. С. 163–172.
5. **Aschbacher M.** On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. Vol. 76, no. 3. P. 469–514. doi: 10.1007/BF01388470.
6. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p. ISBN: 0198531990.
7. **Barry M.J.J.** Large abelian subgroups of Chevalley groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1979. Vol. 27, no. 1. P. 59–87. doi: 10.1080/00927879008823931.
8. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407).
9. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: Wiley, 1972. 331 p. ISBN: 0471137359.
10. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.9.1. 2018. URL: <http://www.gap-system.org>.
11. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
12. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968. 528 p.
13. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr.; vol. 40, no. 3).
14. **Kleidman P.B.** The maximal subgroups of the finite 8-dimensional orthogonal groups $P\Omega_8^+(q)$ and of their automorphism groups // J. Algebra. 1987. V. 110, no. 1. P. 173–242. doi: 10.1016/0021-8693(87)90042-1.
15. **Kleidman P.B., Liebeck M.W.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 304 p. ISBN: 978-0-8218-0391-2.
16. **Timmesfeld F.G.** Amalgams with rank 2 groups of Lie-type in characteristic 2. Preprint. Giessen: University Giessen, 1984. 126 p.

Кондратьев Анатолий Семенович
 д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. сектором
 Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
 Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
 e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 25.12.2017

Трофимов Владимир Иванович
 д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
 Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
 Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
 e-mail: trofimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie (Chapt. IV–VI)*. Paris: Hermann, 1968, 282 p. doi: 10.1007/978-3-540-34491-9. Translated to Russian under the title *Gruppy i algebrы Li (glavy IV – VI)*. Moscow: Mir Publ., 1972, 334 p.
2. Kondrat'ev A.S. Normalizers of the Sylow 2-subgroups in finite simple groups. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, no. 3-4, pp. 338–346. doi: 10.1007/s11006-005-0133-9.
3. Kondrat'ev A.S., Trofimov V.I. Stabilizers of graph's vertices and a strengthened version of the Sims conjecture. *Dokl. Math.*, 1999, vol. 59, no. 1, pp. 113–115.
4. Kondrat'ev A.S., Trofimov V.I. Stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture, I,II, III. *Proc. Inst. Steklov Math.*, 2015, vol. 289, suppl. 1, pp. 146–155, doi: 10.1134/S0081543815050132; 2016, vol. 295, suppl. 1, pp. 89–100, doi: 10.1134/S0081543816090108; 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. 113–122, doi: 10.1134/S0081543817090140.
5. Aschbacher M. On the maximal subgroups of the finite classical groups. *Invent. Math.*, 1984, vol. 76, no. 3, pp. 469–514. doi: 10.1007/BF01388470.
6. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups*. Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN: 0198531990.
7. Barry M.J.J. Large abelian subgroups of Chevalley groups. *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, 1979, vol. 27, no. 1, pp. 59–87. doi: 10.1017/S1446788700016645.
8. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407, 438 p. doi: 10.1017/CBO9781139192576.
9. Carter R.W. *Simple groups of Lie type*. London: Wiley, 1972, 331 p. ISBN: 0471137359.
10. The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.9.1., 2018. Available on: <https://www.gap-system.org>.
11. Geroni G.C. Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$. *Novv. Ann. Math. (2)*, 1870, vol. 9, pp. 469–471.
12. Gorenstein D. *Finite groups*. N Y: Harper and Row, 1968, 528 p. ISBN (2nd ed.): 978-0821843420.
13. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups*. Providence: Amer. Math. Soc., 1998, Number 3, Part I, Ser. Math. Surveys Monogr., vol. 40, no. 3, 420 p. ISBN: 978-0-8218-0391-2.
14. Kleidman P.B. The maximal subgroups of the finite 8-dimensional orthogonal groups $P\Omega_8^+(q)$ and of their automorphism groups. *J. Algebra*, 1987, vol. 110, no. 1, pp. 173–242. doi: 10.1016/0021-8693(87)90042-1.
15. Kleidman P.B., Liebeck M.W. *The subgroup structure of the finite classical groups*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 129, 304 p. ISBN: 0-521-35949-X.
16. Timmesfeld F.G. *Amalgams with rank 2 groups of Lie-type in characteristic 2*. Preprint. Giessen: University Giessen, 1984, 126 p.

The paper was received by the Editorial Office on December 25, 2017.

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00061-II).

Anatolii Semenovich Kondrat'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru.

Vladimir Ivanovich Trofimov, Dr. Phys.-Math. Sci., N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, trofimov@imm.uran.ru.