ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

В настоящей работе исследована задача оптимального быстродействия для сингулярно возмущенной линейной автономной системы с двумя независимыми малыми параметрами и гладкими геометрическими ограничениями на управление в виде шара. Основное отличие от ранее рассмотренных систем с быстрыми и медленными переменными заключается в том, что в данном случае матрица при быстрых переменных представляет собой многомерный аналог жордановой клетки второго порядка с нулевым собственным числом и тем самым не удовлетворяет стандартному условию асимптотической устойчивости. Настоящая работа является продолжением исследования авторов. Здесь рассмотрены начальные условия, зависящие от второго малого параметра; в вырожденном случае это привело к принципиально другому виду асимптотики решения. Доказана разрешимость задачи. Получена и обоснована полная асимптотика в смысле Эрдейи по степенной асимптотической последовательности времени быстродействия и оптимального управления относительно малого параметра при производных в уравнениях системы.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. On a singularly perturbed time-optimal control problem with two small parameters.

In this paper we investigate a time-optimal control problem for a singularly perturbed linear autonomous system with two independent small parameters and smooth geometric constraints on the control in the form of a ball. The main difference of this case from the systems with fast and slow variables studied earlier is that here the matrix at the fast variables is a multidimensional analog of the second-order Jordan cell with zero eigenvalue and, thus, does not satisfy the standard condition of asymptotic stability. Continuing the research, we consider initial conditions depending on the second small parameter; in the degenerate case, this resulted in an asymptotic expansion of the solution of a fundamentally different type. The solvability of the problem is proved. We also derive and justify a complete power asymptotic expansion in the sense of Erdelyi of the optimal time and optimal control with respect to a small parameter at the derivatives in the equations of the systems.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singularly perturbed problem, small parameter.

MSC: 93C70, 49N05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-76-92

1. Постановка задачи

В работе рассматривается одна из задач теории оптимального управления [1; 2] — задача о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными (см. обзор [3]) в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x,\, y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad u \in \mathbb{R}^{2n}, \\ \varepsilon^3 \dot{y} = Jy + u, & \|u\| \leqslant 1, \quad 0 < \varepsilon, \mu \ll 1, \\ x(0) = x_0(\mu), \quad y(0) = y_0, & \\ x(T_{\varepsilon,\mu}) = 0, \quad y(T_{\varepsilon,\mu}) = 0, \quad T_{\varepsilon,\mu} \longrightarrow \min, & \end{cases} \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

I_n — матрица тождественного отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Далее всюду будем обозначать единичную матрицу I_n через I. Отметим, что малый параметр ε входит в уравнения системы (1.1) в третьей степени для удобства, чтобы избежать в дальнейшем дробных степеней параметра в асимптотиках.

Цель настоящего исследования — доказать разрешимость задачи (1.1), получить асимптотические разложения времени быстродействия и оптимального управления относительно малого параметра ε при $\mu = 0$.

Ранее в работе [4] были получены основные соотношения для системы общего вида с многоугольником в качестве ограничивающего множества, в работах [5; 6] исследовано поведение областей достижимости при стремлении малого параметра к нулю. Отличительная особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что собственные значения матрицы при быстрых переменных равны нулю, и тем самым нарушено стандартное условие (см., например, [6, гл. 3, п. 3.2, предположение A1]) асимптотической устойчивости этой матрицы. В настоящей работе используются методы статьи [7] и общие соотношения, полученные в [8]. Отметим статью [9], в ней впервые была исследована асимптотика решения для другой системы, в которой матрица при быстрых переменных не удовлетворяет условию асимптотической устойчивости. Настоящая работа является продолжением исследования авторов (см. статью Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, Т. 23, № 2). А именно, рассмотрены начальные условия, зависящие от второго малого параметра. В вырожденном случае это привело к принципиально другому, более сложному, виду асимптотики решения. Показано, что время быстро действия и оптимальное управление раскладываются в степенные асимптотические ряды в смысле Эрдейи [10, Definition 2.4].

Обозначим

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & I_{2n} \\ 0 & \varepsilon^{-3}J \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-3}I_{2n} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z_0(\mu) = \begin{pmatrix} x_0(\mu) \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad x_i, y_i, u_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

$$x_{0,2}(\mu) = \mu\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \neq 0,$$

здесь ξ — некоторый известный постоянный вектор. Будем предполагать, что

$$\xi \nparallel y_{0,1}. \tag{1.4}$$

В частности, это условие означает, что

$$y_{0,1} \neq 0. \tag{1.5}$$

Вследствие критерия Калмана (см., например, [11, с. 91, теорема 5]) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ система (1.1) с матрицами $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ из (1.3) вполне управляема.

Непосредственным вычислением из (1.2), (1.3) и равенства $J^2 = 0$ получаем, что

$$e^{Jt/\varepsilon^3} = I_{2n} + \frac{t}{\varepsilon^3}J, \qquad e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} I_{2n} & tI_{2n} + \frac{t^2}{2\varepsilon^3}J \\ 0 & I_{2n} + \frac{t}{\varepsilon^3}J \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующую задачу о быстродействии, получающуюся из (1.1), если положить $\varepsilon = 0$ и $u_2 \equiv 0$ (т. е. не принимать во внимание неуправляемые объекты):

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -u_1, & x_2,\, u_1 \in \mathbb{R}^n \\ x_2(0) = \mu\xi, & \|u_1\| \leqslant 1, \\ x_2(T_\mu) = 0, \quad T_\mu \longrightarrow \min, & \end{cases}$$

Согласно принципу максимума [1; 11, с. 140] оптимальное управление $u_\mu(t) = u_1(t)$ имеет вид

$$u_\mu(t) \equiv q_\mu, \qquad \|q_\mu\| = 1,$$

где постоянный вектор $q_\mu \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет соотношению

$$0 = \mu\xi - T_\mu q_\mu. \tag{1.6}$$

Тогда из (1.6) получаем

$$T_\mu = \mu\|\xi\|, \quad q_\mu = q = \frac{\xi}{\|\xi\|}.$$

Теорема 1. *При любом начальном векторе* $z_0(\mu)$ *с компонентами, удовлетворяющими условиям* (1.4), (1.5), *и любых достаточно малых* $\varepsilon > 0$, $\mu \geqslant 0$ *задача* (1.1) *разрешима, и выполняется* $\lim\limits_{\varepsilon,\mu\to 0} T_{\varepsilon,\mu} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим управление $v_{\varepsilon,\mu}(t) = (v^*_{\varepsilon,\mu,1}(t), v^*_{\varepsilon,\mu,2}(t))^*$, $\|v_{\varepsilon,\mu}(t)\| \leqslant 1$, где для произвольного $\sigma > 0$ положим $v_{\varepsilon,\mu,1}(t) := \sigma(\mu\xi - \varepsilon^3 y_{0,1})$, $v_{\varepsilon,\mu,2}(t) := \varepsilon^3 W_{\varepsilon,\mu}(t)$. Здесь и далее $*$ — знак операции транспонирования матриц. Покажем, что с помощью такого управления можно перевести систему из положения $z_0(\mu)$ в начало координат за время $\theta_{\varepsilon,\mu}$, где $\theta_{\varepsilon,\mu} = O(1)$, $\varepsilon \to 0$, $\mu \to 0$.

Подставим управление $v_{\varepsilon,\mu}(t)$ в систему уравнений, получающуюся в силу формулы Коши из (1.1),

$$0 = z_0(\mu) + \int\limits_0^{\theta_{\varepsilon,\mu}} e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon\, v_\varepsilon(t)\, dt.$$

Покомпонентно эта система запишется в виде

$$\begin{aligned} -2\varepsilon^3 x_{0,1} &= \int\limits_0^{\theta_{\varepsilon,\mu}} \Big(- 2t\sigma(\mu\xi - \varepsilon^3 y_{0,1}) + t^2 W_{\varepsilon,\mu}(t)\Big)\, dt, \quad \mu\xi = \int\limits_0^{\theta_{\varepsilon,\mu}} tW_{\varepsilon,\mu}(t)\, dt, \\ -\varepsilon^3 y_{0,1} &= \int\limits_0^{\theta_{\varepsilon,\mu}} \Big(\sigma(\mu\xi - \varepsilon^3 y_{0,1}) - tW_{\varepsilon,\mu}(t)\Big)\, dt, \quad -y_{0,2} = \int\limits_0^{\theta_{\varepsilon,\mu}} W_{\varepsilon,\mu}(t)\, dt. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Из второго и третьего уравнений системы (1.7) находим

$$\theta_{\varepsilon,\mu}\sigma(\mu\xi - \varepsilon^3 y_{0,1}) = \mu\xi - \varepsilon^3 y_{0,1}. \tag{1.8}$$

Отсюда $\theta_{\varepsilon,\mu} = 1/\sigma$. Затем первое, второе и четвертое уравнения системы (1.7) с учетом (1.8) можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^{\theta_{\varepsilon,\mu}} t^2 W_{\varepsilon,\mu}(t)\, dt = -2\varepsilon^3 x_{0,1} + \theta_{\varepsilon,\mu}\sigma(\mu\xi - \varepsilon^3 y_{0,1}), \\ \int\limits_0^{\theta_{\varepsilon,\mu}} tW_{\varepsilon,\mu}(t)\, dt = \mu\xi, \quad \int\limits_0^{\theta_{\varepsilon,\mu}} W_{\varepsilon,\mu}(t)\, dt = -y_{0,2}. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Вектор-функцию $W_{\varepsilon,\mu}(t)$ можно найти в виде $W_{\varepsilon,\mu}(t) = a_{\varepsilon,\mu}t^2 + b_{\varepsilon,\mu}t + c_{\varepsilon,\mu}$, где $a_{\varepsilon,\mu}$, $b_{\varepsilon,\mu}$ и $c_{\varepsilon,\mu} \in \mathbb{R}^n$ — некоторые векторы. Действительно, система (1.9) преобразуется к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно компонент $a_{\varepsilon,\mu}$, $b_{\varepsilon,\mu}$, $c_{\varepsilon,\mu}$:

$$\begin{gathered} \frac{\theta^5_{\varepsilon,\mu}}{5}a_{\varepsilon,\mu} + \frac{\theta^4_{\varepsilon,\mu}}{4}b_{\varepsilon,\mu} + \frac{\theta^3_{\varepsilon,\mu}}{3}c_{\varepsilon,\mu} = -2\varepsilon^3 x_{0,1} + \theta_{\varepsilon,\mu}\sigma(\mu\xi - \varepsilon^3 y_{0,1}), \\ \frac{\theta^4_{\varepsilon,\mu}}{4}a_{\varepsilon,\mu} + \frac{\theta^3_{\varepsilon,\mu}}{3}b_{\varepsilon,\mu} + \frac{\theta^2_{\varepsilon,\mu}}{2}c_{\varepsilon,\mu} = \mu\xi, \quad \frac{\theta^3_{\varepsilon,\mu}}{3}a_{\varepsilon,\mu} + \frac{\theta^2_{\varepsilon,\mu}}{2}b_{\varepsilon,\mu} + \theta_{\varepsilon,\mu}c_{\varepsilon,\mu} = -y_{0,2} \end{gathered}$$

с ненулевым определителем, обратная величина к которому есть $O(1)$ при $\varepsilon,\mu\to 0$, следовательно, она однозначно разрешима. При этом, в силу ограниченности правых частей системы (1.9) $a_{\varepsilon,\mu}, b_{\varepsilon,\mu}, c_{\varepsilon,\mu} = O(1)$, $\varepsilon,\mu\to 0$, тем самым $W_{\varepsilon,\mu}(t)=O(1)$ на $[0,\overline{T}]$, для некоторого $\overline{T}>0$. Условие $\|v_{\varepsilon,\mu}(t)\|\leqslant 1$ равносильно

$$1\geqslant \|v_{\varepsilon,1}(t)\|^2+\|v_{\varepsilon,2}(t)\|^2=\sigma^2\|\mu\xi-\varepsilon^3 y_{0,1}\|^2+\varepsilon^6\|W_{\varepsilon,\mu}(t)\|^2\longrightarrow 0 \text{ при } \varepsilon,\mu\to 0.$$

При достаточно малых ε, μ неравенство $\|v_{\varepsilon,\mu}(t)\|\leqslant 1$ выполняется.

Таким образом, для произвольного сколь угодно большого $\sigma>0$ нашлось допустимое управление $v_{\varepsilon,\mu}$, переводящее систему из положения $z_0(\mu)$ в начало координат за время, равное $1/\sigma$. Тогда найдется оптимальное управление, исходная задача (1.1) разрешима, и для оптимального времени справедлива оценка

$$T_{\varepsilon,\mu}\leqslant\frac{1}{\sigma}.$$

Поскольку σ произвольно, то $\lim\limits_{\varepsilon,\mu\to 0}T_{\varepsilon,\mu}=0$. □

Далее будем исследовать исходную задачу при $\mu=0$. Это задача (1.1) с

$$x_{0,2}=0. \tag{1.10}$$

А именно,

$$\begin{cases} \dot{x}=y, & x,\,y\in\mathbb{R}^{2n},\quad u\in\mathbb{R}^{2n},\\ \varepsilon^3\dot{y}=Jy+u, & \|u\|\leqslant 1,\quad 0<\varepsilon\ll 1,\\ x(0)=x_0=\begin{pmatrix} x_{0,1}\\ 0\end{pmatrix},\quad y(0)=y_0, & \\ x(T_\varepsilon)=0,\quad y(T_\varepsilon)=0,\quad T_\varepsilon\longrightarrow\min. & \end{cases} \tag{1.11}$$

2. Основная система уравнений и асимптотика ее решения

В силу принципа максимума Понтрягина [1; 11, гл. 2, теорема 18], который в рассматриваемом случае является необходимым и достаточным условием оптимальности, существует такой вектор $r_\varepsilon\in\mathbb{R}^{4n}$, что оптимальное управление в задаче (1.11) имеет вид

$$u_\varepsilon(t)=\frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t}r_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t}r_\varepsilon\|} \tag{2.1}$$

при всех таких t, что $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t}r_\varepsilon\neq 0$. Тогда в силу формулы Коши из (1.11) для r_ε получим векторное равенство

$$0=z_0+\int\limits_0^{T_\varepsilon}\frac{e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon\,\mathcal{B}_\varepsilon^*\,e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t}r_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^*\,e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t}r_\varepsilon\|}\,dt. \tag{2.2}$$

Тем самым вектор r_ε является вектором, порождающим оптимальное управление, тогда и только тогда, когда r_ε удовлетворяет соотношению (2.2). Таким образом, задача сводится к исследованию уравнения (2.2). С учетом вида матриц (1.3) для $r_\varepsilon=\{r_{\varepsilon,i}\}$, $i=\overline{1,4}$, где $r_{\varepsilon,i}$ — векторы-столбцы размером $n\times 1$, запишем

$$\mathcal{B}_\varepsilon^*\,e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t}r_\varepsilon=\begin{pmatrix} -\dfrac{t}{\varepsilon^3}\,r_{\varepsilon,1}+\dfrac{1}{\varepsilon^3}\,r_{\varepsilon,3}\\ \dfrac{t^2}{2\varepsilon^6}\,r_{\varepsilon,1}-\dfrac{t}{\varepsilon^3}\left(r_{\varepsilon,2}+\dfrac{1}{\varepsilon^3}r_{\varepsilon,3}\right)+\dfrac{1}{\varepsilon^3}r_{\varepsilon,4}\end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение новый неизвестный вектор $\overline{r}_\varepsilon$, компоненты $\overline{r}_{\varepsilon,i}$ которого связаны с $r_{\varepsilon,i}$ по формулам

$$2\varepsilon^3 T_\varepsilon^{-1}\overline{r}_{\varepsilon,1} = r_{\varepsilon,1}, \quad \overline{r}_{\varepsilon,2} = r_{\varepsilon,2} + \varepsilon^{-3}\, r_{\varepsilon,3}, \quad r_{\varepsilon,3} = T_\varepsilon \overline{r}_{\varepsilon,3}, \quad r_{\varepsilon,4} = T_\varepsilon \overline{r}_{\varepsilon,4}. \tag{2.3}$$

Запишем основную систему уравнений (2.2), сделав замену переменной интегрирования в правой части по формуле $t = T_\varepsilon \tau$,

$$-z_0 = T_\varepsilon \int\limits_0^1 e^{-\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon \tau}\mathcal{B}_\varepsilon \Psi_{\overline{r}_\varepsilon}(\tau)\, d\tau, \tag{2.4}$$

где в новых обозначениях

$$\Psi_{\overline{r}_\varepsilon}(\tau) = \frac{\begin{pmatrix} -2\varepsilon^3 T_\varepsilon^{-1}\tau\, \overline{r}_{\varepsilon,1} + \overline{r}_{\varepsilon,3} \\ \tau^2\, \overline{r}_{\varepsilon,1} - \tau \overline{r}_{\varepsilon,2} + \overline{r}_{\varepsilon,4} \end{pmatrix}}{\left(\| -2\varepsilon^3 T_\varepsilon^{-1}\tau\, \overline{r}_{\varepsilon,1} + \overline{r}_{\varepsilon,3}\|^2 + \|\tau^2\, \overline{r}_{\varepsilon,1} - \tau\overline{r}_{\varepsilon,2} + \overline{r}_{\varepsilon,4}\|^2\right)^{1/2}}. \tag{2.5}$$

Система (2.4) эквивалентна системе

$$-\varepsilon^6 x_{0,1} = -\varepsilon^3 T_\varepsilon^2 \int\limits_0^1 (\tau I,\, 0)\, \Psi_{\overline{r}_\varepsilon}(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2} T_\varepsilon^3 \int\limits_0^1 (0,\, \tau^2 I)\, \Psi_{\overline{r}_\varepsilon}(\tau)\, d\tau, \tag{2.6a}$$

$$0 = \int\limits_0^1 (0,\, \tau I)\, \Psi_{\overline{r}_\varepsilon}(\tau)\, d\tau, \tag{2.6b}$$

$$-\varepsilon^3 y_{0,1} = T_\varepsilon \int\limits_0^1 (I,\, 0)\, \Psi_{\overline{r}_\varepsilon}(\tau)\, d\tau, \tag{2.6c}$$

$$-\varepsilon^3 y_{0,2} = T_\varepsilon \int\limits_0^1 (0,\, I)\Psi_{\overline{r}_\varepsilon}(\tau)\, d\tau. \tag{2.6d}$$

Поскольку выражение (2.5) положительно однородно относительно вектора $\overline{r}_\varepsilon$, то будем считать, что

$$\|\overline{r}_\varepsilon\| = 1. \tag{2.7}$$

В силу (2.7) множество векторов $\overline{r}_\varepsilon$ ограничено и, следовательно, имеет предельные точки. Пусть $\overline{r}_0$ — одна из них, т. е. некоторая последовательность $\overline{r}_{\varepsilon_n} \to \overline{r}_0$ при $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Опустим далее в рассуждениях индекс n у членов последовательности ε_n. В силу уравнения (2.6c) вектор $\overline{r}_0$ удовлетворяет соотношению

$$-y_{0,1} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^3}{T_\varepsilon} = \int\limits_0^1 (I,\, 0)\Psi_{\overline{r}_0}(\tau)\, d\tau.$$

Если $\int_0^1 (I,\, 0)\Psi_{\overline{r}_0}(\tau)\, d\tau \neq 0$, то с учетом условия (1.5) выполняется $\varepsilon^3 \sim kT_\varepsilon$ при $k > 0$, но тогда в (2.6a) $-\varepsilon^6 x_{0,1} = O(\varepsilon^9)$, а это возможно только при $x_{0,1} = 0$. Пусть

$$x_{0,1} \neq 0. \tag{2.8}$$

Тогда $\int_0^1 (I,\,0)\Psi_{\overline{r}_0}(\tau)\,d\tau = 0$ и

$$\vartheta_\varepsilon := \frac{\varepsilon^3}{T_\varepsilon} = o(1), \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.9}$$

Далее, в силу (2.6d) выполняется $\int_0^1 (0,\,I)\Psi_{\overline{r}_0}(\tau)\,d\tau = 0$, а значит, с учетом (2.6c) и

$$\int\limits_0^1 \Psi_{\overline{r}_0}(\tau)\,d\tau = 0. \tag{2.10}$$

Из уравнения (2.6b) с учетом (2.9) выводим, что

$$\int\limits_0^1 (0,\,\tau I)\,\Psi_{\overline{r}_0}(\tau)\,d\tau = 0. \tag{2.11}$$

Из формул (2.5), (2.7) и (2.9) следует, что

$$\Psi_{\overline{r}_0}(\tau) = \begin{pmatrix} \overline{r}_{0,3} \\ \tau^2\,\overline{r}_{0,1} - \tau\overline{r}_{0,2} + \overline{r}_{0,4} \end{pmatrix} \frac{1}{\left(\|\overline{r}_{0,3}\|^2 + \|\tau^2\,\overline{r}_{0,1} - \tau\overline{r}_{0,2} + \overline{r}_{0,4}\|^2\right)^{1/2}} \tag{2.12}$$

и $\|\overline{r}_0\| = 1$. Поскольку знаменатель в правой части формулы (2.12) неотрицателен, то из уравнения (2.10) следует, что $\overline{r}_{0,3} = 0$. С учетом этого выпишем уравнения (2.10) и (2.11)

$$\int\limits_0^1 \frac{\tau^2\,\overline{r}_{0,1} - \tau\overline{r}_{0,2} + \overline{r}_{0,4}}{\|\tau^2\,\overline{r}_{0,1} - \tau\overline{r}_{0,2} + \overline{r}_{0,4}\|}\,d\tau = 0, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\tau(\tau^2\,\overline{r}_{0,1} - \tau\overline{r}_{0,2} + \overline{r}_{0,4})}{\|\tau^2\,\overline{r}_{0,1} - \tau\overline{r}_{0,2} + \overline{r}_{0,4}\|}\,d\tau = 0. \tag{2.13}$$

Заметим, что из вида этих уравнений следует, что $\overline{r}_{0,i} \neq 0$, $i = 1, 2, 4$. Действительно, если хотя бы один из этих векторов нулевой, то в силу уравнений (2.13) два других также нулевые, что противоречит условию нормировки (2.7). Покажем, что при предположении о попарной коллинеарности векторов $\overline{r}_{0,1}$, $\overline{r}_{0,2}$ и $\overline{r}_{0,4}$ уравнения (2.13) совместны. Пусть для некоторых постоянных a и b выполняется $\overline{r}_{0,2} = a\overline{r}_{0,1}$ и $\overline{r}_{0,4} = b\overline{r}_{0,1}$, тогда уравнения сведутся к следующим:

$$\int\limits_0^1 \frac{\tau^2 - a\tau + b}{|\tau^2 - a\tau + b|}\,d\tau = 0, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\tau(\tau^2 - a\tau + b)}{|\tau^2 - a\tau + b|}\,d\tau = 0.$$

Откуда находим

$$a = 1, \quad b = 3/16. \tag{2.14}$$

Итак,

$$\overline{r}_{0,2} = \overline{r}_{0,1}, \qquad \overline{r}_{0,4} = \frac{3}{16}\overline{r}_{0,1}. \tag{2.15}$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 (0,\,\tau^2 I)\,\Psi_{\overline{r}_0}(\tau)\,d\tau = \frac{\overline{r}_{0,1}}{\|\overline{r}_{0,1}\|}\int\limits_0^1 \frac{\tau^2(\tau^2 - \tau + 3/16)}{|\tau^2 - \tau + 3/16|}\,d\tau = \frac{\overline{r}_{0,1}}{16\|\overline{r}_{0,1}\|}. \tag{2.16}$$

Принимая во внимание соотношение (2.9), из уравнения (2.6a) получим

$$-2x_{0,1}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\vartheta_\varepsilon^2}{T_\varepsilon} = \int\limits_0^1 (0,\,\tau^2 I)\Psi_{\overline{r}_0}(\tau)\,d\tau \neq 0.$$

Тем самым

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{T_\varepsilon}{\vartheta_\varepsilon^2}=K>0,$$

а в силу определения (2.9) выполняется $T_\varepsilon \sim T_0\varepsilon^2$. Из равенств (2.6a), (2.16) получим $-32x_{0,1}=T_0^3\overline{r}_{0,1}$. Введем новую нормировку вектора $\overline{r}_\varepsilon$

$$\|\overline{r}_{\varepsilon,1}\|=1,\qquad \|\overline{r}_{0,1}\|=1. \tag{2.17}$$

Тогда

$$\overline{r}_{0,1}=-\frac{x_{0,1}}{\|x_{0,1}\|},\qquad T_0=\sqrt[3]{32\|x_{0,1}\|}. \tag{2.18}$$

3. Алгоритм построения асимптотики решения

Введем новые неизвестные малые величины θ_ε и ρ_ε по формулам

$$\vartheta_\varepsilon=\varepsilon(\vartheta_0+\theta_\varepsilon),\quad \overline{r}_\varepsilon=\overline{r}_0+\rho_\varepsilon, \tag{3.1}$$

где $\vartheta_0=T_0^{-1}$. Из (2.17) получаем уравнение

$$\|\rho_{\varepsilon,1}\|^2+2\langle\rho_{\varepsilon,1},\overline{r}_{0,1}\rangle=0. \tag{3.2}$$

Задача, таким образом, сводится к нахождению асимптотики скалярной величины θ_ε и вектора ρ_ε. Обозначим

$$\omega_\varepsilon=(\theta_\varepsilon,\rho_\varepsilon^*)^*.$$

Принимая во внимание равенства (2.14), (2.15), (2.17), (3.1), запишем в новых обозначениях формулу для функции $\Psi_{\overline{r}_\varepsilon}(\tau)=\Psi_{\omega_\varepsilon}(\tau)$

$$\Psi_{\omega_\varepsilon}(\tau)=\begin{pmatrix} -2\varepsilon(\vartheta_0+\theta_\varepsilon)\tau\,(\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,1})+\ \rho_{\varepsilon,3} \\ \tau^2(\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,1})-\tau(\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,2})+b\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,4}\end{pmatrix}$$
$$\times\big(\|-2\varepsilon(\vartheta_0+\theta_\varepsilon)\tau\,(\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,1})+\ \rho_{\varepsilon,3}\|^2$$
$$+\ \|\tau^2(\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,1})-\tau(\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,2})+b\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,4}\|^2\big)^{-1/2} \tag{3.3}$$

и систему (2.6) в матричной форме

$$g(\varepsilon,\theta_\varepsilon)=\int_0^1 G(\tau,\varepsilon,\theta_\varepsilon)\Psi_{\omega_\varepsilon}(\tau)d\tau, \tag{3.4}$$

где

$$g(\varepsilon,\theta_\varepsilon)=\begin{pmatrix} -2(\vartheta_0+\theta_\varepsilon)^3x_{0,1} \\ 0 \\ -\varepsilon(\vartheta_0+\theta_\varepsilon)y_{0,1} \\ -\varepsilon(\vartheta_0+\theta_\varepsilon)y_{0,2}\end{pmatrix},\quad G(\tau,\varepsilon,\theta_\varepsilon)=\begin{pmatrix} -2\varepsilon(\vartheta_0+\theta_\varepsilon)\tau I & \tau^2 I \\ 0 & \tau I \\ I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}.$$

Будем далее искать решение системы (3.2), (3.4) среди векторов ω_ε, для которых выполняется оценка

$$\|\omega_\varepsilon\|=O(\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0, \tag{3.5}$$

в виде

$$\theta_\varepsilon=\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k(\varepsilon),\quad \rho_\varepsilon=\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k(\varepsilon),\quad \theta_k(\varepsilon),\,\|\rho_k(\varepsilon)\|=O^*(\varepsilon^k),\quad \varepsilon\to 0,\quad k=1,2,\ldots. \tag{3.6}$$

Члены $\omega_k = (\theta_k, \rho_k^*)^*$, $k = 2, \ldots$, находятся последовательно из систем, полученных путем подстановки представлений (3.6) в систему (3.2), (3.4), разложения правых частей уравнений в ряды и приравнивания слагаемых одного порядка малости.

Заметим, что многочлен $\tau^2 - \tau + 3/16$ в знаменателе $\Psi_{\overline{r}_0}(\tau)$ (2.12) обращается в нуль при $\tau_1 = 1/4$ и $\tau_2 = 3/4$. Разобьем отрезок интегрирования на две части, содержащие по одной особой точке, и представим интеграл в правой части системы (3.4) в виде

$$\int\limits_0^1 G(\tau,\varepsilon,\theta_\varepsilon)\Psi_{\omega_\varepsilon}(\tau)d\tau = \int\limits_0^{1/2} \cdot + \int\limits_{1/2}^{1} \cdot =: J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon). \tag{3.7}$$

Далее, для нахождения асимптотики интегралов $J_1(\varepsilon)$ и $J_2(\varepsilon)$ применим метод вспомогательного параметра, описанный в [12; 13]. Разобьем $J_1(\varepsilon)$ на сумму интегралов следующим образом:

$$J_1(\varepsilon) = \int\limits_0^{1/4-\nu} \cdot + \int\limits_{1/4-\nu}^{1/4+\nu} \cdot + \int\limits_{1/4+\nu}^{1/2} \cdot =: J_{1,1}(\varepsilon,\nu) + J_{1,2}(\varepsilon,\nu) + J_{1,3}(\varepsilon,\nu),$$

где ν — малый вспомогательный параметр. Пусть

$$\nu = \varepsilon^p, \quad p \in (0,1). \tag{3.8}$$

Получим асимптотику интеграла $J_{1,1}(\varepsilon,\nu)$. Функцию $G(\tau,\varepsilon,\theta_\varepsilon)$ представим в виде

$$G(\tau,\varepsilon,\theta_\varepsilon) =: G_0(\tau) + \varepsilon G_1(\tau) + \varepsilon\theta_\varepsilon G_2(\tau).$$

Второй множитель в правой части формулы (3.3) запишем следующим образом:

$$\left(\| -2\varepsilon(\vartheta_0+\theta_\varepsilon)\tau\,(\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,1}) + \rho_{\varepsilon,3}\|^2 + \|\tau^2(\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,1}) - \tau(\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,2}) + b\overline{r}_{0,1} + \rho_{\varepsilon,4}\|^2 \right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{|\tau^2-\tau+b|}\left(1 + \frac{p(\tau,\varepsilon,\omega_\varepsilon)}{(\tau^2-\tau+b)^2}\right)^{-1/2},$$

где

$$p(\tau,\varepsilon,\omega_\varepsilon) = 2(\tau^2-\tau+b)\langle \overline{r}_{0,1}, \tau^2\rho_{\varepsilon,1} - \tau\rho_{\varepsilon,2} + \rho_{\varepsilon,4}\rangle + \|\tau^2\rho_{\varepsilon,1} - \tau\rho_{\varepsilon,2} + \rho_{\varepsilon,4}\|^2$$

$$+ \| -2\varepsilon(\vartheta_0+\theta_\varepsilon)\tau\,(\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,1}) + \rho_{\varepsilon,3}\|^2 = p_1(\tau,\varepsilon,\omega_\varepsilon) + O(\|\rho_\varepsilon\|^2 + \varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0, \quad \tau \in [0,1],$$

где $p_1(\tau,\varepsilon,\omega_\varepsilon) := 2(\tau^2-\tau+b)\langle \overline{r}_{0,1}, \tau^2\rho_{\varepsilon,1} - \tau\rho_{\varepsilon,2} + \rho_{\varepsilon,4}\rangle$. Тогда для подынтегральной функции имеем

$$G(\tau,\varepsilon,\theta_\varepsilon)\Psi_{\omega_\varepsilon}(\tau)$$

$$\sim \quad \frac{1}{|\tau^2-\tau+b|}\left((\tau^2-\tau+b)G_0(\tau)\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{r}_{0,1}\end{pmatrix} + F_1(\tau,\varepsilon,\omega_\varepsilon) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{F_k(\tau,\varepsilon,\omega_\varepsilon)}{(\tau^2-\tau+b)^{k-1}}\right), \tag{3.9}$$

где $F_k(\tau,\varepsilon,\omega_\varepsilon)$ — однородные многочлены степени k относительно ε и координат вектора ω_ε с аналитическими по τ векторными коэффициентами, в частности,

$$F_1(\tau,\varepsilon,\omega_\varepsilon) = -G_0(\tau)\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{r}_{0,1}\end{pmatrix}\langle \overline{r}_{0,1}, \tau^2\rho_{\varepsilon,1} - \tau\rho_{\varepsilon,2} + \rho_{\varepsilon,4}\rangle + \varepsilon(\tau^2-\tau+b)G_1(\tau)\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{r}_{0,1}\end{pmatrix}$$

$$+ G_0(\tau)\begin{pmatrix} -2\varepsilon\vartheta_0\tau\overline{r}_{0,1} + \rho_{\varepsilon,3} \\ \tau^2\rho_{\varepsilon,1} - \tau\rho_{\varepsilon,2} + \rho_{\varepsilon,4}\end{pmatrix}.$$

Тогда для любого $\gamma > 1$ имеем

$$\int\limits_0^{1/4-\nu} \frac{F_1(\tau,\varepsilon,\omega_\varepsilon)d\tau}{\tau^2-\tau+b} = \overset{1}{\mathcal{F}_1}(\varepsilon,\omega_\varepsilon) + \overset{1}{\mathfrak{F}_\gamma}(\varepsilon,\omega_\varepsilon,\nu) + O(\varepsilon^\gamma), \tag{3.10}$$

где

$$\overset{1}{\mathcal{F}_1}(\varepsilon,\omega_\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\langle\overline{r}_{0,1}, c_4\rho_{\varepsilon,1} - c_3\rho_{\varepsilon,2} + c_2\rho_{\varepsilon,4}\rangle\overline{r}_{0,1} + c_4\rho_{\varepsilon,1} - c_3\rho_{\varepsilon,2} + c_2\rho_{\varepsilon,4} \\ -\langle\overline{r}_{0,1}, c_3\rho_{\varepsilon,1} - c_2\rho_{\varepsilon,2} + c_1\rho_{\varepsilon,4}\rangle\overline{r}_{0,1} + c_3\rho_{\varepsilon,1} - c_2\rho_{\varepsilon,2} + c_1\rho_{\varepsilon,4} \\ -2\varepsilon\vartheta_0 c_1\overline{r}_{0,1} + c_0\rho_{\varepsilon,3} \\ -\langle\overline{r}_{0,1}, c_2\rho_{\varepsilon,1} - c_1\rho_{\varepsilon,2} + c_0\rho_{\varepsilon,4}\rangle\overline{r}_{0,1} + c_2\rho_{\varepsilon,1} - c_1\rho_{\varepsilon,2} + c_0\rho_{\varepsilon,4} \end{pmatrix},$$

c_i, $i=\overline{0,4}$ — известные постоянные. В формуле (3.10) и далее через $\overset{1}{\mathfrak{F}_\gamma}(\varepsilon,\omega_\varepsilon,\nu)$ будут обозначаться суммы конечного числа слагаемых вида $\varphi(\varepsilon)\psi(\omega_\varepsilon)\nu^c\ln^d\nu$, где $d\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $c^2+d^2\neq 0$, $\varphi(\varepsilon)=O^*(\varepsilon^{\gamma_1})$, $\psi(\omega_\varepsilon)=O^*(\|\omega_\varepsilon\|^{\gamma_2})$ для некоторых γ_1,γ_2, что в силу предположения (3.5) дает $\psi(\omega_\varepsilon)=O^*(\varepsilon^{\gamma_2})$. Запись $\varphi(\varepsilon)=O^*(\varepsilon^\gamma)$, $\varepsilon\to 0$ означает, что $\forall\sigma<\gamma\quad\varphi(\varepsilon)=o(\varepsilon^\sigma)$ [12]. В частности, $\varepsilon\ln^l\varepsilon$, $l>0$, есть $O^*(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$, но не $O(\varepsilon)$. В силу леммы [12, п. 2] при получении асимптотики интеграла $J_1(\varepsilon)$ методом вспомогательного параметра слагаемые $\overset{1}{\mathfrak{F}_\gamma}(\varepsilon,\omega_\varepsilon,\nu)$ можно не учитывать.

Следующие члены в разложении (3.9) имеют нарастающие особенности в точке $1/4$. Тем самым для любого $N\geqslant 1$ имеем

$$J_{1,1}(\varepsilon,\nu) = \int\limits_0^{1/4} G_0(\tau)d\tau\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{r}_{0,1}\end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \overset{1}{\mathcal{F}_k}(\varepsilon,\omega_\varepsilon) + \overset{2}{\mathfrak{F}_N}(\varepsilon,\omega_\varepsilon,\nu) + O(\varepsilon^{N+1}).$$

Аналогичным образом получаем для любого $N\geqslant 1$

$$J_{1,3}(\varepsilon,\nu) = -\int\limits_{1/4+\nu}^{1/2} G_0(\tau)d\tau\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{r}_{0,1}\end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \overset{2}{\mathcal{F}_k}(\varepsilon,\omega_\varepsilon) + \overset{3}{\mathfrak{F}_N}(\varepsilon,\omega_\varepsilon,\nu) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

где $\overset{2}{\mathcal{F}_1}(\varepsilon,\omega_\varepsilon)$ имеет ту же структуру, что и $\overset{1}{\mathcal{F}_1}(\varepsilon,\omega_\varepsilon)$.

В интеграле $J_{1,2}(\varepsilon,\nu)$ сделаем замену переменной интегрирования по формуле $\eta=\tau-1/4$

$$\int\limits_{1/4-\nu}^{1/4+\nu} G(\tau,\varepsilon,\theta_\varepsilon)\Psi_{\omega_\varepsilon}(\tau)d\tau = \int\limits_{-\nu}^{\nu}\overline{G}(\eta,\varepsilon,\theta_\varepsilon)\overline{\Psi}_{\omega_\varepsilon}(\eta)d\eta.$$

Далее, запишем $\overline{G}(\eta,\varepsilon,\theta_\varepsilon)=H_0+H_1(\eta,\varepsilon)+H_2(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)+H_3(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)$, где $H_0=\overline{G}_{0,0}$, $H_1(\eta,\varepsilon)=\eta\overline{G}_{0,1}+\varepsilon\overline{G}_{1,0}$, $H_2(\eta,\varepsilon)=\eta^2\overline{G}_{0,2}+\eta\varepsilon\overline{G}_{1,1}+\varepsilon\theta_\varepsilon\overline{G}_{2,0}$, $H_3(\eta,\varepsilon)=\eta\varepsilon\theta_\varepsilon\overline{G}_{2,1}$, где $\overline{G}_{i,j}$ с соответствующими индексами — постоянные матрицы, коэффициенты при η^j в разложении матриц $\overline{G}_i(\eta):=G_i(\eta+1/4)$ по степеням η.

Для получения асимптотики функции $\overline{\Psi}_{\omega_\varepsilon}(\eta)$ второй множитель в правой части формулы (3.3) представим в виде

$$\frac{2}{\sqrt{\eta^2+2a_\varepsilon\eta+b_\varepsilon}}\Big(1+\frac{q(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)}{\eta^2+2a_\varepsilon\eta+b_\varepsilon}\Big)^{-1/2},$$

где

$$a_\varepsilon = -2\langle\overline{r}_{0,1},\,\widetilde{\rho}_{\varepsilon,1}\rangle,\quad b_\varepsilon = 4\|\widetilde{\rho}_{\varepsilon,1}\|^2 + \|-\varepsilon\vartheta_0\,\overline{r}_{0,1} + 2\rho_{\varepsilon,3}\|^2, \tag{3.11}$$

$$
\begin{gathered}
\widetilde{\rho}_{\varepsilon,1} := \rho_{\varepsilon,1}/16 - \rho_{\varepsilon,2}/4 + \rho_{\varepsilon,4},\\
q(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon) = q_3(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon) + O(\eta^4+\varepsilon^4),\\
q_3(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon) = -2\varepsilon\langle -\varepsilon\vartheta_0\overline{r}_{0,1} + 2\rho_{\varepsilon,3},\, \vartheta_0(4\eta\overline{r}_{0,1}+\rho_{\varepsilon,1}) + \theta_\varepsilon\overline{r}_{0,1}\rangle\\
+ 2\langle -\eta\overline{r}_{0,1} + 2\widetilde{\rho}_{\varepsilon,1},\, 2\eta^2\overline{r}_{0,1} + \eta\rho_{\varepsilon,1} - 2\eta\rho_{\varepsilon,2}\rangle. \qquad (3.12)
\end{gathered}
$$

Преобразуем квадратный трехчлен $\eta^2+2a_\varepsilon\eta+b_\varepsilon = (\eta+a_\varepsilon)^2+b_\varepsilon-a_\varepsilon^2$. Далее, будем искать вектор $\widetilde{\rho}_{\varepsilon,1}$ в виде

$$
\widetilde{\rho}_{\varepsilon,1} = \overset{1}{\varrho}_\varepsilon + \overset{1}{\delta}_\varepsilon\,\overline{r}_{0,1}, \quad \overset{1}{\varrho}_\varepsilon \perp \overline{r}_{0,1},
$$

тогда с учетом (3.11) получим

$$
b_\varepsilon - a_\varepsilon^2 = 4\|\overset{1}{\varrho}_\varepsilon\|^2 + \|-\varepsilon\vartheta_0\,\overline{r}_{0,1} + 2\rho_{\varepsilon,3}\|^2.
$$

Сделаем следующие дополнительные предположения о решении системы (3.2), (3.4)

$$
0 \neq \|\overset{1}{\varrho}_\varepsilon\| = O^*(\varepsilon), \quad \forall\gamma>0 \quad \varepsilon^{1+\gamma} = o(\|\overset{1}{\varrho}_\varepsilon\|), \quad \varepsilon\to 0. \qquad (3.13)
$$

Тем самым при выполнении условий (3.8), (3.13) справедлива оценка

$$
\frac{q(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)}{\eta^2+2a_\varepsilon\eta+b_\varepsilon} = O^*(\varepsilon^{3p-2}),
$$

значит, при $p>2/3$ эта функция мала при $\varepsilon\to 0$. Тогда

$$
\overline{\Psi}_{\omega_\varepsilon}(\eta) \sim \frac{2}{\sqrt{\eta^2+2a_\varepsilon\eta+b_\varepsilon}}\Big(1 - \frac{q_3(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)}{2(\eta^2+2a_\varepsilon\eta+b_\varepsilon)} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{q_{k+2}(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)}{(\eta^2+2a_\varepsilon\eta+b_\varepsilon)^k}\Big)\sum_{k=1}^{4} R_k(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon),
$$

где $R_k(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)$ — соответствующее слагаемое в разложении векторного множителя функции $\overline{\Psi}_{\omega_\varepsilon}(\eta) = \Psi_{\omega_\varepsilon}(\eta+1/4)$ (3.3), представляет собой вектор-функцию, каждая координата которой есть однородный многочлен k-й степени от η, ε и координат вектора ω_ε. В частности,

$$
R_1(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}\varepsilon\vartheta_0\overline{r}_{0,1} + \rho_{\varepsilon,3} \\ -\dfrac{1}{2}\eta\overline{r}_{0,1} + \widetilde{\rho}_{\varepsilon,1} \end{pmatrix}.
$$

Тогда для подынтегральной функции получаем

$$
\overline{G}(\eta,\varepsilon,\theta_\varepsilon)\overline{\Psi}_{\omega_\varepsilon}(\eta) \sim \frac{2H_0R_1(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)}{\sqrt{\eta^2+2a_\varepsilon\eta+b_\varepsilon}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{R}_{k+2}(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)}{\sqrt{(\eta^2+2a_\varepsilon\eta+b_\varepsilon)^{2k+1}}}.
$$

В силу предположений (3.8), (3.13) выполняется $\|\overset{1}{\varrho}_\varepsilon\|/\nu = o(1)$, $\varepsilon\to 0$, тогда для любого $\gamma>1$

$$
\int_{-\nu}^{\nu}\frac{2H_0R_1(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)}{\sqrt{\eta^2+2a_\varepsilon\eta+b_\varepsilon}}\,d\eta = \overset{3}{\mathcal{F}}_1(\varepsilon,\rho_\varepsilon) + \overset{4}{\mathcal{F}}_1(\varepsilon,\rho_\varepsilon)\ln\left|b_\varepsilon-a_\varepsilon^2\right| + \overset{5}{\mathfrak{F}}_\gamma(\varepsilon,\omega_\varepsilon,\nu) + O^*(\varepsilon^\gamma),
$$

где $\overset{3}{\mathcal{F}}_1(\varepsilon,\rho_\varepsilon)$, $\overset{4}{\mathcal{F}}_1(\varepsilon,\rho_\varepsilon)$ — однородные многочлены первой степени относительно ε и координат вектора ρ_ε с известными коэффициентами

$$
\overset{3}{\mathcal{F}}_1(\varepsilon,\rho_\varepsilon) = \langle\overline{r}_{0,1},\, \widetilde{\rho}_{\varepsilon,1}\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\,\overline{r}_{0,1} \\ \overline{r}_{0,1} \\ 0 \\ 4\,\overline{r}_{0,1} \end{pmatrix}, \quad \overset{4}{\mathcal{F}}_1(\varepsilon,\rho_\varepsilon) = \langle\overline{r}_{0,1},\, \widetilde{\rho}_{\varepsilon,1}\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\,\overline{r}_{0,1} \\ \frac{1}{2}\,\overline{r}_{0,1} \\ 0 \\ 2\,\overline{r}_{0,1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\,\widetilde{\rho}_{\varepsilon,1} \\ \frac{1}{2}\,\widetilde{\rho}_{\varepsilon,1} \\ -\varepsilon\vartheta_0\overline{r}_{0,1} + 2\rho_{\varepsilon,3} \\ 2\,\widetilde{\rho}_{\varepsilon,1} \end{pmatrix},
$$

слагаемое $\overset{5}{\mathfrak{F}}_\gamma\,(\varepsilon,\omega_\varepsilon,\nu)$ в асимптотике интеграла $J_1(\varepsilon)$ в силу леммы [12, п. 2] можно не учитывать.

Отметим, что при $\gamma\geqslant n\geqslant 2k+1$ выполняется

$$\int\limits_{-\nu}^{\nu}\frac{\widetilde{R}_n(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)}{\sqrt{(\eta^2+2a_\varepsilon\eta+b_\varepsilon)^{2k+1}}}\,d\eta=\overset{5}{\mathcal{F}}_n\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)+\overset{6}{\mathcal{F}}_n\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)\ln\left|b_\varepsilon-a_\varepsilon^2\right|+\overset{6}{\mathfrak{F}}_\gamma\,(\varepsilon,\omega_\varepsilon,\nu)+O^*(\varepsilon^\gamma).$$

Тогда

$$J_{1,2}(\varepsilon,\nu)=\overset{3}{\mathcal{F}}_1\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)+\overset{4}{\mathcal{F}}_1\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)\ln\left|b_\varepsilon-a_\varepsilon^2\right|$$
$$+\sum_{k=2}^{N}\overset{7}{\mathcal{F}}_k\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)+\ln\left|b_\varepsilon-a_\varepsilon^2\right|\sum_{k=2}^{N}\overset{8}{\mathcal{F}}_k\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)+\overset{7}{\mathfrak{F}}_N\,(\varepsilon,\omega_\varepsilon,\nu)+O^*(\varepsilon^{N+1}).$$

Асимптотика интеграла $J_2(\varepsilon)$ (3.7) строится аналогично $J_1(\varepsilon)$. В интеграле $J_{2,2}(\varepsilon,\nu)$, где ν, вообще говоря — уже другой малый вспомогательный параметр, для любого $\gamma>1$ выполняется

$$\int\limits_{-\nu}^{\nu}\frac{2\overline{H}_0\overline{R}_1(\eta,\varepsilon,\omega_\varepsilon)}{\sqrt{\eta^2+2\overline{a}_\varepsilon\eta+\overline{b}_\varepsilon}}d\eta=\overset{9}{\mathcal{F}}_1\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)+\overset{10}{\mathcal{F}}_1\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)\ln\left|\overline{b}_\varepsilon-\overline{a}_\varepsilon^2\right|+\overset{8}{\mathfrak{F}}_\gamma\,(\varepsilon,\omega_\varepsilon,\nu)+O^*(\varepsilon^\gamma),$$

где $\overline{a}_\varepsilon=2\langle\overline{r}_{0,1},\,\widetilde{\rho}_{\varepsilon,2}\rangle$, $\overline{b}_\varepsilon=4\|\widetilde{\rho}_{\varepsilon,2}\|^2+\|-3\varepsilon\vartheta_0\,\overline{r}_{0,1}+\,2\rho_{\varepsilon,3}\|^2$, $\widetilde{\rho}_{\varepsilon,2}:=(9/16)\rho_{\varepsilon,1}-(3/4)\rho_{\varepsilon,2}+\rho_{\varepsilon,4}$, $\widetilde{\rho}_{\varepsilon,2}=\overset{2}{\varrho}_\varepsilon+\overset{2}{\delta}_\varepsilon\,\overline{r}_{0,1}$, $\overset{2}{\varrho}_\varepsilon\perp\overline{r}_{0,1}$,

$$0\neq\|\overset{2}{\varrho}_\varepsilon\|=O^*(\varepsilon),\quad\forall\gamma>0\quad\varepsilon^{1+\gamma}=o(\|\overset{2}{\varrho}_\varepsilon\|),\quad\varepsilon\to0,\tag{3.14}$$

$\overset{9}{\mathcal{F}}_1\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)$, $\overset{10}{\mathcal{F}}_1\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)$ — однородные многочлены первой степени относительно ε и координат вектора ρ_ε с известными коэффициентами

$$\overset{9}{\mathcal{F}}_1\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)=\langle\overline{r}_{0,1},\,\widetilde{\rho}_{\varepsilon,2}\rangle\begin{pmatrix}\frac{9}{4}\,\overline{r}_{0,1}\\3\,\overline{r}_{0,1}\\0\\4\,\overline{r}_{0,1}\end{pmatrix},\quad\overset{10}{\mathcal{F}}_1\,(\varepsilon,\rho_\varepsilon)=\langle\overline{r}_{0,1},\,\widetilde{\rho}_{\varepsilon,2}\rangle\begin{pmatrix}\frac{9}{8}\,\overline{r}_{0,1}\\\frac{3}{2}\,\overline{r}_{0,1}\\0\\2\,\overline{r}_{0,1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{9}{8}\,\widetilde{\rho}_{\varepsilon,2}\\\frac{3}{2}\,\widetilde{\rho}_{\varepsilon,2}\\-3\varepsilon\vartheta_0\overline{r}_{0,1}+2\rho_{\varepsilon,3}\\2\,\widetilde{\rho}_{\varepsilon,2}\end{pmatrix},$$

слагаемое $\overset{8}{\mathfrak{F}}_\gamma\,(\varepsilon,\omega_\varepsilon,\nu)$ в силу леммы [12, п. 2] можно не учитывать.

4. Получение первых асимптотических приближений решения

Подставив в правую часть системы (3.4) полученные разложения интегралов $J_1(\varepsilon)$ и $J_2(\varepsilon)$ и отбросив слагаемые, содержащие вспомогательный параметр, учитывая уравнение (3.2), получаем систему первого приближения относительно неизвестных малых векторов $\rho_{1,k}$, $k=\overline{1,4}$ и скалярной величины θ_1 (здесь и далее указание на зависимость величин от ε для упрощения записи опустим)

$$-6\,\theta_1\vartheta_0^2x_{0,1}=\left\langle\overline{r}_{0,1},\frac{1}{4}\widetilde{\rho}_{1,1}+\frac{9}{4}\widetilde{\rho}_{1,2}-\widetilde{\rho}_{1,3}\right\rangle\overline{r}_{0,1}+\widetilde{\rho}_{1,3}$$
$$+\frac{1}{8}\alpha\left(\overline{r}_{0,1}\langle\overline{r}_{0,1},\,\widetilde{\rho}_{1,1}\rangle-\widetilde{\rho}_{1,1}\right)+\frac{9}{8}\beta\left(\overline{r}_{0,1}\langle\overline{r}_{0,1},\,\widetilde{\rho}_{1,2}\rangle-\widetilde{\rho}_{1,2}\right),\tag{4.1a}$$

$$0=\left\langle\overline{r}_{0,1},\widetilde{\rho}_{1,1}+3\widetilde{\rho}_{1,2}-\widetilde{\rho}_{1,4}\right\rangle\overline{r}_{0,1}+\widetilde{\rho}_{1,4}$$
$$+\frac{1}{2}\alpha\left(\overline{r}_{0,1}\langle\overline{r}_{0,1},\,\widetilde{\rho}_{1,1}\rangle-\widetilde{\rho}_{1,1}\right)+\frac{3}{2}\beta\left(\overline{r}_{0,1}\langle\overline{r}_{0,1},\,\widetilde{\rho}_{1,2}\rangle-\widetilde{\rho}_{1,2}\right),\tag{4.1b}$$

$$\varepsilon(-\vartheta_0 y_{0,1} + 2\vartheta_0 d_1 \overline{r}_{0,1}) = d_0\rho_{1,3} + \alpha\,(\varepsilon\vartheta_0\overline{r}_{0,1} - 2\rho_{1,3}) + \beta\,(3\varepsilon\vartheta_0\overline{r}_{0,1} - 2\rho_{1,3})\,, \tag{4.1c}$$

$$\begin{gathered} -\varepsilon\vartheta_0 y_{0,2} = \Big\langle \overline{r}_{0,1}, 4\widetilde{\rho}_{1,1} + 4\widetilde{\rho}_{1,2} - \widetilde{\rho}_{1,5} \Big\rangle\, \overline{r}_{0,1} + \widetilde{\rho}_{1,5} \\ + 2\alpha\,(\overline{r}_{0,1}\langle \overline{r}_{0,1},\, \widetilde{\rho}_{1,1}\rangle - \widetilde{\rho}_{1,1}) + 2\beta\,(\overline{r}_{0,1}\langle \overline{r}_{0,1},\, \widetilde{\rho}_{1,2}\rangle - \widetilde{\rho}_{1,2})\,, \end{gathered} \tag{4.1d}$$

$$\langle \rho_{1,1}, \overline{r}_{0,1}\rangle = 0, \tag{4.1e}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{\rho}_{1,1} = \frac{1}{16}\rho_{1,1} - \frac{1}{4}\rho_{1,2} + \rho_{1,4}, \quad \widetilde{\rho}_{1,2} = \frac{9}{16}\rho_{1,1} - \frac{3}{4}\rho_{1,2} + \rho_{1,4}, \\ \widetilde{\rho}_{1,3} = d_4\rho_{1,1} - d_3\rho_{1,2} + d_2\rho_{1,4}, \quad \widetilde{\rho}_{1,4} = d_3\rho_{1,1} - d_2\rho_{1,2} + d_1\rho_{1,4}, \\ \widetilde{\rho}_{1,5} = d_2\rho_{1,1} - d_1\rho_{1,2} + d_0\rho_{1,4}, \end{gathered} \tag{4.1f}$$

$$\rho_{1,i} = \overset{i}{\rho}_1 + \overset{i}{\lambda}_1\, \overline{r}_{0,1}, \quad \langle \overset{i}{\rho}_1,\, \overline{r}_{0,1}\rangle = 0, \quad i \in \{1,2,4\}, \tag{4.1g}$$

$$\widetilde{\rho}_{1,j} = \overset{j}{\varrho}_1 + \overset{j}{\delta}_1\, \overline{r}_{0,1}, \quad \langle \overset{j}{\varrho}_1,\, \overline{r}_{0,1}\rangle = 0, \quad j = \overline{1,5}, \tag{4.1h}$$

$$\begin{gathered} \alpha = \ln\big(4\|\, \overset{1}{\varrho}_1\, \|^2 + \| - \varepsilon\vartheta_0\, \overline{r}_{0,1} +\, 2\rho_{1,3}\|^2\big), \\ \beta = \ln\big(4\|\, \overset{2}{\varrho}_1\, \|^2 + \| - 3\varepsilon\vartheta_0\, \overline{r}_{0,1} +\, 2\rho_{1,3}\|^2\big), \end{gathered} \tag{4.1i}$$

где d_i, $i = \overline{0,4}$, — известные постоянные. При этом в силу уравнений (4.1e), (4.1g) получаем $\overset{1}{\lambda}_1 = 0$. Тем самым $\rho_{1,1} = \overset{1}{\rho}_1$. Заметим, что из уравнений (4.1f) величины $\overset{k}{\delta}_1$, $k = \overline{1,5}$ выражаются через $\overset{2}{\lambda}_1$ и $\overset{4}{\lambda}_1$ следующим образом:

$$\overset{1}{\delta}_1 = -\frac{1}{4}\, \overset{2}{\lambda}_1 + \overset{4}{\lambda}_1, \quad \overset{2}{\delta}_1 = -\frac{3}{4}\, \overset{2}{\lambda}_1 + \overset{4}{\lambda}_1, \quad \overset{3}{\delta}_1 = -d_3\, \overset{2}{\lambda}_1 + d_2\, \overset{4}{\lambda}_1,$$

$$\overset{4}{\delta}_1 = -d_2\, \overset{2}{\lambda}_1 + d_1\, \overset{4}{\lambda}_1, \quad \overset{5}{\delta}_1 = -d_1\, \overset{2}{\lambda}_1 + d_0\, \overset{4}{\lambda}_1$$

и $\overset{k}{\varrho}_1$, $k = \overline{1,5}$, через $\overset{i}{\rho}_1$, $i \in \{1,2,4\}$:

$$\begin{gathered} \overset{1}{\varrho}_1 = \frac{1}{16}\, \overset{1}{\rho}_1 - \frac{1}{4}\, \overset{2}{\rho}_1 + \overset{4}{\rho}_1, \quad \overset{2}{\varrho}_1 = \frac{9}{16}\, \overset{1}{\rho}_1 - \frac{3}{4}\, \overset{2}{\rho}_1 + \overset{4}{\rho}_1, \quad \overset{3}{\varrho}_1 = d_4\, \overset{1}{\rho}_1 - d_3\, \overset{2}{\rho}_1 + d_2\, \overset{4}{\rho}_1, \\ \overset{4}{\varrho}_1 = d_3\, \overset{1}{\rho}_1 - d_2\, \overset{2}{\rho}_1 + d_1\, \overset{4}{\rho}_1, \quad \overset{5}{\varrho}_1 = d_2\, \overset{1}{\rho}_1 - d_1\, \overset{2}{\rho}_1 + d_0\, \overset{4}{\rho}_1\,. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Разложим левые и правые части уравнений (4.1a), (4.1b), (4.1d) в ортогональную сумму векторов, коллинеарных и ортогональных вектору $\overline{r}_{0,1}$. Приравнивая отдельно коллинеарные вектору $\overline{r}_{0,1}$ и ортогональные составляющие и учитывая первое равенство в (2.18), получим следующие уравнения:

$$\begin{gathered} 6\,\theta_1\vartheta_0^2\|x_{0,1}\| = -\frac{7}{4}\, \overset{2}{\lambda}_1 + \frac{5}{2}\, \overset{4}{\lambda}_1, \\ 0 = -\frac{5}{2}\, \overset{2}{\lambda}_1 + 4\, \overset{4}{\lambda}_1, \quad -\varepsilon\vartheta_0\delta_{y_{0,2}} = -4\, \overset{2}{\lambda}_1 + 8\, \overset{4}{\lambda}_1, \end{gathered} \tag{4.3}$$

$$0 = d_4\, \overset{1}{\rho}_1 - d_3\, \overset{2}{\rho}_1 + d_2\, \overset{4}{\rho}_1 - \frac{1}{8}\alpha\Big(\frac{1}{16}\, \overset{1}{\rho}_1 - \frac{1}{4}\, \overset{2}{\rho}_1 + \overset{4}{\rho}_1\Big) - \frac{9}{8}\beta\Big(\frac{9}{16}\, \overset{1}{\rho}_1 - \frac{3}{4}\, \overset{2}{\rho}_1 + \overset{4}{\rho}_1\Big), \tag{4.4a}$$

$$0 = d_3\, \overset{1}{\rho}_1 - d_2\, \overset{2}{\rho}_1 + d_1\, \overset{4}{\rho}_1 - \frac{1}{2}\alpha\Big(\frac{1}{16}\, \overset{1}{\rho}_1 - \frac{1}{4}\, \overset{2}{\rho}_1 + \overset{4}{\rho}_1\Big) - \frac{3}{2}\beta\Big(\frac{9}{16}\, \overset{1}{\rho}_1 - \frac{3}{4}\, \overset{2}{\rho}_1 + \overset{4}{\rho}_1\Big), \tag{4.4b}$$

$$-\varepsilon\vartheta_0 y_{0,2}^{\perp} = d_2\, \overset{1}{\rho}_1 - d_1\, \overset{2}{\rho}_1 + d_0\, \overset{4}{\rho}_1 - 2\alpha\Big(\frac{1}{16}\, \overset{1}{\rho}_1 - \frac{1}{4}\, \overset{2}{\rho}_1 + \overset{4}{\rho}_1\Big) - 2\beta\Big(\frac{9}{16}\, \overset{1}{\rho}_1 - \frac{3}{4}\, \overset{2}{\rho}_1 + \overset{4}{\rho}_1\Big). \tag{4.4c}$$

Из (4.3) определим $\overset{2}{\lambda}_1$, $\overset{4}{\lambda}_1$ и θ_1. Заметим, что для этих величин справедлива оценка $O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$.

Уравнения (4.1c), (4.4) представляют собой систему уравнений относительно оставшихся неизвестными $\overset{1}{\rho}_1$, $\overset{2}{\rho}_1$, $\overset{4}{\rho}_1$, $\rho_{1,3}$. Уравнения (4.4a), (4.4b) запишем в виде

$$\alpha\overset{1}{\varrho}_1 + 9\beta\overset{2}{\varrho}_1 = \widetilde{F}_1(\varepsilon,\overset{1}{\rho}_1,\overset{2}{\rho}_1,\overset{4}{\rho}_1),\quad \alpha\overset{1}{\varrho}_1 + 3\beta\overset{2}{\varrho}_1 = \widetilde{F}_2(\varepsilon,\overset{1}{\rho}_1,\overset{2}{\rho}_1,\overset{4}{\rho}_1), \tag{4.5}$$

где

$$\widetilde{F}_1(\varepsilon,\overset{1}{\rho}_1,\overset{2}{\rho}_1,\overset{4}{\rho}_1) := 8d_4\overset{1}{\rho}_1 - 8d_3\overset{2}{\rho}_1 + 8d_2\overset{4}{\rho}_1,\quad \widetilde{F}_2(\varepsilon,\overset{1}{\rho}_1,\overset{2}{\rho}_1,\overset{4}{\rho}_1) := 2d_3\overset{1}{\rho}_1 - 2d_2\overset{2}{\rho}_1 + 2d_1\overset{4}{\rho}_1\,.$$

Из уравнений (4.5) выразим

$$\begin{aligned}\overset{1}{\varrho}_1 &= \frac{1}{2\alpha}\big(3\widetilde{F}_2(\varepsilon,\overset{1}{\rho}_1,\overset{2}{\rho}_1,\overset{4}{\rho}_1) - \widetilde{F}_1(\varepsilon,\overset{1}{\rho}_1,\overset{2}{\rho}_1,\overset{4}{\rho}_1)\big),\\ \overset{2}{\varrho}_1 &= \frac{1}{6\beta}\big(\widetilde{F}_1(\varepsilon,\overset{1}{\rho}_1,\overset{2}{\rho}_1,\overset{4}{\rho}_1) - \widetilde{F}_2(\varepsilon,\overset{1}{\rho}_1,\overset{2}{\rho}_1,\overset{4}{\rho}_1)\big)\end{aligned} \tag{4.6}$$

и, подставив в уравнение (4.4c), получим соотношение, связывающее $\overset{1}{\rho}_1$, $\overset{2}{\rho}_1$, $\overset{4}{\rho}_1$ и ε,

$$9\widetilde{F}_2 - 3\widetilde{F}_1 + \widetilde{F}_1 - \widetilde{F}_2 = 3\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2} + 3d_2\overset{1}{\rho}_1 - 3d_1\overset{2}{\rho}_1 + 3d_0\overset{4}{\rho}_1\,. \tag{4.7}$$

Отсюда

$$(-16d_4 + 16d_3 - 3d_2)\overset{1}{\rho}_1 + (16d_3 - 16d_2 + 3d_1)\overset{2}{\rho}_1 + (-16d_2 + 16d_1 - 3d_0)\overset{4}{\rho}_1 = 3\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2}.$$

Подставляя известные значения d_i, $i = \overline{0,4}$, получаем

$$\overset{4}{\rho}_1 = -\frac{1}{3}\overset{1}{\rho}_1 + \frac{1}{2}\overset{2}{\rho}_1 - \frac{3}{16}\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2}. \tag{4.8}$$

Тем самым, учитывая соотношения (4.2), из (4.1i) получаем выражения величин α, β только через $\overset{1}{\rho}_1$, $\overset{2}{\rho}_1$, $\rho_{1,3}$ и ε. Уравнения (4.6) с учетом (4.2) и (4.8) запишем в виде

$$\begin{aligned}-\frac{13}{12}\overset{1}{\rho}_1 + \overset{2}{\rho}_1 &= \frac{2}{\alpha}\Big(D_1\overset{1}{\rho}_1 + D_2\overset{2}{\rho}_1 + D_3\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2}\Big) + \frac{3}{4}\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2},\\ \frac{11}{12}\overset{1}{\rho}_1 - \overset{2}{\rho}_1 &= \frac{2}{3\beta}\Big(D_4\overset{1}{\rho}_1 + D_5\overset{2}{\rho}_1 + D_6\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2}\Big) + \frac{3}{4}\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2},\end{aligned} \tag{4.9}$$

где D_i, $i = \overline{1,6}$, — некоторые известные константы. Поскольку определитель левой части системы (4.9) отличен от нуля, то векторы $\overset{1}{\rho}_1$, $\overset{2}{\rho}_1$ выражаются линейно через правые части уравнений (4.9)

$$\begin{aligned}\overset{1}{\rho}_1 &= \frac{12}{\alpha}\Big(D_1\overset{1}{\rho}_1 + D_2\overset{2}{\rho}_1 + D_3\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2}\Big) + \frac{4}{\beta}\Big(D_4\overset{1}{\rho}_1 + D_5\overset{2}{\rho}_1 + D_6\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2}\Big) + 9\,\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2},\\ \overset{2}{\rho}_1 &= -\frac{11}{\alpha}\Big(D_1\overset{1}{\rho}_1 + D_2\overset{2}{\rho}_1 + D_3\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2}\Big) - \frac{13}{3\beta}\Big(D_4\overset{1}{\rho}_1 + D_5\overset{2}{\rho}_1 + D_6\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2}\Big) - \frac{3\cdot 63}{8}\varepsilon\vartheta_0 y^{\perp}_{0,2}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Далее, уравнение (4.1c) преобразуем к виду

$$\rho_{1,3} = \varepsilon\,\frac{\vartheta_0 y_{0,1} + \vartheta_0\overline{r}_{0,1}(-2d_1 + \alpha + 3\beta)}{2(\alpha+\beta)} + \frac{d_0}{2(\alpha+\beta)}\rho_{1,3}. \tag{4.11}$$

Обозначим $\varpi_1 = (\overset{1}{\rho}{}^*_1, \overset{2}{\rho}{}^*_1, \rho^*_{1,3})^*$, $\mathcal{G}_1(\varepsilon,\varpi_1)$ — вектор, составленный из правых частей уравнений (4.10), (4.11), с компонентами $O(\varepsilon) + \dfrac{O(\varepsilon + \|\varpi_1\|)}{|\alpha(\varepsilon,\varpi_1)|} + \dfrac{O(\varepsilon + \|\varpi_1\|)}{|\beta(\varepsilon,\varpi_1)|}$, $\varepsilon \to 0$, $\varpi_1 \to 0$. Тем самым систему (4.10), (4.11) можно записать в виде $\varpi_1 = \mathcal{G}_1(\varepsilon, \varpi_1)$, и для любого $\varepsilon > 0$ отображение $\mathcal{G}_1(\varepsilon, \varpi_1)$ непрерывно по ϖ_1.

Утверждение. *Если при $\varpi_1 = o(1)$, $\varepsilon \to 0$ справедливо $\mathcal{G}_1(\varepsilon, \varpi_1) = O(\varepsilon) + \dfrac{O(\varepsilon + \|\varpi_1\|)}{|\alpha(\varepsilon, \varpi_1)|} + \dfrac{O(\varepsilon + \|\varpi_1\|)}{|\beta(\varepsilon, \varpi_1)|}$ и для любого $\varepsilon > 0$ отображение $\mathcal{G}_1(\varepsilon, \varpi_1)$ непрерывно по ϖ_1, то существует $\varpi_1 = O(\varepsilon)$ — решение уравнения $\varpi_1 = \mathcal{G}_1(\varepsilon, \varpi_1)$.*

Доказательство. Пусть $\|\mathcal{G}_1(\varepsilon, \varpi_1)\| \leqslant K\Big(\varepsilon + \dfrac{\varepsilon + \|\varpi_1\|}{|\alpha(\varepsilon, \varpi_1)|} + \dfrac{\varepsilon + \|\varpi_1\|}{|\beta(\varepsilon, \varpi_1)|}\Big)$. Возьмем $B[0; 2K\varepsilon]$ — шар с центром в точке 0 радиуса $2K\varepsilon$. Тогда, если $\varpi_1 \in B[0; 2K\varepsilon]$, то $\|\mathcal{G}_1(\varepsilon, \varpi_1)\| \leqslant K\varepsilon\Big(1 + (1+2K)\Big(\dfrac{1}{|\alpha(\varepsilon, \varpi_1)|} + \dfrac{1}{|\beta(\varepsilon, \varpi_1)|}\Big)\Big)$. В силу (4.1i) и условия $\varpi_1 = o(1)$ имеем $|\alpha(\varepsilon, \varpi_1)| \to \infty$, $|\beta(\varepsilon, \varpi_1)| \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ таких, что справедливо неравенство $(1 + 2K)\Big(\dfrac{1}{|\alpha(\varepsilon, \varpi_1)|} + \dfrac{1}{|\beta(\varepsilon, \varpi_1)|}\Big) \leqslant 1$, выполняется $\mathcal{G}_1(\varepsilon, \varpi_1) \in B[0; 2K\varepsilon]$. Тогда по теореме Шаудера — Тихонова [14, с. 628] при всех таких $\varepsilon > 0$ существует $\varpi_1 = O(\varepsilon)$ — неподвижная точка отображения $\mathcal{G}_1(\varepsilon, \varpi_1)$. □

Таким образом, доказано существование решения системы первого приближения и получена его оценка $O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$. Условия (3.5), (3.13), (3.14) в первом приближении выполняются. При этом компоненты решения, определяющиеся из системы (4.10), (4.11), не являются элементарными функциями.

5. Получение и обоснование асимптотики оптимального времени T_ε и оптимального управления $u_\varepsilon(t)$

Преобразуя $\ln\left|b_\varepsilon - a_\varepsilon^2\right|$ и $\ln\left|\overline{b}_\varepsilon - \overline{a}_\varepsilon^2\right|$ аналогично работе [7], для каждого $\omega_k = (\theta_k, \rho_k^*)^*$, $k = 2, \ldots$ (3.6), получим однозначно разрешимое векторное уравнение вида

$$\mathcal{L}\omega_k + \mathcal{Q}_\alpha\omega_k\alpha + \mathcal{Q}_\beta\omega_k\beta + \frac{\mathcal{P}_{2,\alpha}(\varepsilon, \omega_1)}{q_{2,\alpha}(\varepsilon, \omega_1)}\omega_k + \frac{\mathcal{P}_{2,\beta}(\varepsilon, \omega_1)}{q_{2,\beta}(\varepsilon, \omega_1)}\omega_k$$
$$= \mathcal{H}_k(\varepsilon, \omega_1, \ldots, \omega_{k-1}) + \mathcal{H}_{k,\alpha}(\varepsilon, \omega_1, \ldots, \omega_{k-1})\alpha + \mathcal{H}_{k,\beta}(\varepsilon, \omega_1, \ldots, \omega_{k-1})\beta, \quad (5.1)$$

где $q_{2,\alpha}(\varepsilon, \omega_1) := 4\|\overset{1}{\varrho}_1\|^2 + \|-\varepsilon\vartheta_0\,\overline{r}_{0,1} + 2\rho_{1,3}\|^2$, $q_{2,\beta}(\varepsilon, \omega_1) := 4\|\overset{2}{\varrho}_1\|^2 + \|-3\varepsilon\vartheta_0\,\overline{r}_{0,1} + 2\rho_{1,3}\|^2$, тем самым в силу обозначений (4.1i) $\alpha = \ln q_{2,\alpha}(\varepsilon, \omega_1)$, $\beta = \ln q_{2,\beta}(\varepsilon, \omega_1)$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{Q}_\alpha$, $\mathcal{Q}_\beta$, $\mathcal{P}_{2,\alpha}$, $\mathcal{P}_{2,\beta}$ — известные операторы. Введем обозначения

$$\begin{gathered}\widetilde{\rho}_{k,1} = \frac{1}{16}\rho_{k,1} - \frac{1}{4}\rho_{k,2} + \rho_{k,4}, \quad \widetilde{\rho}_{k,2} = \frac{9}{16}\rho_{k,1} - \frac{3}{4}\rho_{k,2} + \rho_{k,4},\\ \widetilde{\rho}_{k,3} = d_4\rho_{k,1} - d_3\rho_{k,2} + d_2\rho_{k,4}, \quad \widetilde{\rho}_{k,4} = d_3\rho_{k,1} - d_2\rho_{k,2} + d_1\rho_{k,4},\\ \widetilde{\rho}_{k,5} = d_2\rho_{k,1} - d_1\rho_{k,2} + d_0\rho_{k,4}.\end{gathered} \quad (5.2)$$

Представим неизвестные векторы следующим образом: $\rho_{k,i} = \overset{i}{\rho}_k + \overset{i}{\lambda}_k\,\overline{r}_{0,1}$, $\langle\overset{i}{\rho}_k, \overline{r}_{0,1}\rangle = 0$, $\widetilde{\rho}_{k,j} = \overset{j}{\varrho}_k + \overset{j}{\delta}_k\,\overline{r}_{0,1}$, $\langle\overset{j}{\varrho}_k, \overline{r}_{0,1}\rangle = 0$, $i \in \{1, 2, 4\}$, $j = \overline{1, 5}$. Из уравнений (5.2) величины $\overset{j}{\delta}_k$ однозначно выражаются через $\overset{i}{\lambda}_k$. Как и при решении системы первого приближения, приравнивая отдельно коллинеарные вектору $\overline{r}_{0,1}$ составляющие уравнений (5.2), найдем $\overset{i}{\lambda}_k$, $i \in \{1, 2, 4\}$, и θ_k, для этих величин справедлива оценка $O^*(\varepsilon^k)$, $\varepsilon \to 0$. Далее, разрешимость подсистемы для ортогональных вектору $\overline{r}_{0,1}$ составляющих решения и $\rho_{k,3}$, а также оценку для них $O^*(\varepsilon^k)$, $\varepsilon \to 0$, можно получить по теореме Шаудера — Тихонова. Таким образом, последовательно определим все $\omega_k = O^*(\varepsilon^k)$, $k = 2, \ldots$. Условия (3.5), (3.13), (3.14) выполняются. При этом компоненты ω_k, $k = 2, \ldots$, не являются элементарными функциями.

Пусть $\hat{\omega}_N = \sum_{k=1}^{N} \omega_k$, а $\hat{\omega} = \omega - \hat{\omega}_N$, где в силу явного вида найденных ω_k справедливо соотношение $\hat{\omega} = o(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, тогда система (3.2), (3.4) для $\hat{\omega}$ преобразуется к системе следующего вида

$$\mathcal{L}\hat{\omega} + \mathcal{Q}_\alpha \hat{\omega}\alpha + \mathcal{Q}_\beta \hat{\omega}\beta + \frac{\mathcal{P}_{2,\alpha}(\varepsilon,\omega_1)}{q_{2,\alpha}(\omega_1)}\hat{\omega} + \frac{\mathcal{P}_{2,\beta}(\varepsilon,\omega_1)}{q_{2,\beta}(\omega_1)}\hat{\omega} = \mathcal{H}_{N+1}(\varepsilon,\hat{\omega}), \tag{5.3}$$

где

$$\|\mathcal{H}_{N+1}(\varepsilon,\hat{\omega})\| = O\left(\varepsilon^{N+1}\right) + O\left(\varepsilon\|\hat{\omega}\|\alpha\right) + O\left(\varepsilon\|\hat{\omega}\|\beta\right) + O\left(\|\hat{\omega}\|^2\alpha\right) + O\left(\|\hat{\omega}\|^2\beta\right)$$
$$+ O\Big(\frac{\varepsilon\|\hat{\omega}\|^2}{q_{2,\alpha}(\omega_1)}\Big) + O\Big(\frac{\varepsilon\|\hat{\omega}\|^2}{q_{2,\beta}(\omega_1)}\Big), \quad \varepsilon \to 0.$$

Заметим, что оператор в левых частях уравнений (5.1), (5.3) один и тот же. Раскладывая уравнения системы (5.3) по описанному выше алгоритму на коллинеарные и ортогональные вектору $\overline{r}_{0,1}$ составляющие приходим к системе, эквивалентной (5.3):

$$v = F(\varepsilon, v). \tag{5.4}$$

Отметим, что для любого $\varepsilon > 0$ отображение $F(\varepsilon,v)$ непрерывно по v и при $v = o(\varepsilon)$ выполняется $F(\varepsilon,v) = o(1)\,\|v\| + O^*\left(\varepsilon^{N+1}\right)$, $\varepsilon \to 0$. Найдем компактное выпуклое множество, образ которого при отображении $F(\varepsilon,v)$ лежит в нем. Тогда по теореме Шаудера — Тихонова [14, с. 628] у $F(\varepsilon,v)$ есть неподвижная точка в этом компакте. Рассмотрим $B\left[0, K\varepsilon^{N+\gamma}\right]$ — шар в пространстве $\mathbb{R}^{4n+4}$ с центром в нуле радиуса $K\varepsilon^{N+\gamma}$. Пусть $\|v\| \leqslant K\varepsilon^{N+\gamma}$. Тогда существует такое ε_0, что для всех ε: $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ справедливо $\|F(\varepsilon,v)\| \leqslant K\varepsilon^{N+\gamma}$, а значит, уравнение (5.4) имеет решение $v = O\left(\varepsilon^{N+\gamma}\right)$, $0 < \gamma < 1$, $\varepsilon \to 0$.

Далее, в силу единственности как оптимального управления, так и времени быстродействия асимптотические разложения для них получаются подстановкой найденных асимптотических рядов для θ_ε, ρ_ε вида (3.6) с учетом замен (2.3), (3.1) в формулы (2.1), (2.9). Это позволяет получить и асимптотику компонент вектора состояния системы.

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *При выполнении условий* (1.4), (1.5), (1.10), (2.8) *время быстродействия* T_ε *и вектор начальных условий сопряженной системы* r_ε *раскладываются в асимптотические ряды вида* $T_\varepsilon \sim \varepsilon^2(T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\varepsilon))$, $r_\varepsilon \sim \sum_{k=0}^{\infty} r_k(\varepsilon)$, *где компоненты* T_k, r_k *не являются элементарными функциями, при этом* $T_k(\varepsilon) = O^*(\varepsilon^k)$, $r_k(\varepsilon) = O^*(\varepsilon^k)$, $\varepsilon \to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
4. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852 .
5. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
6. **Гичев Т.Р., Дончев А.Л.** Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.
7. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
8. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О зависимости задачи быстродействия для линейной системы от двух малых параметров // Вест. ЧелГУ. 2011. № 27. С. 46–60. (Математика, механика, информатика; вып. 14.)

9. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
10. **Erdelyi A., Wyman M.** The asymptotic evaluation of certain integrals // Arch. Ration. Mech. Anal. 1963. Vol. 14. P. 217–260.
11. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
12. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
13. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с. ISBN: 978-5-9221-1056-3.
14. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 752 с.

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. отделом,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила 30.03.2018

Коврижных Ольга Олеговна, канд. физ.-мат. наук,
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
г. Екатеринбург
e-mail: koo@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, N Y, London, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 0470693819. Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy.* [Theory of control of movement. Linear systems]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
3. Vassilyeva A.B., Dmitriev M.G. Singular perturbations in optimal control problems. *J. Math. Sci.*, 1986, vol. 34, iss. 3, pp. 1579–1629. doi: 10.1007/BF01262406.
4. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes. *IEEE Trans. Automat. Control.*, 1975, vol. 20, no. 1, pp. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852.
5. Dontchev A.L. *Perturbations, approximations and sensitivity analisis of optimal control systems*, Berlin, Heidelberg, N Y, Tokio, Springer-Verlag, 1983, 161 p. doi: 10.1007/BFb0043612. Translated under the title *Sistemy optimal'nogo upravleniya: Vozmushcheniya, priblizheniya i analiz chuvstvitel'nosti*, Moscow, Mir Publ., 1987, 156 p.
6. Gichev T.R., Donchev A.L. Convergence of the solution of the linear singularly perturbed problem of time-optimal response. *J. Appl. Math. Mech.*, 1979, vol. 43, iss. 3, pp. 502–511. doi: 10.1016/0021-8928(79)90098-4.
7. Danilin A.R., Il'in A.M. On the structure of the solution of a perturbed optimal-time control problem. *Fundament. Prikl. Matematika*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 905–926 (in Russian).
8. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. On the dependence of the time-optimal control problem for a linear system of two small parameters. *Vest. Chelyabinskogo Univer.*, Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika 14, 2011, no. 27, pp. 46–60 (in Russian).
9. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 1, pp. 465–467. doi:10.1134/S1064562413040364.

10. Erdelyi A., Wyman M. The asymptotic evaluation of certain integrals. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1963, vol. 14, pp. 217–260.
11. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* N Y, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 ..
12. Danilin A.R. Asymptotic behavior of the optimal cost functional for a rapidly stabilizing indirect control in the singular case. *Comput. Math. Math. Physics*, 2006, vol. 46, no. 12, pp. 2068–2079.
13. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asymptotic methods in analysis.* M.: Fizmatlit, 2009, 248 p. ISBN: 978-5-9221-1056-3 .
14. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional Analysis.* Second Ed. N Y: Pergamon Press Ltd, 1982, 589 p. ISBN: 0-08-023036-9 . First ed. published by "Nauka" Publ., 1959.

The paper was received by the Editorial Office on March 30, 2018.

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru .

Ol'ga Olegovna Kovrizhnykh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: koo@imm.uran.ru .