ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 519.83

О РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ В РЕКЛАМНУЮ КАМПАНИЮ[1]

Е. В. Громова, Д. В. Громов, Ю. Э. Лахина

В работе рассматривается дифференциальная игра управления инвестициями в рекламную кампанию для случая n симметричных игроков. Задача решается в классе позиционных стратегий как для кооперативной постановки игры, в которой игроки перед началом игры заключают соглашение об использовании управлений, максимизирующих суммарный выигрыш, так и для некооперативной постановки, в которой в качестве решения используется равновесие по Нэшу. Показывается, что решение задачи не является единственным в обоих случаях. Проводится детальный анализ, в ходе которого выявляется единственная функция–кандидат. Далее решение отбирается по экономическому критерию, описанному в работе Басса, Кришнамурти, Прасада, Сефи, 2005. Отобранные ранее решения полностью согласуются с результатом отбора по экономическому критерию.

Ключевые слова: неантагонистические дифференциальные игры, равновесие по Нэшу, модель управления рекламной кампанией.

E. V. Gromova, D. V. Gromov, Yu. E. Lakhina. On the solution of a differential game of managing the investments in an advertising campaign.

We consider a differential game of managing the investments in an advertising campaign for the case of n symmetric players. The problem is solved in the class of positional strategies both for the cooperative statement, where the players agree on using controls that maximize the total payoff before the game starts, and for the noncooperative statement, in which the Nash equilibrium is used as a solution. It is shown that the solution of the problem is not unique in both cases. One candidate function is found by means of a detailed analysis. Then the solution is chosen with the use of an economic criterion described by Bass, Krishnamoorthy, Prasad, and Sethi in 2005. The solutions chosen earlier are in complete agreement with the choice with respect to the economic criterion.

Keywords: non-zero-sum differential games, Nash equiiibrium, advertising model.

MSC: 91A23, 90B60

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-64-75

Введение

Линейно-квадратичные дифференциальные игры [4; 11; 16] — наиболее изученный класс дифференциальных игр, имеющий многочисленные приложения в экономике [6; 11; 15]. Одной из важных составляющих экономической деятельности является реклама. Существует ряд работ, в которых процесс конкуренции нескольких участников рынка за объемы продаж однородной продукции моделируется при помощи теоретико-игрового подхода. Достаточно полный обзор существующих динамических моделей может быть найден в работах [21; 22]. В моделях с непрерывным временем, а именно в дифференциальных играх нескольких участников, в данной экономической области принято использовать так называемый “гудвилл” [24] в качестве фазовой переменной [18; 20; 21]. Впервые данное понятие было введено в работе [25], в которой была использована модель накопления (физического) капитала [26] с несколько другой интерпретацией. Под “гудвиллом”, или репутацией, фирмы принято понимать разность между оценкой компании фондовой биржей (цена покупки данной организации) и суммой ее материальных активов, зарегистрированных в балансе компании. Существуют различные способы вычисления гудвилла, которые не являются предметом изучения в данной статье. Тем

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01093).

не менее следует подчеркнуть, что данная числовая характеристика является важным показателем успешной деятельности фирмы, а влияние на нее оказывает в том числе грамотная рекламная политика или, другими словами, оптимальное распоряжение инвестициями во время рекламной кампании. Под управлением в рассматриваемой нами модели будем понимать объем инвестиций в рекламу в единицу времени [17].

В силу определенной специфики задач данного типа, несмотря на кажущуюся простоту постановки, в них возникают интересные проблемы, свойственные неантагонистическим дифференциальным играм. Во-первых, задача, как правило, решается в классе позиционных стратегий [7;9], причем на бесконечном временном промежутке [2] с различными видами функции дисконтирования [13; 23]. Кроме того, для обоснованной в модели [25] динамики игры характерно то, что решение системы уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана, записанной для нахождения равновесия по Нэшу [11], не является единственным, что представляет интерес для дальнейшего изучения полученных решений.

В экономических приложениях существует достаточно общий подход [19] для отбора решений в том случае, если равновесие по Нэшу не является единственным. Он заключается в том, что полученные решения проверяются на выполнение следующего условия с ясной экономической интерпретацией: если предельная (маргинальная) прибыль, т. е. прибыль за продажу единицы товара в единицу времени, равна нулю, то и общая прибыль фирмы на всем промежутке игры должна равняться нулю. Это означает что при замене в полученных решениях определенного параметра модели нулем отбраковываются те решения, для которых полученные значения функции Беллмана не равны нулю.

В данной работе изучается модель накопления гудвилла несколькими фирмами во время рекламной кампании. Задача рассматривается как неантагонистическая дифференциальная игра n лиц.

В разд. 1 приводится постановка задачи, описываются динамика игры и функция выигрыша. В разд. 2 получено решение для кооперативной постановки игры, а именно, проведен детальный анализ для выбора решения из четырех возможных функций-кандидатов. В разд. 3 показывается, что в некооперативном варианте данной игры система алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов функции Беллмана также имеет не единственное решение, а именно два. Проводится анализ для выбора решения. Заключение сформулировано в разд. 4.

1. Постановка задачи

Предполагается, что на рынке находится n идентичных фирм-продавцов товара (игроков), конкурирующих за доли рынка, пропорциональные их гудвиллу (см. [17]).

Согласно [17;25] динамика накопления деловой репутации или, далее, гудвилла G_i фирмы i описывается ОДУ

$$\begin{aligned} \dot{G}_i =& k a_i - \delta G_i, \\ G_i(0) =& G_0^i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $k \geq 0$ — характеристика рынка, отвечающая за влияние рекламы на накопление гудвилла (чем больше k, тем более восприимчив рынок к воздействию рекламы); a_i — управление игрока i (объем инвестиций в рекламу в единицу времени), $a_i \geq 0$; δ — коэффициент амортизации, $\delta \geq 0$, G_0^i — значение гудвилла игрока i в начальный момент времени. Без ограничения общности часто принято брать коэффициент $k = 1$ [20].

Отметим, что в данной модели имеют место “независимые движения” в уравнениях динамики. Случай несимметричных игроков (с различными значениями параметров модели π_i, k_i, c_i и т. д.) также может быть рассмотрен, однако для изучаемой проблемы не привносит новых результатов, а только затрудняет восприятие громоздкими формулами.

Пусть $G(t) = \begin{bmatrix} G_1(t) & \dots & G_n(t) \end{bmatrix}^T$. Предполагается, что объем продаж фирмы i в момент времени t является функцией от $G(t)$, а точнее, следуя [27],

$$\left[\beta - \sum_{h=1}^{n} G_h(t)\right] G_i(t), \quad \beta > 0.$$

Отметим, что данная функция является вогнутой по G_i.

Пусть π, $\pi > 0$, — предельная прибыль фирмы (прибыль за продажу единицы товара в единицу времени). Тогда доход игрока i в момент t равен $\pi\Big[\beta - \sum\limits_{h=1}^{n} G_h(t)\Big] G_i(t)$, при этом игрок терпит расходы на рекламу товара, которые в экономических задачах, как правило, имеют квадратичный вид [15; 21; 22]: $\dfrac{c}{2}a_i^2$, $c > 0$.

Предполагается, что выигрыш игрока дисконтируется при помощи функции $e^{-\rho t}$, $\rho > 0$, а игра рассматривается на бесконечном временном промежутке. Тогда функция выигрыша игрока i, $i = 1, \dots n$, имеет вид

$$J_i(a_i) = \int\limits_0^\infty e^{-\rho t} \left(\pi \Big[\beta - \sum_{h=1}^{n} G_h\Big] G_i - \frac{c}{2} a_i^2 \right) dt. \tag{1.2}$$

Решение задачи ищется в классе позиционных стратегий [9].

Отметим, что функционал (1.2) может быть также получен следующим образом. Пусть игра начинается в момент времени $t_0 = 0$ и заканчивается в случайный момент времени T [12]. Использование математических моделей с неопределенностью является актуальным направлением в области дифференциальных игр и теории оптимального управления, поскольку позволяет более реалистично описывать изучаемый процесс [5].

Предполагаем известной функцию распределения $F(t)$, $t \in [0, \infty)$, случайной величины T. Тогда выигрыш игрока i является случайной величиной и имеет вид

$$\int\limits_0^T \left(\pi \Big[\beta - \sum_{h=1}^{n} G_h\Big] G_i - \frac{c}{2} a_i^2 \right) dt. \tag{1.3}$$

В качестве интегрального функционала выигрыша рассмотрим математическое ожидание (1.3). Имеем

$$J_i(a_i) = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \left(\pi \Big[\beta - \sum_{h=1}^{n} G_h\Big] G_i - \frac{c}{2} a_i^2 \right) dt \right].$$

При некоторых достаточно общих ограничениях (см. [8]) данный функционал может быть преобразован к виду [14]

$$J_i(a_i) = \int\limits_0^\infty (1 - F(t)) \left(\pi \Big[\beta - \sum_{h=1}^{n} G_h\Big] G_i - \frac{c}{2} a_i^2 \right) dt. \tag{1.4}$$

Используя экспоненциальное распределение $F(t) = 1 - \exp^{-\rho t}$ в (1.4), получаем функционал (1.2), что придает понятный смысл изначальной постановке задачи. Таким образом, задача с дисконтированием $\exp^{-\rho t}$ на бесконечном промежутке времени является частным случаем задачи со случайным моментом окончания [23].

В контексте рассматриваемой экономической задачи можно говорить, что рекламная кампания прекращается в случайный момент времени по каким-либо внешним причинам, что соответствует реальному положению дел.

2. Кооперативный случай

Рассмотрим кооперативный вариант описанной дифференциальной игры [10; 11]. Пусть игроки договорились об использовании оптимальных управлений $a^* = \{a_i^*\}$, которые максимизируют суммарный выигрыш

$$J(G,a) = \sum_{i=1}^{n} J_i(G,a_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left(\pi\Big[\beta - \sum_{h=1}^{n} G_h\Big] G_i - \frac{c}{2} a_i^2\right) dt, \tag{2.1}$$

где динамика игры описывается системой (1.1). Далее будем рассматривать случай $k=1$.

Для решения данной задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте с экспоненциальной функцией дисконтирования воспользуемся уравнением типа Гамильтона — Якоби — Беллмана [15], которое в наших обозначениях имеет вид

$$\rho V(G) = \max_{\{a_1,\dots,a_n\}} \left\{ \pi\Big[\beta - \sum_{h=1}^{n} G_h\Big] \sum_{i=1}^{n} G_i - \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial G_i}\big(a_i - \delta G_i\big) \right\}, \tag{2.2}$$

где $V(G)$ — непрерывно-дифференцируемая функция Беллмана [3], соответствующая искомому максимуму в (2.1).

Очевидно, что из условия максимизации правой части (2.2) имеем $a_i^* = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial V(G)}{\partial G_i}$. Выберем функцию Беллмана в виде линейно-квадратичной функции [15].

Поскольку все игроки полагаются симметричными, коэфициенты при подобных слагаемых полагаются равными. Таким образом, функция-кандидат имеет вид

$$V(G) = \alpha + \frac{\epsilon}{2}\sum_i G_i^2 + \frac{\eta}{2}\sum_{i\neq j} G_i G_j + \gamma \sum_i G_i. \tag{2.3}$$

Отметим, что указанный выбор сделан в предположении, что все оптимальные управления не равны нулю ($a_i^* > 0 \ \ \forall i \in \mathbb{N}$). Это означает, что рассматривается подмножество пространства состояний $\Gamma \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, в котором выполняются неравенства $\dfrac{\partial V(G)}{\partial G_i} \geq 0$ для всех $i = 1,\dots,n$, т. е.

$$\Gamma = \left\{ G \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \,\middle|\, \frac{\partial V(G)}{\partial G_i} > 0, \ i = 1,\dots,n \right\}.$$

Подставляя $V(G)$ и оптимальные управления $a_i^* = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial V(G)}{\partial G_i}$, $\ i = 1,\dots,n$, в уравнение (2.2), получаем алгебраическое выражение, которое должно быть равно нулю при всех значениях G_i. Собирая члены при подобных слагаемых, приходим к следующей системе алгебраических уравнений, которые решаются относительно коэффициентов α, ϵ, η и γ:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi c + 2c\delta\epsilon + \epsilon\rho - \epsilon^2 - 2\eta^2, \\ 0 &= \epsilon\gamma + 2\eta\gamma + \pi\beta c - c\delta\gamma - c\gamma\rho, \\ 0 &= 2\pi c - 2\epsilon\eta - \eta^2 + 2c\delta\eta + c\eta\rho, \\ 0 &= 2\alpha\rho c - 3\gamma^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Вычитая третье уравнение из первого в (2.4), получаем $(\epsilon - \eta)\,(\eta - \epsilon + 2c\delta + c\rho) = 0$, откуда следует, что коэффициенты ϵ и η удовлетворяют одному из двух условий:

$$\epsilon = \eta, \tag{2.5a}$$

$$\epsilon = \eta + 2c\delta + c\rho. \tag{2.5b}$$

Коэффициент γ выражается из второго уравнения в (2.4) и имеет вид $\gamma = -\dfrac{\pi\beta c}{\epsilon + 2\eta - c\delta - c\rho}$. С учетом указанных условий (2.5a), (2.5b) получаем решения системы уравнений (2.4)

$$\eta = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2c\delta + c\rho - D \\ 2c\delta + c\rho + D \\ -2c\delta - c\rho - D \\ -c\rho - 2c\delta + D \end{bmatrix}, \quad \epsilon = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2c\delta + c\rho - D \\ 2c\delta + c\rho + D \\ 10c\delta + 5c\rho - D \\ 10c\delta + 5c\rho + D \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \dfrac{2\pi\beta c}{c\rho + D} \\ \dfrac{2\pi\beta c}{c\rho - D} \\ \dfrac{2\pi\beta c}{c\rho + D} \\ \dfrac{2\pi\beta c}{c\rho - D} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \dfrac{6\pi^2\beta^2 c}{\rho\,(c\rho + D)^2} \\ \dfrac{6\pi^2\beta^2 c}{\rho\,(c\rho - D)^2} \\ \dfrac{6\pi^2\beta^2 c}{\rho\,(c\rho + D)^2} \\ \dfrac{6\pi^2\beta^2 c}{\rho\,(c\rho - D)^2} \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

где $D = \sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 24c\pi}$. Легко заметить, что первые две компоненты решения удовлетворяют условию (2.5a), а последние две — условию (2.5b). Отметим также, что полученный результат остается верным в предельном случае, когда коэффициент амортизации δ устремляется к 0.

Заметим, что функция — кандидат $V(G)$ (2.3) представляет собой сумму квадратичной формы, линейного слагаемого и постоянной величины. Исследуем свойства матрицы M квадратичной формы

$$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \epsilon & \eta & \dots & \eta \\ \eta & \epsilon & \dots & \eta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \eta \\ \eta & \dots & \eta & \epsilon \end{bmatrix}.$$

Матрица M имеет $n-1$ одинаковых собственных значений вида $\lambda_i = \epsilon - \eta$, $i = 1, \dots n-1$, с соответствующими собственными векторами вида $v_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 1_{i+1} & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$, где 1_k соответствует единице в k-й позиции. Последнее собственное значение соответствует собственному вектору $v_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$ и равно $\lambda_n = \epsilon + (n-1)\eta$.

Рассмотрим структуру матрицы M для различных компонент решения (2.6). Заметим, что для первых двух компонент (2.6) матрица M вырождена с $n-1$ нулевыми собственными значениями и одним ненулевым, которое вычисляется как

$$\lambda_n = n\epsilon = n\eta = \frac{n}{6}\left(2c\delta + c\rho \mp \sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 24c\pi}\right),$$

где знак минус соответствует первой компоненте в (2.6), а плюс — второй. Отметим, что выполняется неравенство $\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 24c\pi} > 2c\delta + c\rho$, поэтому в первом случае мы имеем $\lambda_n < 0$. Для третьей и четвертой компонент собственные значения имеют следующий вид (мы используем обозначение μ_i для собственных чисел, соответствующих последним двум компонентам решения):

$$\begin{aligned} &\mu_i = 2c\delta + c\rho > 0, \quad i = 1, \dots n-1, \\ &\mu_n = n\eta + 2c\delta + c\rho = \mp\frac{n}{6}\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 24c\pi} + \frac{6-n}{6}\,(2c\delta + c\rho), \end{aligned}$$

где минус соответствует третьей компоненте, а плюс — четвертой. Легко проверить, что в первом случае (т. е. для третьей компоненты решения) $\mu_n < 0$ для любого числа игроков n.

Таким образом, мы имеем четыре функции-кандидата, соответствующие четырем компонентам решения (2.6). Эта ситуация схожа с классическим случаем линейно-квадратичной задачи оптимизации (LQR) [1], в которой алгебраическое уравнение Риккати имеет два решения: положительно и отрицательно определенное. В качестве функции Беллмана выбирается положительно определенное решение, которое также является функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Поскольку, в отличие от задачи LQR, в рассматриваемой постановке решается задача максимизации, в качестве функции Беллмана необходимо выбрать отрицательно полуопределенную функцию, соответствующую первой компоненте решения (2.6). Обозначим ее $\bar{V}(G)$.

В экономических приложениях для отбора решения из полученного (конечного) множества решений часто используется подход, предложенный в [19] (см. с. 567, абзац со строки 4 после формулы (B4)).

Идея данного подхода заключается в том, что при нулевой маргинальной прибыли (т. е. прибыли за продажу единицы товара) общий доход должен быть равен нулю.

Используя обозначения нашей модели, сформулируем данный критерий.

Предложение 1 [19]. *Пусть в задаче* (1.1), (1.2) *маргинальная полезность* $\pi = 0$. *Тогда с необходимостью имеем общий доход* $V(G) = 0$, *где* $V(G)$ *— функция Беллмана, соответствующая искомому максимуму в* (2.1).

Будем использовать для полученных решений простой "тест" из предложения 1.

Зафиксируем $\pi = 0$. Получаем

$$\eta = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 4c\delta + 2c\rho \\ -4c\delta - 2c\rho \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \epsilon = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 4c\delta + 2c\rho + D \\ 8c\delta + 4c\rho \\ 12c\delta + 6c\rho \end{bmatrix}, \qquad \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получаем, что только функция–кандидат $V(G)$ (2.3) , коэффициенты которой соответствуют первой компоненте решения (2.6), удовлетворяет критерию, предложенному в [19].

Отметим, что полученный с экономической точки зрения результат соответствует результатам проведенного выше математического анализа. Результатом обоих подходов является выбор функции Беллмана $\bar{V}(G)$ (2.3), где коэффициенты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{6}\left(2c\delta + c\rho - \sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 24c\pi}\right), \\ \epsilon &= \frac{1}{6}\left(2c\delta + c\rho - \sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 24c\pi}\right), \\ \gamma &= \frac{2\pi\beta c}{c\rho + \sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 24c\pi}}, \\ \alpha &= \frac{6\pi^2\beta^2 c}{\rho\left(c\rho + \sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 24c\pi}\right)^2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Соответствующие оптимальные управления имеют вид $a_i^* = \eta \sum_i G_i + \gamma,\ i = 1, \dots, n$. Так же можно вычислить стационарные значения $G_i^*,\ i = 1, \dots, n$, переменных состояния, соответствующих оптимальному решению

$$G_i^* = \frac{6\pi\beta c}{12n\pi c + 2nc^2\delta^2 - 3\delta\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 24c\pi} + nc\delta\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 24c\pi} + 3c\delta\rho + nc^2\delta\rho}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *В классе функций* (2.3) *существует ровно четыре решения, удовлетворяющих уравнению* (2.2). *Единственное допустимое решение* $\bar{V}(G)$, *удовлетворяющее условию отрицательной полуопределенности, задается функцией* (2.3) *с коэффициентами* (2.7). *Более того, решение* $\bar{V}(G)$ *удовлетворяет экономическому критерию, сформулированному в предложении* 1.

Аналогичный анализ может быть проведен для других областей фазового пространства, в которых некоторые управления становятся равными нулю. Тем не менее с точки зрения экономических приложений данный случай не является распространенным.

3. Некооперативный случай

Кооперация игроков при решении задач оптимизации в контексте рекламы представляется достаточно редким событием. Наиболее актуальным является некооперативное поведение игроков [15; 21; 24].

В некооперативном случае задача заключается в определении решения, соответствующего равновесию по Нэшу [11]. Для решения поставленной задачи записывается система n уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана, а именно,

$$\rho V_i(G) = \max_{a_i \geq 0} \left\{ \pi \Big[\beta - \sum_{j=1}^{n} G_j \Big] G_i - \frac{c}{2} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial G_i} \big(a_i - \delta G_i \big) \right\}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.1}$$

где $V_i(G)$ — непрерывно дифференцируемая функция, соответствующая максимуму интегрального выигрыша (1.2), $i = 1, \ldots, n$.

Как и в кооперативном варианте игры, оптимальные управления имеют вид $a_i^* = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial V_i(G)}{\partial G_i}$, где $V_i(G)$ — функция Беллмана, соответствующая i-му игроку. Поскольку игроки полагаются идентичными, функция Беллмана выбирается в следующем виде [15; 20]:

$$V_i(G) = \alpha + \gamma_A G_i + \gamma_B \sum_{j \neq i} G_j + \frac{\epsilon_A}{2} G_i^2 + \frac{\epsilon_B}{2} \sum_{j \neq i} G_j^2 + \eta_A G_i \sum_{j \neq i} G_j + \eta_B \Big(\sum_{i,j} G_i G_j - G_i \sum_{j \neq i} G_j \Big). \tag{3.2}$$

Коэффициенты α, $\gamma_{\{A,B\}}$, $\epsilon_{\{A,B\}}$ и $\eta_{\{A,B\}}$ получаем методом неопределенных коэффициентов аналогично тому, как это было сделано выше:

$$\begin{gathered}
\epsilon_A = \begin{bmatrix} c\delta + \frac{c\rho}{2} + \frac{\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}}{2} \\ c\delta + \frac{c\rho}{2} - \frac{\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \epsilon_B = \begin{bmatrix} \frac{2\pi^2}{\rho\left(4\pi + 2c\delta^2 + c\rho^2 + 2c\delta\rho - \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)} \\ \frac{2\pi^2}{\rho\left(4\pi + 2c\delta^2 + c\rho^2 + 2c\delta\rho + \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)} \end{bmatrix} \\
\gamma_A = \begin{bmatrix} -\frac{2\pi\beta c}{\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi} - c\rho} \\ \frac{2\pi\beta c}{\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi} + c\rho} \end{bmatrix}, \qquad \gamma_B = \begin{bmatrix} -\frac{2\pi^2\beta}{\rho\left(4\pi + 2c\delta^2 + c\rho^2 + 2c\delta\rho - \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)} \\ -\frac{2\pi^2\beta}{\rho\left(4\pi + 2c\delta^2 + c\rho^2 + 2c\delta\rho + \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)} \end{bmatrix} \\
\eta_A = \begin{bmatrix} \frac{2\pi c}{\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi} - c\rho} \\ -\frac{2\pi c}{\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi} + c\rho} \end{bmatrix}, \qquad \eta_B = \begin{bmatrix} \frac{2\pi^2}{\rho\left(4\pi + 2c\delta^2 + c\rho^2 + 2c\delta\rho - \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)} \\ \frac{2\pi^2}{\rho\left(4\pi + 2c\delta^2 + c\rho^2 + 2c\delta\rho + \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)} \end{bmatrix}.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Проанализируем функции $V_i(G)$ аналогично тому, как это было сделано в кооперативной постановке задачи. Каждая функция $V_i(G)$ записывается в виде суммы квадратичной формы, линейной составляющей и постоянного слагаемого. Матрица квадратичной фомы имеет вид

$$M_i = \begin{bmatrix} \epsilon_B & \eta_B & \cdots & \eta_A & \cdots & \eta_B \\ \eta_B & \epsilon_B & \cdots & \eta_A & \cdots & \eta_B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \eta_A & \eta_A & \cdots & \epsilon_A & \cdots & \eta_A \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ \eta_B & \eta_B & \cdots & \eta_A & \cdots & \epsilon_B \end{bmatrix},$$

где элементы с индексами A заполняют i-й столбец и i-ю строку, а на остальных позициях стоят элементы с индексами B. Матрицы M_i подобны, причем преобразование подобия задается некоторой матрицей перестановок, поэтому мы будем рассматривать только матрицу M_1. Эта матрица имеет $n-3$ собственных значения вида $\lambda_i = \epsilon_B - \eta_B$, $i = 1,\dots,n$, и собственные значения вычисляются как

$$\lambda_{n-1} = \frac{\epsilon_A}{2} + \frac{\epsilon_B}{2} + \frac{(n-2)\eta_B}{2} - \frac{\sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_B - (n-2)\eta_B)^2 + 8(n-2)\eta_A{}^2}}{2},$$

$$\lambda_n = \frac{\epsilon_A}{2} + \frac{\epsilon_B}{2} + \frac{(n-2)\eta_B}{2} + \frac{\sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_B - (n-2)\eta_B)^2 + 8(n-2)\eta_A{}^2}}{2}.$$

Для обоих компонент решения первые $n-2$ собственные числа равны нулю, поэтому свойства матрицы M_1 определяются последними двумя собственными значениями.

Для простоты рассмотрим случай $n = 3$:

$$\lambda_2 = \frac{\epsilon_A}{2} + \frac{\epsilon_B}{2} + \frac{\eta_B}{2} - \frac{\sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_B - \eta_B)^2 + 8\eta_A^2}}{2},$$

$$\lambda_3 = \frac{\epsilon_A}{2} + \frac{\epsilon_B}{2} + \frac{\eta_B}{2} + \frac{\sqrt{(\epsilon_A - \epsilon_B - \eta_B)^2 + 8\eta_A^2}}{2}.$$

Заметим, что $\eta_B = \epsilon_B$ и $\eta_A = -\dfrac{\pi c}{c\delta + c\rho - \epsilon_A}$,

$$\lambda_2 = \frac{\epsilon_A}{2} + \frac{2\epsilon_B}{2} - \frac{\sqrt{(\epsilon_A - 2\epsilon_B)^2 + \dfrac{8\pi^2 c^2}{(c\delta + c\rho - \epsilon_A)^2}}}{2},$$

$$\lambda_3 = \frac{\epsilon_A}{2} + \frac{2\epsilon_B}{2} + \frac{\sqrt{(\epsilon_A - 2\epsilon_B)^2 + \dfrac{8\pi^2 c^2}{(c\delta + c\rho - \epsilon_A)^2}}}{2}.$$

Заметим, что выполняется неравенство $\epsilon_A + 2\epsilon_B > \sqrt{(\epsilon_A - 2\epsilon_B)^2 + \dfrac{8\pi^2 c^2}{(c\delta + c\rho - \epsilon_A)^2}}$, поэтому знак собственных чисел определяется знаком выражения $\epsilon_A + 2\epsilon_B$. Производя вычисления непосредственно для двух компонент решения, получаем

$$\epsilon_A + 2\epsilon_B = \begin{bmatrix} \dfrac{\pi\left(4\pi - c\rho^2 + \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)}{\rho\left(4\pi + 2c\delta^2 + c\rho^2 + 2c\delta\rho - \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)} \\ -\dfrac{\pi\left(c\rho^2 - 4\pi + \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)}{\rho\left(4\pi + 2c\delta^2 + c\rho^2 + 2c\delta\rho + \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)} \end{bmatrix},$$

откуда заключаем, что отрицательно полуопределенной матрице квадратичной формы соответствует вторая компонента решения.

Проверим, какое из решений (3.3) соответствует экономическому критерию [19], который в некооперативном случае может быть сформулирован следующим образом.

Предложение 2 [19]. *Пусть в задаче* (1.1), (1.2) *маргинальная полезность* $\pi = 0$. *Тогда с необходимостью имеем доход игроков равным нулю, т. е.* $V_i(G) = 0$, $i = 1,\dots,n$, *где* $V_i(G)$ *— функция Беллмана, соответствующая искомому максимуму в* (1.2).

Подставим $\pi = 0$ в (3.3). Несложно заметить, что $V_i(G) = 0$ (см. (3.2)) только для второй компоненты решения (3.3), т. е. согласно критерию [19] выбираем функцию $\bar{V}_i(G)$ (3.2) с коэффициентами

$$\begin{aligned}
\epsilon_A &= c\delta + \frac{c\rho}{2},\\
\epsilon_B &= \frac{2\pi^2}{\rho\left(4\pi + 2c\delta^2 + c\rho^2 + 2c\delta\rho + \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)},\\
\gamma_A &= \frac{2\pi\beta c}{\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi} + c\rho},\\
\gamma_B &= -\frac{2\pi^2\beta}{\rho\left(4\pi + 2c\delta^2 + c\rho^2 + 2c\delta\rho + \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)},\\
\eta_A &= -\frac{2\pi c}{\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi} + c\rho},\\
\eta_B &= \frac{2\pi^2}{\rho\left(4\pi + 2c\delta^2 + c\rho^2 + 2c\delta\rho + \rho\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}\right)}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Таким образом, отобранное по экономическому критерию решение совпало с решением, отобранным при помощи математического аппарата.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Для каждого* $i = 1, \ldots, n$ *в классе функций* (3.2) *существует ровно два решения, удовлетворяющих системе уравнений* (3.1). *Единственное допустимое решение* $\bar{V}_i(G)$, $i = 1, \ldots, n$, *удовлетворяющее условию отрицательной полуопределенности задается функцией* (3.2) *с коэффициентами* (3.4). *Более того, решение* $\bar{V}_i(G)$, $i = 1, \ldots, n$, *удовлетворяет экономическому критерию, сформулированному в предложении* 2.

4. Заключение

В работе проанализировано решение одного частного случая линейно–квадратичной дифференциальной игры, а именно, дифференциальной игры управления инвестициями в рекламную кампанию для случая n симметричных игроков. В рассмотренных кооперативной и некооперативной постановках задачи система алгебраических уравнений для поиска коэффициентов в представлении функции (функций) Беллмана имеет неединственное решение (четыре и два соответственно). Выбор функции-кандидата, удовлетворяющей уравнению Гамильтона — Якоби — Беллмана осуществлялся двумя способами: классическим методом, используемым для линейно-квадратичных задач оптимизации (LQR), и при помощи экономического критерия, предложенного в работе [19]. Оба подхода дали одинаковый результат в обоих случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров А.Г.** Оптимальные и адаптивные системы: уч. пособ. М.: Высш. шк, 1989. 263 с. ISBN: 5-06-000037-0 .
2. **Багно А.Л., Тарасьев А.М.** Свойства функции цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 3–14. doi: 10.20537/vm160101 .
3. **Беллман Р.** Динамическое программирование. М.: И.Л., 1960. 400 с.
4. **Жуковский В.И., Чикрий А.А.** Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Изд-во Наукова Думка, 1994. 320 с. ISBN: 5-12-003981-2 .

5. **Жуковский В.И.** Введение в дифференциальные игры при неопределенности / Междунар. НИИ Проблем управления. М., 1997. 446 с. ISBN: 5-900887-14-6 .
6. **Зенкевич Н., Петросян Л., Янг Д.** Динамические игры и их приложения в менеджменте. СПб: Изд-во Высш. шк. менеджмента, 2009. 415 с. ISBN: 978-5-9924-0026-7 .
7. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука. Изд-во УРО, 1993. 185 с. ISBN: 5-7691-0353-1 .
8. **Костюнин С.Ю., Шевкопляс Е.В.** Об упрощении интегрального выигрыша в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2011. № 4. P. 47–56.
9. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
10. **Петросян Л.А., Данилов Н.Н.** Кооперативные дифференциальные игры и их приложения. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. 273 с.
11. **Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.** Теория игр. СПб: БХВ-Петербург, 2012. 424 с. ISBN: 978-5-9775-0484-3 .
12. **Петросян Л.А., Шевкопляс Е.В.** Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2000. № 4. С. 14–18.
13. **Хлопин Д.В.** Тауберова теорема для дифференциальных игр // Мат. теория игр и ее приложения. 2015. Vol. 7, № 1. С. 92–120.
14. **Шевкопляс Е.В.** Оптимальные решения в дифференциальных играх со случайной продолжительностью // Современ. математика. Фундамент. направления. 2011. Vol. 42. (Тр. Междунар. конф. по мат. теории управления и механике; Суздаль, 3–7 июля 2009). М., 2011. С. 235–243.
15. Differential games in economics and management science / E.J. Dockner, S. Jorgensen, N.V. Long, G. Sorger. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 396 p. doi: 10.1017/CBO9780511805127 .
16. **Basar T., Olsder G.J.** Dynamic noncooperative game theory. 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 1999. 511 p. (Classics Appl. Math.) doi: 10.1137/1.9781611971132 .
17. **Fershtman C.** Goodwill and market shares in oligopoly // Economica. 1984. Vol. 51. P. 271–281.
18. **Garcia-Meza M.A., Gromova E.V., Lopez-Barrientos J.D.** Stable marketing cooperation in a differential game for an oligopoly// Int. Game Theory Rev., id: 1750028. doi: 10.1142/S0219198917500281 .
19. Generic and brand advertising strategies in a dynamic duopoly / F.M. Bass, A. Krishnamoorthy, A. Prasad, S.P. Sethi // Mark. Sci. 2005. Vol. 24, no. 4. P. 556–568. doi: 10.1287/mksc.1050.0119 .
20. **Jørgensen S., Gromova E.V.** Sustaining cooperation in a differential game of advertising goodwill accumulation // Eur. J. Oper. Res. 2016. Vol. 254, no. 1. P. 294–303. doi: 10.1016/j.ejor.2016.03.029 .
21. **Jorgensen S., Zaccour G.** Differential games in marketing. N Y: Springer Science; Business Media, 2004. 159 p. ISBN: 978-1-4419-8929-1 .
22. **Huang, J., Leng M., Liang L.** Recent developments in dynamic advertising research // European J. Oper. Res. 2012. Vol. 220, no. 3. P. 591–609. doi: 10.1016/j.ejor.2012.02.031 .
23. **Marin-Solano J., Shevkoplyas E.V.** Non-constant discounting and differential games with random time horizon // Automatica. Vol. 47, no. 12. P. 2626–2638. 2011. doi: 10.1016/j.automatica.2011.09.010 .
24. **Nair A., Narasimhan R.** Dynamics of competing with quality- and advertising-based goodwill // European J. Operational Research. 2006. Vol. 175, no. 1. P. 462–474.
25. **Nerlove M., Arrow K.J.** Optimal advertising policy under dynamic conditions // Economica. 1962. Vol. 29, no. 114. P. 129–142. doi: 10.2307/2551549 .
26. **Ramsey F.P.** A mathematical theory of saving // Economic J. 1928. Vol. 38, no. 152. P. 543–559. doi: 10.2307/2224098 .
27. **Reynolds S.S.** Dynamic oligopoly with capacity adjustment costs // J. Economic Dynamics & Control. 1991. Vol. 15. P. 491–514. doi: 10.1016/0165-1889(91)90003-J .

Громова Екатерина Викторовна Поступила 3.03.2018
д-р физ.-мат. наук, доцент,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург;
доцент кафедры математической теории игр и статистических решений
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
e-mail: e.v.gromova@spbu.ru

Громов Дмитрий Валерьевич
канд. техн. наук,
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург;
доцент кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
e-mail: d.gromov@spbu.ru

Лахина Юлия Эдуардовна
студент
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
e-mail: juliala1401@gmail.com

REFERENCES

1. Aleksandrov A.G. *Optimal'nye i adaptivnye sistemy* [Optimal and adaptive systems]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1989, 263 p. ISBN: 5-06-000037-0 .
2. Bagno A.L., Tarasyev A.M. Properties of the value function in optimal control problems with infinite horizon. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 3–14 (in Russian). doi: 10.20537/vm160101 .
3. Bellman R. *Dynamic Programming.* Princeton; N.J.: Princeton University Press, 1957, 365 p. ISBN: 069107951X .
4. Zhukovskii V.I., Chikrii A.A. *Lineino-kvadratichnye differentsial'nye igry* [Linear quadratic differential games]. Kiev: Naoukova Doumka Publ., 1994, 320 p. ISBN: 5-12-003981-2 .
5. Zhukovskii V.I. *Vvedenie v differentsial'nye igry pri neopredelennosti* [Introduction to Differential Games with Uncertainty]. Moscow, MNIIPU Publ., 1997, 446 p. ISBN: 5-900887-14-6 .
6. Zenkevich N., Petrosyan L., Yeung D. *Dinamicheskie igry i ikh prilozheniya v menedzhmente* [Dynamic games and their applications in management]. St. Petersburg: Vysshaya Shkola Menedzhmenta Publ., 2009, 415. p. ISBN: 978-5-9924-0026-7 .
7. Kleimenov, A.F. *Nonantagonistic positional differential games* [Neantagonisticheskie pozitsionnye differentsial'nye igry]. Ekaterinburg, Nauka Publ., 1993, 185 p. ISBN: 5-7691-0353-1 .
8. Kostyunin S.Yu., Shevkoplyas E.V. On simplification of integral payoff in differential games with random duration. *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2011, no. 4, pp. 47–56. (in Russian).
9. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1987, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
10. Petrosyan L.A., Danilov N.N. *Kooperativnye differentsial?nye igry i ikh prilozheniya* [Cooperative differential games and their applications]. Tomsk: Tomskii Gos. Univ. Publ., 1985, 273 p.
11. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Shevkoplyas E.V. *Teoriya igr* [Game Theory]. St. Petersburg: BKhV-Peterburg Publ., 2012, 424 p. ISBN: 978-5-9775-0484-3 .
12. Petrosyan L.A., Shevkoplyas E.V. Cooperative differential games with random duration. *Vestn. St. Petersbg. Univ., Math.*, 2000, vol. 33, no. 4, pp. 14–18 (in Russian).
13. Khlopin D.V. Uniform Tauberian theorem in differential games. *Autom. Remote Control*, 2016. vol. 77, no. 4, pp. 734–750. doi: 10.1134/S0005117916040172 .
14. Shevkoplyas E.V. Optimal solutions in differential games with random duration. *J. Math. Sci., N Y*, 2014, vol. 199, no. 6, pp. 715–722. doi: 10.1007/s10958-014-1897-9 .
15. Dockner E.J., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G.. *Differential games in economics and management science.* Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 396 p. doi: 10.1017/CBO9780511805127 .
16. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic noncooperative game theory.* 2nd ed, Philadelphia: SIAM, 1999, Ser. Classics Appl. Math., 511 p. doi: 10.1137/1.9781611971132 .
17. Fershtman C. Goodwill and market shares in oligopoly. *Economica*, 1984, vol. 51, pp. 271–281.
18. Garcia-Meza M.A., Gromova E.V., Lopez-Barrientos J.D. Stable marketing cooperation in a differential game for an oligopoly, *Int. Game Theory Rev.*, id: 1750028. doi: 10.1142/S0219198917500281 .
19. Bass F.M., Krishnamoorthy A., Prasad A., Sethi S.P. Generic and brand advertising strategies in a dynamic duopoly. *Mark. Sci.*, 2005, vol. 24, no. 4, pp. 556–568. doi: 10.1287/mksc.1050.0119 .

20. Jørgensen S., Gromova E.V. Sustaining cooperation in a differential game of advertising goodwill accumulation. *Eur. J. Oper. Res.*, 2016, vol. 254, no. 1, pp. 294–303. doi: 10.1016/j.ejor.2016.03.029 .
21. Jorgensen S., Zaccour G. *Differential Games in Marketing.* N Y: Springer Science; Business Media, 2004, 159 p. ISBN: 978-1-4419-8929-1 .
22. Huang J., Leng M., Liang L. Recent developments in dynamic advertising research. *European J. Oper. Res.*, 2012, vol. 220, no. 3, pp. 591–609. doi: 10.1016/j.ejor.2012.02.031 .
23. Marin-Solano J., Shevkoplyas E.V. Non-constant discounting and differential games with random time horizon. *Automatica*, 2011, vol. 47, no. 12, pp. 2626–2638, doi: 10.1016/j.automatica.2011.09.010 .
24. Nair A., Narasimhan R. Dynamics of competing with quality- and advertising-based goodwill. *European J. Oper. Res.*, 2006, vol. 175, no. 1, pp. 462–474.
25. Nerlove M., Arrow K.J. Optimal Advertising Policy under dynamic conditions. *Economica*, 1962, vol. 29, no. 114, pp. 129–142. doi: 10.2307/2551549 .
26. Ramsey F.P. A mathematical theory of saving. *Economic J.*, 1928, vol. 38, no. 152, pp. 543–559. doi: 10.2307/2224098 .
27. Reynolds S.S. Dynamic oligopoly with capacity adjustment costs. *J. Economic Dynamics & Control*, 1991, vol. 15, no. 3, pp. 491–514. doi: 10.1016/0165-1889(91)90003-J .

The paper was received by the Editorial Office on March 3, 2018

Ekaterina Viktorovna Gromova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Saint Petersburg University, St Peterburg, 199034 Russia, e-mail: e.v.gromova@spbu.ru .

Dmitrii Valer'evich Gromov, Cand. Technical Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Saint Petersburg University, St Peterburg, 199034 Russia, e-mail: d.gromov@spbu.ru .

Yuliya Eduardovna Lakhina, undergraduate student, Saint Petersburg University, St Peterburg, 199034 Russia, e-mail: juliala1401@gmail.com .