ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 519.17

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$

М. П. Голубятников

Продолжается изучение автоморфизмов дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин не более 4096 (массивы пересечений таких графов были найдены найдены ранее А. А. Махневым и М. С. Нировой). Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$. Тогда он имеет собственное значение $\theta_2 = -1$, граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для сети $pG_8(35, 8)$ и имеет параметры $(1296, 315, 90, 72)$. В данной работе изучаются возможные автоморфизмы указанных выше графов. В частности доказано, что для графа Γ с массивом пересечений $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$. Далее, если неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа с массивом пересечений $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, то $G = S(G)G_a$, $\bar{T}_a \cong A_5$ и $\bar{T}_{a,b} \cong A_4$ для подходящих вершин $a \in \Gamma$ и $b \in [a]$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

M. P Golubyatnikov. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$.

We continue the study of automorphisms of distance-regular locally cyclic graphs with at most 4096 vertices (the intersection arrays of such graphs were found earlier by A. A. Makhnev and M. S. Nirova). Let Γ be a distance-regular graph with intersection array $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$. Then it has eigenvalue $\theta_2 = -1$ and the graph $\bar{\Gamma}_3$ is pseudogeometric for the net $pG_8(35, 8)$ and has parameters $(1296, 315, 90, 72)$. We study possible automorphisms of such graphs. In particular, for a graph Γ with intersection array $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$ and $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, it is proved that $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$. Further, if a nonsolvable group $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ acts transitively on the vertex set of a graph with intersection array $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$ and $\bar{T}$ is the socle of the group $\bar{G} = G/S(G)$, then $G = S(G)G_a$, $\bar{T}_a \cong A_5$, and $\bar{T}_{a,b} \cong A_4$ for some vertices $a \in \Gamma$ and $b \in [a]$.

Keywords: strongly regular graph, distance-regular graph, graph automorphism.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-54-63

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через Γ_i, где $i \le d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется ровно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s, t)$, а если $\alpha = t$, то геометрия называется сетью.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры для некоторых натуральных чисел α, s, t, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s, t)$. В таких графах граница Хофмана для клик равна $s + 1$ и каждая вершина вне $(s + 1)$-клики L смежна с α вершинами из L.

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин, не большим 4096.

Предложение [1, теорема и следствие]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 на $v \le 4096$ вершинах. Если $\lambda = 2$ и Γ — примитивный граф, то верно одно из утверждений*

(1) $\mu = 1$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{6, 3, 3; 1, 1, 2\}$, $\{12, 9, 9; 1, 1, 4\}$, $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$, $\{33, 30, 8; 1, 1, 30\}$, $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$, $\{48, 45, 9; 1, 1, 40\}$;

(2) $\mu = 2$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{9, 6, 3; 1, 2, 3\}$, $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{30, 27, 24; 1, 2, 10\}$, $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$, $\{39, 36, 20; 1, 2, 20\}$, $\{39, 36, 22; 1, 2, 18\}$, $\{42, 39, 24; 1, 2, 12\}$, $\{51, 48, 24; 1, 2, 24\}$, $\{55, 52, 34; 1, 2, 22\}$, $\{58, 55, 8; 1, 2, 44\}$, $\{63, 60, 10; 1, 2, 54\}$, $\{75, 72, 8; 1, 2, 60\}$;

(3) $\mu > 2$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$, $\{39, 36, 27; 1, 4, 13\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, $\{60, 57, 16; 1, 4, 30\}$, $\{60, 57, 32; 1, 4, 18\}$, $\{63, 60, 49; 1, 4, 15\}$, $\{68, 65, 32; 1, 4, 40\}$, $\{75, 72, 42; 1, 4, 50\}$, $\{75, 72, 31; 1, 8, 45\}$, $\{80, 77, 61; 1, 7, 20\}$, $\{90, 87, 60; 1, 15, 18\}$, $\{99, 96, 12; 1, 4, 88\}$, $\{99, 96, 20; 1, 4, 72\}$, $\{99, 96, 6; 1, 6, 88\}$, $\{120, 117, 5; 1, 5, 108\}$, $\{143, 140, 34; 1, 7, 10\}$, $\{147, 144, 39; 1, 12, 117\}$, $\{224, 221, 32; 1, 16, 208\}$.

Автоморфизмы графов с массивами $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$ и $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$ из п. (3) были найдены в [2; 3]. Далее продолжается исследование вершинно симметричных графов с массивами пересечений из предложения 1. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. Автоморфизмы графа с массивом $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$ из п. (1) найдены в [4]. Автоморфизмы графов с массивами из п. (2) найдены И. Н. Белоусовым и А. А. Махневым в работах 2016 г.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$. Все обозначения в статье даны в соответствии с [2; 5].

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 35 + 280 + 980 = 1296$ вершин и спектр $35^1, 11^{210}, -1^{980}, -13^{108}$. Порядок клики в Γ не превосходит 4, так как $\lambda = 2$.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{35, 32, 8; 1, 4, 8\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка p из G и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *и*

Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$, *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 72l$ *и* $\alpha_1(g) = 24l + 48m - 432$ *или* $p = 3$, $\alpha_3(g) = 108l$ *и* $\alpha_1(g) = 36l + 72m - 432$;

(2) Ω *— одновершинный граф, и либо* $p = 5$, $\alpha_3(g) = 20(9m + 4)$ *и* $\alpha_1(g) = 60m + 120r - 25$, *либо* $p = 7$, $\alpha_3(g) = 252l - 28$ *и* $\alpha_1(g) = 84l + 168m + 35$;

(3) Ω *является n-кликой, $n > 1$, и либо $p = 2$, $n = 2$, либо $n = 4$, $\alpha_3(g) = 72l - 28n$ и* $\alpha_1(g) = 72l + 144m - 39n$;

(4) Ω *состоит из m вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, и $m = 1$;*

(5) Ω *содержит две вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ, и $p \le 3$.*

Так как граф Γ с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 4, 8\}$ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$, то по [6, предложение 4.2.17] граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для сети $pG_8(35, 8)$, имеет параметры $(1296, 315, 90, 72)$ и спектр $315^1, 27^{315}, -9^{980}$.

Теорема 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами* $(1296, 315, 90, 72)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *g — элемент простого порядка p из G и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Δ *— пустой граф, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 72l$ или $p = 3$, $\alpha_1(g) = 108m$;*

(2) Δ *является n-кликой, либо $n = 1$, $p \in \{5, 7\}$, в случае $p = 5$ имеем $\alpha_1(g) = 180l - 45$, а в случае $p = 7$ имеем $\alpha_1(g) = 252m + 63$, либо $n > 1$, $p \in \{2, 7\}$, в случае $p = 2$ имеем $n = 2l$, $l \in \{1, 2, \ldots, 18\}$, $\alpha_1(g) = 72m - 18l$, а в случае $p = 7$ имеем $n = 7m + 1$, $m \in \{1, 2, 3, 4\}$,* $\alpha_1(g) = 252r - 63m + 63$;

(3) Δ *является n-кокликой, $p = 3$, $n = 3l$, $l \in \{1, 2, \ldots, 12\}$, $\alpha_1(g) = 108m - 27l$;*

(4) *если Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик, то $p = 2$;*

(5) *если Δ содержит геодезический 2-путь, то $p \le 71$.*

Следствие. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{35, 32, 8; 1, 4, 8\}$ *и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Тогда $G = S(G)G_a$, $\bar T_a \cong A_5$ и $\bar T_{a,b} \cong A_4$ для подходящих вершин $a \in \Gamma$ и $b \in [a]$.*

В доказательстве теоремы применяется метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [7]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \le 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_jp_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [7, § 3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

1. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{35, 32, 28; 1, 4, 8\}$. *Тогда ненулевые числа пересечений равны*:

(1) $p^1_{11} = 2$, $p^1_{12} = 32$, $p^1_{22} = 24$, $p^1_{23} = 224$, $p^1_{33} = 756$;

(2) $p^2_{11}=4$, $p^2_{12}=3$, $p^2_{13}=28$, $p^2_{22}=80$, $p^2_{23}=196$, $p^2_{33}=756$;
(3) $p^3_{12}=8$, $p^3_{13}=27$, $p^3_{22}=56$, $p^3_{23}=216$, $p^3_{33}=736$.

Доказательство. Прямые вычисления (см. [6, лемма 4.1.7]). □

Лемма 2. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(1296,315,90,72)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g\in G$, χ_1 — *характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 315. *Тогда* $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_1(g)=(9\alpha_0(g)+\alpha_1(g))/36-9$. *Далее,* $315-\chi_1(g)$ *делится на* p, *если* $|g|=p$ — *простое число.*

Доказательство. Имеем

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\315&27&-9\\980&-28&8\end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g)=(35\alpha_0(g)+3\alpha_1(g)-\alpha_2(g))/144$. Подставляя $\alpha_2(g)=1296-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g)=(9\alpha_0(g)+\alpha_1(g))/36-9$.

Второе утверждение следует из [8, лемма 2]. □

Лемма 3. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{35,32,8;1,4,8\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g\in G$, χ_1 — *характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 210, χ_2 — *характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 980. *Тогда* $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_1(g)=(11\alpha_0(g)+3\alpha_1(g)-\alpha_3(g))/72+12$. $\chi_2(g)=(28\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/36-28$. *Если* $|g|=p$ — *простое число, то* $210-\chi_1(g)$ *и* $980-\chi_2(g)$ *делятся на* p.

Доказательство. Имеем

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\210&66&12&-6\\980&-28&-28&8\\105&-39&15&-3\end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g)=(35\alpha_0(g)+11\alpha_1(g)+2\alpha_2(g)-\alpha_3(g))/216$. Подставляя $\alpha_2(g)=1296-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)-\alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g)=(11\alpha_0(g)+3\alpha_1(g)-\alpha_3(g))/72+12$.

Аналогично, $\chi_2(g)=(245\alpha_0(g)-7\alpha_1(g)-7\alpha_2(g)+2\alpha_3(g))/324$. Подставляя $\alpha_1(g)+\alpha_2(g)=1296-\alpha_0(g)-\alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g)=(28\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/36-28$.

Остальные утверждения леммы следуют из [8, лемма 2]. □

Лемма 4. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(1296,315,90,72)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g\in G$. *Тогда* $|\mathrm{Fix}(g)|\le 405$.

Доказательство. Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v,k,λ,μ) и собственными значениями $k,r,-m$. Если g — автоморфизм Γ, то по [9, теорема 3.2] имеем $|\mathrm{Fix}(g)|\le v\max\{\lambda,\mu\}/(k-r)$.

Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 5 [6, предложение 4.4.6, утв. (ii)]. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф со вторым собственным значением* θ_1 *и* $b^+=b_1/(\theta_1+1)$. *Если* Γ *содержит индуцированный подграф* $K_{s,t}$, *то* $2st/(s+t)\le b^++1$.

Лемма 6 (см., например, [10, §2]). *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ) *и неглавными собственными значениями* r,s, $s<0$. *Если* Δ — *индуцированный регулярный подграф степени* d *на* w *вершинах, то* $s\le d-(k-d)w/(v-w)\le r$, *и в случае одного из равенств каждая вершина из* $\Gamma-\Delta$ *смежна точно с* $(k-d)w/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Лемма 7. *Пусть G — группа подстановок, действующая на конечном множестве Ω и p — простое число. Если для любого $\alpha \in \Omega$ подгруппа G_α содержит такую p-подгруппу X_α, что $\mathrm{Fix}(X_\alpha) = \{\alpha\}$, то G транзитивна на Ω.*

Доказательство. Пусть α, β — две точки из Ω. По условию длина каждой X_α-орбиты, отличной от $\{\alpha\}$, делится на p. Аналогично, длина каждой X_β-орбиты, отличной от $\{\beta\}$, делится на p.

Положим $H = \langle X_\alpha, X_\beta \rangle$. Тогда каждая H-орбита является объединением X_α-орбит, поэтому длина каждой H-орбиты, отличной от α^H, делится на p. Аналогично, длина каждой H-орбиты, отличной от β^H, делится на p, поэтому α и β лежат в одной H-орбите.

Таким образом, группа $H = \langle X_\alpha \mid \alpha \in \Omega \rangle$ транзитивна на Ω. $\square$

2. Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1296, 315, 90, 72)$

В этом разделе предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами (1296,315, 90,72), $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. По лемме 4 имеем $|\Delta| \leq= 405$. По лемме 5 для индуцированного подграфа $K_{s,t}$ получим $2st/(s+t) \leq 9$. В частности при $s = 72$ получим $t \leq 4$.

Лемма 8. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Δ — пустой граф, то $p = 2$, $\alpha_1(g) = 72l$ или $p = 3$, $\alpha_1(g) = 108m$;*

(2) *если Δ — одновершинный граф, то $p \in \{5, 7\}$, в случае $p = 5$ имеем $\alpha_1(g) = 180l - 45$, а в случае $p = 7$ имеем $\alpha_1(g) = 252m + 63$;*

(3) *если Δ является n-кликой, $n > 1$, то $p \in \{2, 7\}$ и в случае $p = 2$ имеем $n = 2l$, $l \in \{1, 2, \ldots, 18\}$, $\alpha_1(g) = 72m - 18l$, а в случае $p = 7$ имеем $n = 7m + 1$, $m \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha_1(g) = 252r - 63m + 63$;*

(4) *если Δ является n-кокликой, то $p = 3$, $n = 3l$, $l \in \{1, 2, \ldots, 12\}$; $\alpha_1(g) = 108m - 27l$;*

(5) *если Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик, то $p = 2$.*

Доказательство. Напомним, что по лемме 2 $\chi_1(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/36 - 9$.

Пусть Δ — пустой граф. Так как $v = 2^4 \cdot 3^4$, то $p \in \{2, 3\}$. Далее, $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/36 - 9$, в случае $p = 2$ имеем $\alpha_1(g) = 72l$, а в случае $p = 3$ имеем $\alpha_1(g) = 108m$.

Пусть Δ является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 315 и 980, поэтому $p \in \{5, 7\}$. Далее, $\chi_1(g) = (9 + \alpha_1(g))/36 - 9$, в случае $p = 5$ имеем $\alpha_1(g) = 180l - 45$, а в случае $p = 7$ имеем $\alpha_1(g) = 252m + 63$.

Если $n > 1$, a, b — две вершины из Δ, то $|[a] - b^\perp| = 224$ и $|\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)| = 756$, поэтому p делит 224, 756 и $(92 - |\Delta|)$. Из первых двух условий следует, что $p = 2$ или $p = 7$. Напомним, что $\chi_1(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/36 - 9$ и p делит $315 - \chi_1(g)$. Из второго условия и границы Хофмана для клик $n \leq 1 - k/\theta_2$ получим $n \leq 36$. Поэтому либо $p = 2$, $n = 2l$, $l \in \{1, 2, \ldots, 18\}$, $\chi_1(g) = (18l + \alpha_1(g))/36 - 9$ и $\alpha_1(g) = 72m - 18l$, либо $p = 7$, $n = 7m + 1$, $m \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\chi_1(g) = (63m + 9 + \alpha_1(g))/36 - 9$, $\alpha_1(g) = 252r - 63m + 63$.

Пусть Δ является n-кокликой, $n \geq 2$. Тогда $|[a] - b^\perp| = 243$ и $|\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)| = 736$, поэтому p делит 72, 243 и $(738 - |\Delta|)$. Из первых двух условий следует, что $p = 3$. Из второго условия и границы Хофмана для коклик $n \leq -v\,\theta_2/(k - \theta_2)$ получим $n \leq 36$. Отсюда $n = 3l$, $l \in \{1, 2, \ldots, 12\}$, $\chi_1(g) = (27l + \alpha_1(g))/36 - 9$ и $\alpha_1(g) = 108m - 27l$.

Пусть Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 224 и 72, поэтому $p = 2$. $\square$

Лемма 9. *Если Δ содержит геодезический 2-путь, то выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Σ — сильно регулярный граф с параметрами $(v, k, 90, 72)$, то $k \geq 315$;*

(2) *число p меньше 73.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Σ — сильно регулярный граф с параметрами $(v, k, 90, 72)$ и $k < 315$. Тогда число $4(k-72)+324$ является квадратом натурального числа n. Для $n = 2w$ получим $k = w^2 - 9$, Σ имеет неглавные собственные значения $9+w, 9-w$, кратность собственного значения $9+w$ равна $(w-10)(w^2-9)(w^2+w-18)/(144w)$ и $w \in \{12, 15\}$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Ввиду утверждения (1) имеем $p \le 89$. Если $p > 72$, то $\mu_\Delta = 72$. В случае $|[a]-\Delta| = p$ подграф $[a]-\Delta$ регулярен степени l, подграф $\Delta(a) \cap [u]$ является $(90-l)$-кликой. Если b, c — различные вершины из $\Delta(a) \cap [u]$, то $[b] \cap [c]$ содержит a, p вершин из $u^{\langle g\rangle}$ и $88-l$ вершин из $\Delta(a) \cap [u]$. Отсюда $p - l \le 1$ и $u^{\langle g\rangle}$ является кликой, противоречие.

Напомним, что по лемме 4 имеем $|\Delta| \le 405$.

Пусть $p = 89$. Тогда $89 \cdot 11 \le |\Gamma - \Delta| \le 89 \cdot 14$. Далее, степень любой вершины в графе Δ равна 137, противоречие с леммой 6.

Пусть $p = 83$. Тогда $83 \cdot 10 \le |\Gamma - \Delta| \le 83 \cdot 15$. Далее, степень вершины в графе Δ равна 149, противоречие с леммой 6.

Пусть $p = 79$. Тогда $79 \cdot 11 \le |\Gamma - \Delta| \le 79 \cdot 16$. Далее, степень вершины в графе Δ равна 78 или 157. Если a — вершина степени 78 в Δ, то число ребер между $\Delta(a)$ и $\Delta_2(a)$ равно $145x + 66(78-x) = (|\Delta|-79)72$. Отсюда x делится на 6, 36 делит $145x$ и $x \in \{0, 72\}$. В случае $x = 0$ имеем $66 \cdot 78 = (|\Delta|-79)72$, а в случае $x = 72$ имеем $145 + 11/2 = |\Delta| - 79$. В любом случае получим противоречие. Значит, степень любой вершины в графе Δ равна 157, противоречие с леммой 6.

Пусть $p = 73$. Тогда $73 \cdot 12 \le |\Gamma - \Delta| \le 73 \cdot 17$. Далее, степень вершины в графе Δ равна 96 или 169. Если a — вершина степени 96 в Δ, то число ребер между $\Delta(a)$ и $\Delta_2(a)$ равно $151x + 78y + 5(96-x-y) = (|\Delta|-97)72$. Отсюда $73(2x+y) + 5 \cdot 96 = (|\Delta|-97)72$, $2x + y = 24z$, поэтому $73z = 3(|\Delta|-97) - 20$. Для $|\Delta| = 1296 - 73l$ получим $z + 3l = 49$, $l \ge 13$. Если $l = 13$, то $2x + y = 240$ и $96 < x + y$, противоречие. Если $l = 14$, то $|\Delta| = 274$, $2x + y = 168$ и $x \ge 72$. Для двух вершин $b, c \in \Delta(a)$ подграф $[b] \cap [c]$ содержит не менее $304 - 177$ вершин из $\Delta_2(a)$, противоречие. Если $l = 15$, то $x = 0$ и $y = 24z = 96$. В этом случае $|\Delta| = 201$, $|\Delta| - 97 = 104$.

Пусть $a, b \in \Delta$ и $|\Delta(a) \cap [b]| = 17$. Тогда степени вершин a, b в Δ равны 96 и Δ содержит 26-вершинный подграф Σ из $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$. Далее, степени вершин из Σ в Δ равны 169. Если d, e — две вершины из Σ, то $d^\perp \cup e^\perp$ содержит не менее $2 + 90 + 78 + 78$ вершин из Δ, противоречие. $\square$

Из лемм 8, 9 следует теорема 2.

3. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 4, 8\}$

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 4, 8\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если $p > 31$, то вместе с вершиной a подграф Ω содержит $[a]$. Противоречие с тем, что тогда $\Omega = \Gamma$. Значит, $p \le 31$.

Лемма 10. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Ω — пустой граф, то $p = 2$, $\alpha_3(g) = 72l$ и $\alpha_1(g) = 24l + 48m$ или $p = 3$, $\alpha_3(g) = 108l$, $\alpha_1(g) = 36l + 72m$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 5$, $\alpha_3(g) = 20(9m+4)$ и $\alpha_1(g) = 60m + 120r - 25$ или $p = 7$, $\alpha_3(g) = 252l - 28$ и $\alpha_1(g) = 84l + 168m + 35$, либо $n > 1$, $p = 2$, $n = 2$ или $n = 4$, $\alpha_3(g) = 72l - 28n$ и $\alpha_1(g) = 72l + 144m - 39n$;*

(3) *если Ω состоит из m вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, то $m = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что по лемме 3 $\chi_1(g) = (11\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/72 + 12$ и $\chi_2(g) = (28\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/36 - 28$.

Если Ω — пустой граф то $p = 2$ или $p = 3$. Пусть $p = 2$, тогда по теореме 2 $\alpha_3(g) = 72l$, и число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 24l)/24 + 12$ четно. Отсюда $\alpha_1(g) = 24l + 48m$.

Пусть $p = 3$, тогда по теореме 2 $\alpha_3(g) = 108l$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 36l)/24 + 12$ делится на 3. Отсюда $\alpha_1(g) = 36l + 72m$.

Пусть Ω является n-кликой. Так как $a_1 = 2$, то $n \leq 4$. В случае $n = 1$ число p делит 35. Пусть $p = 5$. Тогда $\chi_2(g) = (28 + \alpha_3(g))/36 - 28$, $\alpha_3(g) = 20l$ и число $(7 + 5l)/9$ сравнимо с 3 по модулю 5, поэтому $7 + 5l = 45m + 27$ и $l = 9m + 4$. Далее, число $\chi_1(g) = (11 + 3\alpha_1(g) - 20(9m + 4))/72 + 12$ делится на 5, $\alpha_1(g) = 60m + 120r - 25$.

Пусть $p = 7$. Тогда число $\chi_2(g) = (28 + \alpha_3(g))/36 - 28$ делится на 7 и $\alpha_3(g) = 252l - 28$. Далее, число $\chi_1(g) = (13 + \alpha_1(g) - 84l)/24 + 12$ делится на 7. Отсюда $\alpha_1(g) = 84l + 168m + 35$.

Пусть теперь $n > 1$. Тогда $p = 2$ и $n = 2$ или $n = 4$. Число $\chi_2(g) = (28n + \alpha_3(g))/36 - 28$ четно, $\alpha_3(g) = 72l - 28n$. Далее, число $\chi_1(g) = (11n + 3\alpha_1(g) - 72l + 28n)/72 + 12$ четно, $\alpha_1(g) = 72l + 144m - 39n$.

Пусть Ω состоит из m вершин, попарно находящихся на расстоянии 3. Так как по лемме 1 имеем $p^3_{12} = 8$,$p^3_{13} = 27$, то $m = 1$. $\square$

Лемма 11. *Пусть Ω содержит две вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ. Тогда $p \leq 3$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $p > 3$, то Ω является связным вполне регулярным графом с параметрами (v', k', λ', μ'), где $\lambda' = 2$, $\mu' = 4$. Далее, любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с одной вершиной из Ω. Так как $a_2 = 3$, то $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ — регулярный граф степени 3.

Если $p = 31$, то Ω — полный многодольный граф, поэтому Ω — октаэдр. Противоречие с тем, что для $a \in \Omega$ элемент g действует без неподвижных точек на $\Gamma_3(a)$.

Если $p = 29$, то $k' = 6$. Противоречие с тем, что $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 6 \cdot 3/4$.

Если $p = 23$, то $k' = 12$ и для $a \in \Omega$ имеем $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 27$. Противоречие с тем, что $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ — регулярный граф степени 3 на 27 вершинах.

Если $p = 19$, то $k' = 16$ и для $a \in \Omega$ элемент g фиксирует не менее 11 вершин из $\Gamma_3(a)$. Так как $a_3 = 27$, то $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ — регулярный граф степени 8. Поэтому для $b \in \Gamma_3(a) \cap \Omega$ подграф $[b] \cap \Gamma_2(a)$ попадает в Ω. Противоречие с тем, что число ребер между $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ и $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ равно $52 \cdot 9 = 8|\Gamma_3(a) \cap \Omega|$.

Если $p = 17$, то $k' = 18$. Противоречие с тем, что $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 18 \cdot 15/4$.

Если $p = 13$, то $k' \in \{9, 22\}$. Противоречие с тем, что число $|\Gamma_2(a) \cap \Omega|$ равно $9 \cdot 6/4$ или $22 \cdot 19/4$.

Если $p = 11$, то $k' \in \{13, 24\}$. В случае $k' = 13$ имеем противоречие с тем, что число $|\Gamma_2(a) \cap \Omega|$ равно $13 \cdot 10/4$. Значит, $k' = 24$ и для $a \in \Omega$ элемент g фиксирует не менее 7 вершин из $\Gamma_3(a)$. Так как $a_3 = 27$, то $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ — регулярный граф степени 16 и для $b \in \Gamma_3(a) \cap \Omega$ подграф $[b] \cap \Gamma_2(a)$ попадает в Ω. Противоречие с тем, что число ребер между $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ и $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ равно $126 \cdot 17 = 8|\Gamma_3(a) \cap \Omega|$.

Если $p = 7$, то $k' \in \{7, 14, 21, 28\}$. В случаях $k' = 14, 21$ имеем противоречие с тем, что число $|\Gamma_2(a) \cap \Omega|$ равно $14 \cdot 11/4$, $21 \cdot 18/4$. Если $k' = 7$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами (15,7,2,4). Противоречие с тем, что Ω — регулярный граф степени 7 на 15 вершинах. Значит, $k' = 28$ и $|\Omega| \geq 1 + 28 + 175$. Противоречие с тем, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $204 \cdot 7$ и некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 2 вершинами из Ω.

Если $p = 5$, то $k' \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$. В случаях $k' = 5, 10, 25, 30$ имеем противоречие с тем, что число $|\Gamma_2(a) \cap \Omega|$ равно $5 \cdot 2/4$, $10 \cdot 7/4$, $25 \cdot 22/4$, $30 \cdot 27/4$. Если $k' = 15, 20$, то число $|\Gamma_2(a) \cap \Omega|$ нечетно. Противоречие с тем, что $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ — регулярный граф степени 3 на нечетном числе вершин. $\square$

Из лемм 10, 11 следует теорема 1.

4. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 4, 8\}$, вершинно симметричный случай

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 4, 8\}$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве его вершин. Ввиду теоремы 1 имеем $|G| = 2^\beta 3^\gamma 5^\delta 7^\epsilon$, где $\delta, \epsilon \leq 1$. Если g — элемент порядка 5 из G, то по теореме 1 элемент g фиксирует единственную вершину из Γ и по лемме 7 группа $O^{5'}(G)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Аналогично, если g — элемент порядка 7 из G, то по теореме 1 элемент g фиксирует единственную вершину из Γ и по лемме 7 группа $O^{7'}(G)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ.

Лемма 12. *Пусть f — элемент порядка 7 из G. Тогда $C_G(f)$ не содержит элементов порядка 5.*

Доказательство. По теореме $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$, $\alpha_3(f) = 252l - 28$ и $\alpha_1(f) = 84l + 168m + 35$.

Пусть g — элемент порядка 5 из $C_G(f)$. Тогда $\alpha_3(f) = 252l - 28$ и $\alpha_1(f) = 84l + 168m + 35$ делятся на 5. Отсюда $l = 4$, $\alpha_3(f) = 980$, $m = 3$, $\alpha_1(f) = 336 + 504 + 35 = 875$ и $\alpha_3(f) + \alpha_1(f) > v = 1263$, противоречие. □

Доказательство следствия. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 4, 8\}$, неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин и a — вершина графа Γ. Через $\bar{T}$ обозначим цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, где $S(G)$ — разрешимый радикал группы G, через Q — силовскую 2-подгруппу из $S(G)$ и через S — силовскую 3-подгруппу из $S(G)$. Пусть f — элемент порядка 7 из G.

Лемма 13. *$S(G)$ является неединичной $\{2, 3\}$-группой, цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ — простая неабелева группа, и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$S(G) = 1$, $G \cong U_4(3)$ и $G_a \cong A_7$ — подгруппа индекса* 1296;

(2) *$G = S(G)G_a$ и либо $\bar{T}_a \cong A_5$, $\bar{T}_{a,b} \cong A_4$, либо $\bar{T}_a \cong L_2(7)$, $\bar{T}_{a,b} \cong S_4$ для некоторой вершины $b \in [a]$*;

(3) *$\bar{T} \cong A_5$, либо $\bar{T}_a \cong Z_5$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$, либо $\bar{T}_a \cong Z_5.Z_2$ — подгруппа индекса 6 из $\bar{T}$*;

(4) *$\bar{T} \cong A_6$, либо $\bar{T}_a \cong Z_5.Z_2$ — подгруппа индекса 36 из $\bar{T}$, либо $\bar{T}_a \cong A_5$ — подгруппа индекса 6 из $\bar{T}$*;

(5) *$\bar{T} \cong PSp_4(3)$ и $\bar{T}_a \cong E_{16}.A_5$ — подгруппа индекса 27 из $\bar{T}$*;

(6) *$\bar{T} \cong L_2(7)$, либо $\bar{T}_a \cong Z_7$ — подгруппа индекса 24 из $\bar{T}$, либо $\bar{T}_a \cong Z_7.Z_3$ — подгруппа индекса 8 из $\bar{T}$*;

(7) *$\bar{T} \cong L_2(8)$, либо $\bar{T}_a \cong Z_7$ — подгруппа индекса 24 из $\bar{T}$, либо $\bar{T}_a \cong Z_7.Z_2$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$, либо $\bar{T}_a \cong E_8.Z_7$ — подгруппа индекса 9 из $\bar{T}$*;

(8) *$\bar{T} \cong U_3(3)$, $\bar{T}_a \cong L_2(7)$ — подгруппа индекса 36 из $\bar{T}$*;

(9) *$\bar{T} \cong A_8$ и $\bar{T}_a \cong A_7$ — подгруппа индекса 8 из $\bar{T}$*;

(10) *$\bar{T} \cong A_9$ и $\bar{T}_a \cong A_7$ — подгруппа индекса 72 из $\bar{T}$*;

(11) *$\bar{T} \cong Sp_6(2)$ и $\bar{T}_a \cong A_7$ — подгруппа индекса $2^4 \cdot 9$ из $\bar{T}$.*

Доказательство. Пусть $S(G)$ содержит элемент g порядка 5 или 7. По теореме 1 $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и $|G|$ не делится на $|g|^2$. По условию G — неразрешимая группа, и по лемме Фраттини G содержит подгруппу порядка 35, противоречие с леммой 12. Итак, $S(G)$ является $\{2, 3\}$-группой.

Далее, цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ — простая неабелева группа. Если $|\bar{T}|$ не делится на 7, то группа $\bar{T}$ изоморфна $A_5, A_6, PSp_4(3)$. Если $|\bar{T}|$ не делится на 5, то группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(7), L_2(8), U_3(3)$. Если же $|\bar{T}|$ делится на 35, то по [11, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна A_n $(n = 7, 8, 9)$, $L_3(4), U_4(3)$ или $Sp_6(2)$.

Допустим, что $S(G)=1$. Тогда $G\cong U_4(3)$ и $G_a\cong A_7$ — подгруппа индекса 1296.

Если $G=S(G)G_a$, то G_a содержит подгруппу $G_{a,b}$ индекса, делящего 35 для $b\in[a]$. Отсюда либо $\bar{T}_a\cong A_5$, $\bar{T}_{a,b}\cong A_4$, либо $\bar{T}_a\cong L_2(7)$, $\bar{T}_{a,b}\cong S_4$, либо $\bar{T}_a\cong A_7$, $\bar{T}_{a,b}\cong A_6$. В последнем случае получим противоречие с тем, что элемент порядка 5 из G фиксирует единственную вершину.

Напомним, что $\bar{T}$ содержит подгруппу $\bar{T}_a$ индекса, делящего $2^4\cdot 3^4$, а группа $\bar{T}_a$ содержит подгруппу $\bar{T}_{a,b}$ индекса, делящего 35. Так как группы A_7 и $L_3(4)$ не содержит собственных подгрупп индекса, делящего $2^4\cdot 3^4$, то верно одно из утверждений в заключении леммы или $\bar{T}\cong U_4(3)$, $\bar{T}_a\cong L_3(4)$ — подгруппа индекса 162 из $\bar{T}$. Но в последнем случае $\bar{T}_a$ не содержит подгрупп индекса, делящего 35. □

Лемма 14. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) $|G|$ *не делится на* 35;
(2) $G=S(G)G_a$, $\bar{T}_a\cong A_5$ *и* $\bar{T}_{a,b}\cong A_4$ *для подходящей вершины* $b\in[a]$.

Доказательство. Если $|G|$ делится на 35, то ввиду леммы 13 группа $\bar{T}_a$ изоморфна A_7. Тогда для $b\in[a]$ группа $\bar{T}_{a,b}$ изоморфна A_6, противоречие с тем, что элемент порядка 5 из G фиксирует единственную вершину.

Пусть $G=S(G)G_a$ и G содержит элемент f порядка 7. Тогда $|Q:Q_a|=16$ и $|C_Q(f):Q_a\cap C_G(f)|\in\{2,16\}$, противоречие с действием $C_Q(f)$ на $\mathrm{Fix}(f)$.

Пусть $\bar{T}\cong U_3(3)$, f — элемент порядка 7 из $N_G(Q)$. Тогда $|Q:Q_a|=4$ и $|C_Q(f):Q_a\cap C_G(f)|=4$, противоречие с действием $C_Q(f)$ на $\mathrm{Fix}(f)$.

Аналогичное противоречие получим в случаях, когда группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(7), L_2(8)$.

Пусть g — элемент порядка 5 из G. Если $1<|Q:Q_a|<16$, то $|C_Q(f):Q_a\cap C_G(f)|>1$, противоречие с действием $C_Q(f)$ на $\mathrm{Fix}(f)$. Аналогично, если $1<|S:S_a|<81$, то $|C_S(f):S_a\cap C_G(f)|>1$, противоречие с действием $C_S(f)$ на $\mathrm{Fix}(f)$.

Итак, $G=S(G)G_a$, $\bar{T}_a\cong A_5$ и $\bar{T}_{a,b}\cong A_4$. □

Из лемм 13, 14 получаем следствие. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Makhnev A.A., Nirova M.S.** On distance-regular graphs with $\lambda=2$ // J. Siberian Federal Univ. 2014. Vol. 7, no. 2. P. 204–210.
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О группе автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{24,21,3;1,3,18\}$ // Алгебра и логика. 2012. Vol. 51, no. 4. С. 476–495.
3. **Makhnev A.A., Nirova M.S.** On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{51,48,8;1,4,36\}$ // Dokl. Math. 2013. Vol. 87, no. 3. P. 269–273.
4. **Makhnev A.A., Paduchikh D.V.** Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{18,15,9;1,1,10\}$ // Commun. Math. Stat. 2015. Vol. 3, no. 4. P. 527–534. doi: 10.1007/s40304-015-0072-z .
5. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
6. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** // Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 0387506195 .
7. **Cameron P.J.** Permutation groups Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 232 p. (London Math Soc. Student Texts; vol. 45). ISBN: 0-521-65302-9 .
8. **Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A.** Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{56,45,1;1,9,56\}$ // Докл. АН. 2010. Vol. 432, no. 5. P. 583–587.
9. **Behbahani M., Lam C.** Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. 2011. Vol 311, no. 2-3. P. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
10. **Brouwer A., Haemers W.** The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14, no. 5. P. 397–407. doi: 10.1006/eujc.1993.1044 .
11. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Electronic Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Голубятников Михаил Петрович
студент
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: mike_ru1@mail.ru

Поступила 27.02.2018

REFERENCES

1. Makhnev A.A., Nirova M.S. On distance-regular graphs with $\lambda = 2$. *J. Siberian Federal Univ.*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 204–210.
2. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$. *Algebra i Logika*, 2012, vol. 51, no. 4, pp. 476–495.
3. Makhnev A.A., Nirova M.S. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$. *Dokl. Math.* 2013, vol. 87, no. 3, pp. 269–273. doi: 10.7868/S0869565213130045 .
4. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$. *Commun. Math. Stat.*, 2015, vol. 3, no. 4, pp. 527–534. doi: 10.1007/s40304-015-0072-z .
5. J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p.
6. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
7. Cameron P.J. *Permutation groups.* Ser. London Math Soc. Student Texts, vol. 45, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 232 p. ISBN: 0-521-65302-9 .
8. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .
9. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms. *Discrete Math.*, 2011, vol. 311, no. 2-3, pp. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
10. Brouwer A., Haemers W. The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra. *Europ. J. Comb.*, 1993, vol. 14, no. 5, pp. 397–407. doi: 10.1006/eujc.1993.1044 .
11. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sib. Electronic Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

The paper was received by the Editorial Office on Februery 27, 2018.

Mikhail Petrovich Golubyatnikov, undergraduate student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: mike_ru1@mail.ru .