ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 519.62

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В $\mathbb{R}^3$

В. И. Бердышев

Охарактеризовано множество всех траекторий $\mathcal{T}$ движущегося в заданном коридоре Y объекта t, наиболее удаленных от набора $\mathbb{S}=\{S\}$ недружественных неподвижных наблюдателей. Каждый наблюдатель снабжен выпуклым открытым конусом сканирования $K(S)$ с вершиной S. Сторона, организующая наблюдение, ограничивает кратность покрытия Y конусами K, "толщину" конусов K и, кроме того, исключаются пары $S,\ S'$, для которых $[S,S']\subset (K(S)\cap K(S'))$. Поиск решения исходной задачи $\max_{\mathcal{T}}\min\{d(t,S):\ t\in\mathcal{T},\ S\in\mathbb{S}\}$, где $d(t,S)=\|t-S\|$ при $t\in K(S)$ и $d(t,S)=+\infty$ при $t\notin K(S)$, сводится к задаче поиска наилучшего маршрута в ориентированном графе, вершинами которого являются замкнутые непересекающиеся подмножества (боксы) из $Y\setminus\bigcup_S K(S)$. Соседние (смежные) боксы разделены некоторым конусом $K(S)$. Ребром является часть $\mathcal{T}(S)$ траектории $\mathcal{T}$, которая соединяет соседние боксы и оптимально пересекает конус $K(S)$, а вес ребра — уклонение вершины S от $\mathcal{T}(S)$. Наилучшим является маршрут, доставляющий максимум минимального веса.

Ключевые слова: навигация, задача сопровождения, движущийся объект, наблюдатель.

V. I. Berdyshev. Characterization of optimal trajectories in $\mathbb{R}^3$.

We characterize the set of all trajectories $\mathcal{T}$ of an object t moving in a given corridor Y that are furthest away from a family $\mathbb{S}=\{S\}$ of fixed unfriendly observers. Each observer is equipped with a convex open scanning cone $K(S)$ with vertex S. There are constraints on the multiplicity of covering the corridor Y by the cones K and on the "thickness" of the cones. In addition, pairs $S,\ S'$ for which $[S,S']\subset (K(S)\cap K(S'))$ are not allowed. The original problem $\max_{\mathcal{T}}\min\{d(t,S):\ t\in\mathcal{T},\ S\in\mathbb{S}\}$, where $d(t,S)=\|t-S\|$ for $t\in K(S)$ and $d(t,S)=+\infty$ for $t\notin K(S)$, is reduced to the problem of finding an optimal route in a directed graph whose vertices are closed disjoint subsets (boxes) from $Y\setminus\bigcup_S K(S)$. Neighboring (adjacent) boxes are separated by some cone $K(S)$. An edge is a part $\mathcal{T}(S)$ of a trajectory $\mathcal{T}$ that connects neighboring boxes and optimally intersects the cone $K(S)$. The weight of an edge is the deviation of S from $\mathcal{T}(S)$. A route is optimal if it maximizes the minimum weight.

Keywords: navigation, tracking problem, moving object, observer.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-40-45

1. Постановка задачи

Пусть Y — замкнутая окрестность (коридор) некоторой траектории движущегося объекта t, соединяющей заданные точки $t_*\neq t^*$. Граница коридора Y гомеоморфна сфере. Совокупность траекторий

$$\mathcal{T}=\{t(\tau)\colon 0\le\tau\le 1,\ t(0)=t_*,\ t(1)=t^*\},$$

принадлежащих Y, обозначим через $\mathbb{T}$. Задан набор $\mathbb{S}=\{S\}$ наблюдателей $S\notin Y$, каждый из которых имеет фиксированный выпуклый открытый конус наблюдения $K(S)$ с вершиной S такой, что $K(S)\cap\mathcal{T}\neq\varnothing$ для любой траектории $\mathcal{T}\in\mathbb{T}$. Далее $K_Y(S)$ — ближайшее к S связное максимальное по включению подмножество из $K\cap Y$, обладающее указанным свойством. Будем считать, что для любого $S\in\mathbb{S}$ усеченный конус $K_Y(S)$ имеет левую $\mathcal{L}K=\mathcal{L}K(S)$ и правую $\mathcal{R}K=\mathcal{R}K(S)$ стороны (границы): объект, двигающийся от t_* к t^* по любой траектории из $\mathbb{T}$, сперва встречается с $\mathcal{L}K$, а выходит из K_Y, пересекая сторону $\mathcal{R}K$. Определим уклонение

$$d(t,S)=\begin{cases}\|t-S\| & \text{при}\quad t\in K,\\ +\infty & \text{при}\quad t\notin K.\end{cases}$$

Предполагая, что наблюдатели S являются недружественными по отношению к движущемуся объекту t, рассмотрим задачу поиска величины

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathbb{S}) = \max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}} \min\{d(t,S)\colon t\in\mathcal{T},\ S\in\mathbb{S}\} \tag{1}$$

и задачу характеризации оптимальной траектории этой задачи. Итак, движущийся объект ищет траекторию, наиболее удаленную от наблюдателей. Сторона, организующая наблюдение за объектом, заинтересована в уменьшении величины $\mathbb{M}$ при естественных ограничениях на количество наблюдателей и энергетические затраты. Целесообразно ограничить кратность покрытия коридора Y конусами $K(S)$, например, числом 3, а также "толщину" самих конусов $K_Y(S)$, т. е. минимум величины $\max\{\rho(x,H)\colon x\in K_Y(S)\}$ по множеству плоскостей H, содержащих S. В этом случае сумма объемов конусов $K_Y(S)$ $(S\in\mathbb{S})$ будет малой в сравнении с объемом коридора Y. По техническим соображениям исключается наличие пар наблюдателей $S,\ S'\in\mathbb{S}$, для которых отрезок $[S,S']$ содержится в $(K_Y(S)\cap K_Y(S'))$.

Для заданного набора $\mathbb{S}=\{S_i\}$ наблюдателей разность

$$Y\backslash\bigcup_i K(S_i)$$

является объединением связных замкнутых множеств, внутренности которых не пересекаются. Эти множества будем называть боксами. Граница каждого бокса состоит из фрагментов границ $\mathcal{L}K,\mathcal{R}K$ некоторых конусов и границы ∂Y. Такой бокс будем обозначать через $[\mathcal{L}K(S_i)\ldots\mathcal{R}K(S_j)]$, перечислив левые и правые границы конусов, ограничивающие бокс, и опуская ∂Y. Указанный бокс состоит из точек $x\in Y$, расположенных левее $\mathcal{L}K(S_i),\ldots,$ и правее $\mathcal{R}K(S_j)$. Точки бокса невидимы для наблюдателей, поэтому траектория в нем может быть произвольной.

2. Частные случаи

Пусть $S\in\mathbb{S},\ K=K(S),\ \mathcal{L}K\cap\mathcal{R}K=\varnothing$, $\mathcal{D}$ — связное множество из K_Y, являющееся замыканием открытого множества и такое, что $\mathcal{D}\cap\mathcal{L}K\neq\varnothing$, $\mathcal{D}\cap\mathcal{R}K\neq\varnothing$. Ради простоты будем предполагать, что любой луч с вершиной S пересекается с множеством $\mathcal{D}$ по отрезку. Пусть $\mathbb{T}_\mathcal{D}$ — класс траекторий $\mathcal{T}\subset\mathcal{D}$, соединяющих множества $\mathcal{D}\cap\mathcal{L}K,\ \mathcal{D}\cap\mathcal{R}K$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\mathbb{M}(S)_\mathcal{D} = \max_{\mathcal{T}\subset\mathbb{T}_\mathcal{D}} \min\{d(S,t)\colon t\in\mathcal{T}\}. \tag{2}$$

Построим множество оптимальных траекторий задачи (2). Движение объекта удобно отслеживать по точкам пересечения его траектории с плоскостями специально подобранного "сканирующего" однопараметрического семейства плоскостей $\mathcal{H}=\{H\}$. Выберем две точки $x_l\in\mathcal{L}K,\ x_r\in\mathcal{R}K$ и опорные в них к конусу K плоскости $H_l,\ H_r$, построим однопараметрическое семейство плоскостей

$$\mathcal{H}=\{H^\lambda=\lambda H_l+(1-\lambda)H_r\colon 0\le\lambda\le 1\}.$$

Для поиска оптимальных траекторий $\mathcal{T}$ надо найти величину

$$M(S)_\mathcal{D} = \min_{H\in\mathcal{H}} \max\{d(S,x)\colon x\in H\cap K\cap\mathcal{D}\}, \tag{3}$$

множество $\mathcal{H}^*$ плоскостей, реализующих минимум (3), и множество точек $\mathcal{P}_H=\{x\}$, доставляющих максимум в (3) для $H\in\mathcal{H}^*$. Обозначим $\mathcal{P}(S)_\mathcal{D}=\bigcup_{H\in\mathcal{H}^*}\mathcal{P}_H$. Для каждой плоскости H точка пересечения $\mathcal{T}\cap H$ должна быть по возможности дальше от S, а для плоскости $H\in\mathcal{H}^*$ необходимо, чтобы $\mathcal{T}\cap H\in\mathcal{P}_H$. Далее обозначаем $\overset{\circ}{V}_M(S)=\{x:\ \|x-S\|<M\}$. Справедлива

Лемма. *Имеет место равенство* $\mathbb{M}(S)_{\mathcal{D}} = M(S)_{\mathcal{D}}$. *Траектория* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$ *является оптимальной в задаче* (2) *тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{P}_H \neq \varnothing \ \forall \ H \in \mathcal{H}^* \ \text{ и } \ \mathcal{T} \subset \mathcal{D} \backslash (K(S) \cap \overset{\circ}{V}_M (S)), \quad M = M(S)_{\mathcal{D}}.$$

Если набор $\mathbb{S} = \{S_j\}$ удовлетворяет условию $K_Y(S_i) \cap K_Y(S_j) = \varnothing$ при $i \neq j$, то, очевидно,

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \min_i M(S_i)_Y.$$

2.1. Пусть пара $\mathbb{S} = \{S_1, S_2\}$ такова, что внутренности конусов $K_Y(S_i)$ пересекаются:

$$\mathcal{K} = \overset{\circ}{K}_Y (S_1) \cap \overset{\circ}{K}_Y (S_2) \neq \varnothing.$$

Определим два "угла" [1]:

$\angle \mathcal{L} = \angle \mathcal{L}(S_1, S_2)$ — множество точек из Y, расположенных слева от $\mathcal{R}K(S_i)$ $(i = 1, 2)$;

$\angle \mathcal{R} = \angle \mathcal{R}(S_1, S_2)$ — множество точек из Y, расположенных справа от $\mathcal{L}K(S_i)$ $(i = 1, 2)$.

Пару $\mathbb{S}$ назовем *четной* (*нечетной*), если оба множества $Y \cap \operatorname{conv}(S_i \cup \mathcal{K})$ $(i = 1, 2)$ принадлежат одному углу $\angle \mathcal{L}$ или $\angle \mathcal{R}$ (принадлежат разным углам). Здесь conv — выпуклая оболочка множества.

Нетрудно убедиться, что если пара нечетная, то

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \min_{i=1,2} M(S_i)_Y.$$

Пусть пара $\mathbb{S}$ четная. Обозначим $K_i = K_Y(S_i)$. Двигаясь в боксе $[\mathcal{L}K_1, \mathcal{L}K_2]$ от t_* в направлении к t^*, объект пересекает $\mathcal{L}K_i$ $(i = 1, 2)$. Предположим, что справа он пересекает $\mathcal{L}K_1$. Для оптимального пересечения решим задачу (3) для $S = S_1$ и множества $\mathcal{D}_1$, являющегося частью конуса K_1, лежащей слева от $\mathcal{L}K_2$, и найдем величину $M(S_1)_{\mathcal{D}_1}$. В результате объект переходит в бокс $[\mathcal{R}K_1, \mathcal{L}K_2]$. Для перехода в бокс $[\mathcal{R}K_1, \mathcal{R}K_2]$ следует найти решение задачи (3) для $S = S_2$ и множества $\mathcal{D}_2$, являющегося частью конуса K_2, лежащей справа от $\mathcal{R}K_1$, и найти величину $M(S_2)_{\mathcal{D}_2}$. Обозначим

$$m(S_1, S_2) = \min\{M(S_1)_{\mathcal{D}_1}, M(S_2)_{\mathcal{D}_2}\}.$$

Если есть возможность пересечь сначала $\mathcal{L}K_2$, то аналогично найдем величину $m(S_2, S_1) = \min\{M(S_2)_{\mathcal{D}'_2}, M(S_1)_{\mathcal{D}'_1}\}$, где $\mathcal{D}'_2$ — часть конуса K_2, лежащая слева от $\mathcal{L}K_1$, а $\mathcal{D}'_1$ — часть конуса K_1, лежащая справа $\mathcal{R}K_2$. Для четной пары убеждаемся [2] в справедливости равенства

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathbb{S}) = \max\{m(S_1, S_2), m(S_2, S_1)\},$$

а траектория $\mathcal{T}$ оптимальна тогда и только тогда, когда она содержится в множестве

$$Y \backslash \bigcup_{i=1}^{2} (K(S_i) \cap \overset{\circ}{V}_{\mathbb{M}} (S_i)).$$

Если $\mathcal{T} \cap \overset{\circ}{\mathcal{K}} \neq \varnothing$, то $\min\{\rho(S_i, \mathcal{T}),\ i = 1, 2\} < \mathbb{M}(\mathbb{S})$.

2.2. Рассмотрим частный случай тройки наблюдателей $\mathbb{S} = \{S_i\}_{i=1}^3$ такой, что (см. рис. 1)

$$\mathcal{K} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{3} \overset{\circ}{K}_Y (S_i) \neq \varnothing.$$

Пусть пары $\{S_1, S_2\}$, $\{S_1, S_3\}$ четные, и для определенности будем считать, что оба множества $Y \cap \operatorname{conv}(S_i \cap \mathcal{K})$ $(i = 1, 2)$ принадлежат углу $\angle \mathcal{L}(S_1, S_2)$ и оба множества $Y \cap \operatorname{conv}(S_i \cap \mathcal{K})$

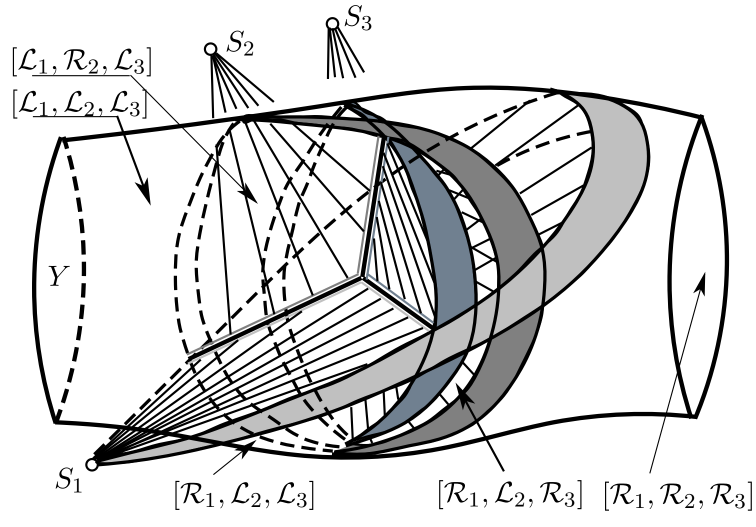

Рис. 1.

$(i = 1, 3)$ принадлежат углу $\angle\mathcal{L}(S_1, S_3)$. Предположим, что, двигаясь из точки t_* в боксе $[\mathcal{L}K_1, \mathcal{L}K_2, \mathcal{L}K_3]$, объект сперва пересекает $\mathcal{L}K_1$. Поверхность $\mathcal{L}K_1$ пересекается с $\mathcal{L}K_2$ и $\mathcal{L}K_3$. Иначе мы получим случай, рассмотренный выше для пары наблюдателей. Для поиска оптимального пересечения траектории $\mathcal{T}$ с K_1 вычислим величину $M(S_1) = M(S_1)_{\mathcal{D}_1}$ (см. (3)) и найдем множество $\mathcal{P}(S_1)_{\mathcal{D}_1}$, где $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(\mathcal{L}K_2, \mathcal{L}K_3)$ — множество точек из K_1, лежащих левее $\mathcal{L}K_2$ и $\mathcal{L}K_3$. Легко установить, что ввиду выпуклости конусов K_2, K_3 множество $\mathcal{P}(S_1)_{\mathcal{D}_1}$ может лежать только на дугах

$$(\mathcal{L}K_2) \cap (\mathcal{L}K_3), \quad (\mathcal{L}K_i) \cap K_1 \cap \partial Y \quad (i = 2, 3).$$

Объект, пересекая множество $\mathcal{P}(S_1)_{\mathcal{D}_1}$, переходит по одной из дуг в бокс $[\mathcal{R}K_1, \mathcal{L}K_2, \mathcal{L}K_3]$ по траектории, не пересекающейся с K_2 и K_3. Для движения далее есть два варианта. В первом варианте объект пересекает $\mathcal{L}K_2$, во втором — $\mathcal{L}K_3$. В первом варианте объект переходит в бокс $[\mathcal{R}K_1, \mathcal{R}K_2, \mathcal{L}K_3]$. Для оптимального перехода следует найти величину $M(S_2)_{\mathcal{D}_2}$, где $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(\mathcal{R}K_1, \mathcal{L}K_3)$ — множество точек из K_2, лежащих правее $\mathcal{R}K_1$ и левее $\mathcal{L}K_3$. Затем объекту осталось перейти в бокс $[\mathcal{R}K_1, \mathcal{R}K_2, \mathcal{R}K_3]$, предварительно решив задачу поиска величины $M(S_3)_{\mathcal{D}_3}$ и множества $\mathcal{P}(S_3)_{\mathcal{D}_3}$, где $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}(\mathcal{R}K_1, \mathcal{R}K_2)$ — часть конуса K_3, лежащая правее $\mathcal{R}K_1$ и $\mathcal{R}K_2$. Во втором варианте для оптимального пересечения конуса K_3 и перехода в бокс $[\mathcal{R}K_1, \mathcal{L}K_2, \mathcal{R}K_3]$ надо найти величину $M(S_3)_{\mathcal{D}'_3}$ и множество $\mathcal{P}(S_3)_{\mathcal{D}'_3}$, где $\mathcal{D}'_3 = \mathcal{D}(\mathcal{R}K_1, \mathcal{L}K_2)$ — часть конуса K_3, лежащая правее $\mathcal{R}K_1$ и левее $\mathcal{L}K_2$. И, наконец, для пересечения конуса K_3 и перехода в бокс $[\mathcal{R}K_1, \mathcal{R}K_2, \mathcal{R}K_3]$ находим величину $M(S_2)_{\mathcal{D}'_2}$ и множество $\mathcal{P}(S_2)_{\mathcal{D}'_2}$, где $\mathcal{D}'_2 = \mathcal{D}(\mathcal{R}K_1, \mathcal{K}K_3)$ — часть конуса K_2, расположенная правее $\mathcal{R}K_1$ и правее $\mathcal{R}K_3$.

Подобным образом исследуется случай, когда пара $\{S_1, S_2\}$ нечетная, а пары $\{S_1, S_3\}$, $\{S_2, S_3\}$ четные. Начиная с пересечения конуса $K(S_2)$, надо найти $M(S_2)_{\mathcal{D}}$ для $\mathcal{D}$, являющегося частью конуса $K(S_2)$, которая лежит левее $\mathcal{L}K_1$ и $\mathcal{L}K_3$.

Итак, начиная движение объекта с пересечения конуса K_j $(j = 1)$, мы построили две траектории: $\mathcal{T}_1$ в первом варианте и $\mathcal{T}'_1$ — во втором, которые пересекают множества $\mathcal{P}(S_i)_{\mathcal{D}_i}$ и $\mathcal{P}(S_i)_{\mathcal{D}'_i}$, соответственно. Обозначим

$$m_1 = \min\{M(S_i)_{\mathcal{D}_i} \colon i = 1, 2, 3\}, \quad m'_1 = \min\{M(S_i)_{\mathcal{D}'_i} \colon i = 1, 2, 3\}. \tag{4}$$

Множества $\mathcal{P}(S_i)_{\mathcal{D}_i}$, $\mathcal{P}(S_i)_{\mathcal{D}'_i}$ зависят от номера $j = 1$, обозначим их через

$$\mathcal{P}_j(S_i)_{\mathcal{D}_i}, \qquad \mathcal{P}_j(S_i)_{\mathcal{D}'_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Начиная движение с конуса K_j $(j = 2, 3)$, аналогично построим траектории $\mathcal{T}_j,\ \mathcal{T}_j'$ и получим величины $m_j,\ m_j'$ $(j = 2, 3)$ и множества (5) при $j = 2, 3$. Приведенные рассуждения остаются в силе независимо от четности пар $\{S_i, S_k\}$ $(i \neq k)$. Следовательно, имеет место

Теорема 1. *Если тройка* $\mathbb{S} = \{S_i\}_1^3$ *наблюдателей такова, что* $\bigcap_1^3 K_Y(S_i) \neq \varnothing$, *то*

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \max\{m_j,\ m_j' :\ j = 1, 2, 3\}. \tag{6}$$

Траектория $\mathcal{T}$ *является оптимальной в задаче* (1), *если и только если она содержится в множестве*

$$Y \backslash \Big(\bigcup_{i=1}^{3} \Big(K(S_i) \bigcap \overset{\circ}{V}_{\mathbb{M}} (S_i) \Big) \Big).$$

Эта траектория пересекается с множествами (5) *для* j, *доставляющих максимум* (6) *и номеров* $i = i(j)$, *для которых достигается минимум* (4).

3. Общий случай

Рассмотренная в п. 2.2 задача сводится к экстремальной задаче на орграфе. Вершины графа — боксы, его ребра — фрагменты траектории оптимального пересечения конусов $K(S_i)$, которые строятся посредством леммы, “длина” ребра (вес) — величина $M(S_i)$. Задача на графе состоит в поиске маршрута T, максимизирующего минимум длин (весов) составляющих этот маршрут ребер. Диаграмма графа изображена на рис. 2, где используются сокращения $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}K_i,\ \mathcal{R}_i = \mathcal{R}K_i$.

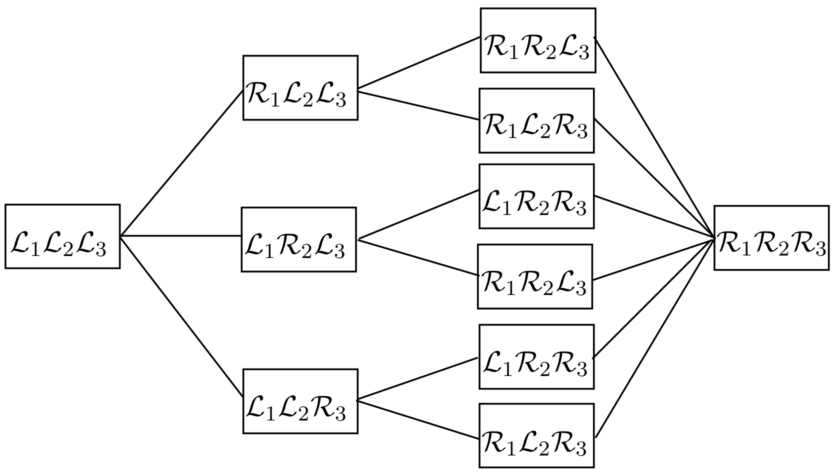

Рис. 2

Пусть $\mathbb{S} = \{S_i\}$ — заданный набор наблюдателей,

$[\mathcal{L}]$ — начальный бокс — множество точек $x \in Y$, расположенных слева от $\mathcal{L}K(S)$ для любого $S \in \mathbb{S},\ t_* \in [\mathcal{L}]$;

$[\mathcal{R}]$ — конечный бокс — множество точек $x \in Y$, расположенных справа от $\mathcal{R}K(S)$ для всех $S \in \mathbb{S},\ t^* \in [\mathcal{R}]$.

Опишем алгоритм построения оптимального маршрута, соединяющего $[\mathcal{L}]$ с $[\mathcal{R}]$. Объект пересекает каждый конус K_i один раз, не пересекаясь в это время с другими конусами, при этом движение осуществляется в направлении от $\mathcal{L}K_i$ к $\mathcal{R}K_i$ и определяются величина $M(S_i)_{\mathcal{D}_i}$ и множество $\mathcal{P}(S_i)_{\mathcal{D}_i}$. Объект не обязан посещать каждый бокс. Число исходящих из бокса ребер зависит от кратности покрытия коридора Y конусами $K(S)$ и номера шага. Оно равно числу конусов K_i, для которых $\mathcal{L}K_i$ пересекается с границей бокса. Набор $\mathbb{S}$ однозначно определяет орграф $\mathbb{G} = \mathbb{G}(\mathbb{S})$. Каждому ребру соответствует пучок траекторий оптимального пересечения конуса. Обозначим через $\mathbf{T} = \{T\}$ множество маршрутов этого графа. Для каждого маршрута $T \in \mathbf{T}$ найдем $\min_i M(S_i)_{\mathcal{D}_i}$

$$M(T) = \min_i M(S_i)_{\mathcal{D}_i} \tag{7}$$

и затем определим

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathbb{G}) = \max\{M(T) : \ T \in \mathbf{T}\}. \tag{8}$$

Имеет место

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \mathbb{M}(\mathbb{G}).$$

Траектория $\mathcal{T}$ является оптимальной тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T} \subset Y \backslash \Big(\bigcup K(S_i) \bigcap \overset{\circ}{V}_{\mathbb{M}} (S_i) \Big).$$

Оптимальная траектория $\mathcal{T}$ пересекается с множеством $\mathcal{P}(S_i)_{\mathcal{D}_i}$ для номеров i, доставляющих минимум в (7)*, для тех маршрутов T, на которых реализуется максимум в* (8)*.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Наблюдатели и движущийся объект в $\mathbb{R}^3$ // Докл. АН. 2017. Т. 476, № 5. С. 506–508.
2. **Бердышев В.И.** Наиболее скрытая траектория в $\mathbb{R}^3$ // Proc. of the 48th International Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. Екатеринбург, 2017. Vol. 1894. P. 123–128. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1894/vis2.pdf .

Бердышев Виталий Иванович
академик РАН
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 17.04.2018

REFERENCES

1. Berdyshev V.I. Observers and a moving object in $\mathbb{R}^3$. *Dokl. Math.*, 2017, Vol. 96, no. 2, pp. 538–540. doi: 10.1134/S1064562417050246 .
2. Berdyshev V.I. The most concealed $\mathbb{R}^3$-trajectory. *Proc. of the 48th International Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”*, Ekaterinburg, 2017, vol. 1894, pp. 123–128 (in Russian). At available: http://ceur-ws.org/Vol-1894/vis2.pdf .

The paper was received by the Editorial Office on April 17, 2018.

Vitalii Ivanovich Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: bvi@imm.uran.ru .