ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 517.583

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СИНУСА

А. А. Соловьев, С. В. Репьевский

Основным результатом работы является весовая оценка остаточного члена $U_n(v,k)(1-k^2)^{n+1}$ разложения эллиптического синуса $z=\mathrm{sn}(v;k^2)$ по степеням k^2-1 в промежутке $[0,1)$. Доказывается, что

$$|(\cosh v)^2 U_n(v,k)(1-k^2)^{n+1}| \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-k^2)^{n+1}}{(1-z)^{n+1}}\ (z\in[0,1),\ k\in[0,1)),$$

где const не зависит от z и k. Одновременно предлагается алгоритм нахождения членов асимптотического разложения эллиптического синуса. Формально коэффициенты разложения функции $z=\mathrm{sn}(v;k^2)$ в ряд по степеням k^2-1 могут быть получены по следующей схеме. Рассматривается эллиптический интеграл Лежандра I рода в форме Якоби $v=u(z,k^2)$ $(z\in[0,1),\ k\in[0,1))$ и вводится вспомогательная функция $v^{(0)}=u(z,1)$. На первом шаге функция $z=\tanh v^{(0)}$ разлагается в ряд по степеням $v-v^{(0)}$. Затем разность $v-v^{(0)}=u(z,k^2)-u(z,1)$ представляется рядом Тейлора по степеням k^2-1 и подставляется в разложение функции $z=\tanh v^{(0)}$. В коэффициентах разложения при степенях k^2-1 переменная z заменяется на $\tanh v^{(0)}$, которая разлагается по степеням $v-v^{(0)}$. Далее, шаги повторяются. Эта процедура позволяет находить все коэффициенты асимптотического разложения эллиптического синуса $z=\mathrm{sn}(v;k^2)$ при $k\to 1$, но связана она с большими вычислительными трудностями. Предложенный же в работе алгоритм основан на выделении слагаемых в разложении, вносящих вклад в остаточный член, и оценки таких слагаемых.

Ключевые слова: эллиптический синус, асимптотическое разложение, гиперболические функции.

A. A. Solov'ev, S. V. Rep'evskii. An estimate for the remainder in the expansion of the elliptic sine.

The main result of the paper is a weighted estimate for the remainder $U_n(v,k)(1-k^2)^{n+1}$ of the asymptotic expansion of the elliptic sine $z=\mathrm{sn}(v;k^2)$ in powers of k^2-1 in the interval $[0,1)$. We show that

$$|(\cosh v)^2 U_n(v,k)(1-k^2)^{n+1}| \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-k^2)^{n+1}}{(1-z)^{n+1}}\ (z\in[0,1),\ k\in[0,1)),$$

where the constant is independent of z and k. We also propose an algorithm for finding the terms of the expansion. The coefficients of the expansion can be formally obtained by the following scheme. We consider the Legendre elliptic integral of the first kind in the Jacobi form $v=u(z,k^2)$ $(z\in[0,1),\ k\in[0,1))$ and introduce an auxiliary function $v^{(0)}=u(z,1)$. At the first step, the function $z=\tanh v^{(0)}$ is expanded in a series in powers of $v-v^{(0)}$. Then we represent the difference $v-v^{(0)}=u(z,k^2)-u(z,1)$ as the Taylor series in powers of k^2-1 and substitute it into the expansion of the function $z=\tanh v^{(0)}$. In the coefficients of the expansion in powers of k^2-1, the variable z is replaced by the value $\tanh v^{(0)}$, which is expanded in powers of $v-v^{(0)}$. Next, the steps are repeated. Using this procedure, we can find all the coefficients of the asymptotic expansion of the elliptic sine $z=\mathrm{sn}(v;k^2)$ as $k\to 1$, although the procedure involves significant computational difficulties. The algorithm proposed in this paper is based on finding terms of the expansion that contribute to the remainder and estimating them.

Keywords: elliptic sine, asymptotic expansion, hyperbolic functions.

MSC: 33E05, 41A80

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-256-265

1. Введение

В задачах математической физики часто встречаются функции, обратные к интегралам, зависящим от параметров. Случаи, когда такие интегралы удается обратить — крайне редки. При изучении обратных функций вблизи критических значений параметра приходится прибегать к их разложению по формуле Тейлора. Вычисление коэффициентов разложения по параметру в окрестности таких точек является весьма трудоемкой задачей. Не менее трудной является задача оценивания остаточного члена разложения. Одной из таких функций является эллиптический синус.

В справочнике по специальным функциям [1] выписаны только два первых члена разложения эллиптического синуса. С помощью пакета прикладных вычислений Mathematica можно найти несколько первых членов разложения без указания способа получения. Вопрос об алгоритме построения последующих членов разложения и оценки остаточного члена разложения оставался открытым. В данной работе возможности пакета Mathematica не использовались.

Эллиптический интеграл Лежандра I-го рода в форме Якоби

$$v = u(z, k^2) = \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \quad (0 \leqslant k < 1, \quad 0 \leqslant z < 1)$$

устанавливает гомеоморфизм отрезков $[0,1]$ и $[0,K]$, где

$$K = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}.$$

Обратная функция является сужением эллиптического синуса $z = \mathrm{sn}(v, k^2)$ на отрезке $[0,K]$.

В данной работе предлагается способ последовательного вычисления коэффициентов асимптотического разложения

$$\mathrm{sn}(v, k^2) = \sum_{m=0}^{n} v_m(z)(k^2-1)^m + U_n(v, k^2)(k^2-1)^{n+1} \quad (k \to 1, \quad z \in [0,1])$$

по степеням $(k^2 - 1)$ и дается оценка остаточного члена.

Подробное изложение теории эллиптических функций может быть найдено в книгах [2; 3].

Другой подход к изучению разложения эллиптического синуса предложен в работе [4], в которой рассматривается метод построения комбинированного асимптотического приближения, равномерного на большей части периода эллиптического синуса.

2. Вспомогательные утверждения

Прежде чем сформулировать основной результат, докажем несколько вспомогательных утверждений. Положим $\tau = k^2$ и введем разложение функции $v = u(z, \tau)$ по степеням $(\tau - 1)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$v = u(z;\tau) = u(z;1) + \partial_\tau u(z;1)(\tau-1) + \frac{1}{2}\partial_\tau^2 u(z;1)(\tau-1)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!}\partial_\tau^n u(z;1)(\tau-1)^n + R_n(z,\tau)(\tau-1)^{n+1} \quad (\tau \in [0,1), \quad z \in [0,1))\,. \tag{2.1}$$

Через const будем обозначать константы, не зависящие от переменных z и τ.

Лемма 1. *Остаточный член $R_r(z,\tau)(\tau-1)^{r+1}$, $r = 1, 2, \ldots$, разложения функции $v = u(z, \tau)$ имеет оценку*

$$\left|R_r(z,\tau)(\tau-1)^{r+1}\right| \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-\tau)^{r+1}}{(1-z)^{r+1}}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$(\partial_\tau u)(z;\tau) = \mathrm{const}\int\limits_0^z \frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)}(1-\tau t^2)^{3/2}} \leqslant \mathrm{const}\int\limits_0^z \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2} \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{1-z}\,.$$

Так как

$$R_r(z,\tau) = \partial_\tau^{r+1}\int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tau t^2}}\,\Bigg|_{\tau=\xi}, \quad \text{где} \quad \tau < \xi < 1,$$

и

$$\partial_\tau^{r+1}(1-\tau t^2)^{-1/2} = \frac{(2r+1)!!}{2^{r+1}} t^{2(r+1)}(1-\tau t^2)^{-\frac{2r+3}{2}},$$

имеем

$$|R_r(z,\tau)| \leqslant \frac{(2r+1)!!}{2^{r+1}}\int\limits_0^z \frac{t^{2(r+1)}}{\sqrt{(1-t^2)}(1-t^2)^{\frac{2r+3}{2}}}dt$$

$$\leqslant \frac{(2r+1)!!}{2^{r+1}}\int\limits_0^z \frac{t}{(1-t^2)^{r+2}}dt \leqslant \frac{(2r+1)!!}{2^{r+1}}\frac{1}{2(r+1)}\frac{1}{(1-z)^{r+1}}.$$

Отсюда получаем нужную оценку

$$|R_r(z,\tau)(1-\tau)^{r+1}| \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-\tau)^{r+1}}{(1-z)^{r+1}}.$$

Положим $v^{(0)} = u(z;1)$. Разложим функцию $z = \tanh v^{(0)}$ в ряд Тейлора по степеням $(v^{(0)} - v)$:

$$z = \tanh v^{(0)} = \tanh v + \partial_v \tanh v\,(v^{(0)}-v) + \frac{1}{2!}\partial \tanh v\,(v^{(0)}-v)^2 + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!}\partial_v^n \tanh v\,(v^{(0)}-v)^n + T_n(v^{(0)},v)(v^{(0)}-v)^{n+1} \quad (v\to v^{(0)}, \quad v<+\infty). \tag{2.2}$$

где $T_n(v^{(0)},v)(v^{(0)}-v)^{n+1}$ — остаточный член в интегральной форме, равный

$$\frac{1}{n!}\int\limits_v^{v^{(0)}} (v^{(0)}-\nu)^n(\partial_\nu^{n+1}\tanh\nu)d\nu.$$

В следующих трех леммах используются выше введенные обозначения.

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$|v^{(0)}-v| = |u(z,1)-u(z,\tau)| \leqslant \mathrm{const}\frac{1-\tau}{1-z} \quad (\tau\in[0,1), \quad z\in[0,1)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы следует из цепочки соотношений

$$\frac{v^{(0)}-v}{1-\tau} = -\frac{1}{1-\tau}\int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\tau t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\Big) = \mathrm{const}\frac{1}{1-\tau}\int\limits_0^z dt\int\limits_\tau^1 \frac{t^2 d\nu}{\sqrt{1-t^2}\big(\sqrt{1-\nu t^2}\big)^3}$$

$$= \mathrm{const}\frac{1}{1-\tau}\int\limits_\tau^1 d\nu\int\limits_0^z \frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}\big(\sqrt{1-\nu t^2}\big)^3} \leqslant \int\limits_0^z \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2} = \frac{\alpha(z)}{1-z},$$

где $\alpha(z)$ — ограниченная функция.

Лемма 3. *Для остаточного члена разложения* $z = \tanh v^{(0)}$ *по степеням* $(v^{(0)}-v)$ (*см.* (2.2)) *верна оценка*

$$|T_n(v^{(0)},v)|(\cosh v)^2(v^{(0)}-v)^{n+1} \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-\tau)^{n+1}}{(1-z)^{n+1}} \quad (\tau\in[0,1), \quad z\in[0,1)),$$

где const *зависит от* n, *но не зависит от* τ *и* z.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$|T_n(v^{(0)},v)| \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{(v^{(0)}-v)^{n+1}}\int\limits_v^{v^{(0)}}(v^{(0)}-\nu)^n|\partial_v^{n+1}\tanh\nu|d\nu$$

$$= \mathrm{const}\frac{1}{(v^{(0)}-v)^{n+1}}\int\limits_v^{v^{(0)}}(v^{(0)}-\nu)^n\frac{|P(\tanh\nu)|}{\cosh^2\nu}d\nu \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 v}\,,$$

где $P(t)$ — многочлен степени n. Из леммы 2 следует теперь требуемая оценка

$$|T_n(v^{(0)},v)|(v^{(0)}-v)^{n+1} \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 v}\frac{(1-\tau)^{n+1}}{(1-z)^{n+1}}.$$

Следующая лемма потребуется при оценке отдельных слагаемых разложения эллиптического синуса $\mathrm{sn}(v,k^2)$.

Лемма 4. *Имеет место неравенство*

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial v^p}(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1)(1-\tau)^m(v^0-v)^p\right| \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-\tau)^{p+m}}{(1-z)^{p+m}} \quad (\tau\in[0,1),\quad z\in[0,1)).$$

Здесь константа const *зависит от p и m и не зависит от τ и z.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что

$$(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1) = \mathrm{const}\int\limits_0^{\tanh v}\frac{t^{2m}dt}{(1-t^2)^{m+1}} \leqslant \mathrm{const}\int\limits_0^{\tanh v}\frac{tdt}{(1-t^2)^{m+1}}$$

$$\leqslant \mathrm{const}\int\limits_0^{\tanh v}d\frac{1}{(1-t^2)^m} \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{(1-\tanh^2 v)^m} \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{(1-z)^m},$$

так как

$$v = u(z;\tau) = \int\limits_0^z\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tau t^2}} \leqslant \int\limits_0^z\frac{dt}{1-t^2} = v^0 \text{ и } z = \tanh v^0\,.$$

Далее, дифференцируя по переменной v два раза функцию $(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1)$, получим

$$\frac{\partial}{\partial v}(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1) = \mathrm{const}\frac{(\tanh v)^{2m}}{(1-\tanh^2 v)^{m+1}}\frac{1}{\cosh^2 v} = \mathrm{const}\frac{(\tanh v)^{2m}}{(1-\tanh^2 v)^m} = \mathrm{const}\sinh^{2m}v\,, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1) = \mathrm{const}\frac{\partial}{\partial v}\sinh^{2m}v$$

$$= \mathrm{const}\sinh^{2m-2}v\tanh v(1+\sinh^2 v) = \mathrm{const}(\sinh^{2m}v+\sinh^{2m-2}v)\tanh v\,. \tag{2.4}$$

Непосредственно убеждаемся, что

$$\left[Q_m(\sinh^2 v)P_k(\tanh v)\right]'_v = \tilde{Q}_m(\sinh^2 v)P_{k+1}(\tanh v) + Q_m(\sinh^2 v)\tilde{P}_k(\tanh v)\,. \tag{2.5}$$

Здесь P_k, $\tilde{P}_k$, Q_m и $\tilde{Q}_m$ — многочлены степени k и m соответственно с постоянными коэффициентами. Из (2.3)–(2.5) следует, что

$$\frac{\partial^p}{\partial v^p}(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1) = \mathrm{const}\frac{\partial^{p-1}}{\partial v^{p-1}}\sinh^{2m}v \leqslant \mathrm{const}\sinh^{2m}v + O\big(\sinh^{2m-2}v\big) \leqslant \mathrm{const}\frac{z^{2m}}{(1-z^2)^m}\,. \tag{2.6}$$

Окончательно получаем

$$\Big|\frac{\partial^p}{\partial v^p}(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1)(\tau-1)^m\Big| = \mathrm{const}\,\Big|\frac{\partial^{p-1}}{\partial v^{p-1}}\sinh^{2m} v(1-\tau)^m\Big|$$

$$\leqslant \mathrm{const}\frac{(1-\tau)^m}{(1-z^2)^m} \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-\tau)^m}{(1-z)^m},\quad p\geqslant 1\,.$$

Производную $(\partial_\tau^m u)(z;1)$ разложим по степеням $(v^{(0)}-v)$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$(\partial_\tau^m u)(z;1) = (\partial_\tau^m u)(\tanh v^0;1) = (\partial_\tau^m u)(\tanh v;1) + \frac{\partial}{\partial v}(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1)(v^{(0)}-v)$$

$$+\ldots+\frac{1}{r!}\frac{\partial^r}{\partial v^r}(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1)(v^{(0)}-v)^r + S_r^m(v,\tau)(v^{(0)}-v)^{r+1}\quad (v\to v^{(0)},\quad \tau\in[0,1))\,. \tag{2.7}$$

Лемма 5. *Для остаточного члена $S_r^m(v,\tau)$ верна оценка*

$$|S_r^m(v,\tau)| \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{(1-z)^m}\,,\quad v<\eta<v^{(0)}\,.$$

Учитывая, что $S_r^m(v,\tau)=\frac{\partial^r}{\partial v^r}(\partial^m u)(\tanh v;1)\Big|_{v=\eta}$, где $\eta\in(v,v^{(0)})$, утверждение леммы следует из неравенства (2.6).

3. Оценка остаточного члена разложения эллиптического синуса

Как будет видно в дальнейшем, с точностью до множителя кратного $(\partial_v^k \tanh v)$ слагаемые асимптотического разложения эллиптического синуса при $\tau\to 0$ имеют вид

$$\Big(\frac{\partial}{\partial v}\Big)^p(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1)(v^0-v)^{p+r}(\tau-1)^m\,.$$

Будем называть их (p,r,m)-слагаемыми. Сумму $p+r+m$ будем называть порядком слагаемого. Для (p,r,m)-слагаемых верна оценка

$$\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial v}\Big)^p(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1)(v^0-v)^{p+r}(1-\tau)^m\Big| \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-\tau)^{p+m+r}}{(1-z)^{p+m+r}},\quad p\geqslant 1.$$

Число, равное $p+m$, является порядком $(p,0,m)$-слагаемого.

Из разложения (2.7) следует, что при $p<n$ верно равенство

$$\Big(\frac{\partial}{\partial v}\Big)^p(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1)(v^0-v)^{p+r}(\tau-1)^m+\ldots+\Big(\frac{\partial}{\partial v}\Big)^{n-1}(\partial_\tau^m u)(\tanh v;1)(v^0-v)^{n+r-1}(\tau-1)^m$$

$$+S_{n-1}^m(v,\tau)(v^0-v)^{n+r}(\tau-1)^m = S_{p-1}^m(v,\tau)(v^0-v)^{p+r}(\tau-1)^m.$$

Поэтому левую часть этого выражения в последующих вычислениях будем заменять на $S_{p-1}^m(v,\tau)(v^0-v)^{p+r}(\tau-1)^m$. Для остаточных членов вида $S_{p-1}^m(v,\tau)(v^0-v)^{p+r}(\tau-1)^m$ согласно леммам 5 и 2 верна оценка

$$\Big|S_{p-1}^m(v,\tau)(v^0-v)^{p+r}(\tau-1)^m\Big| \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-\tau)^{p+r+m}}{(1-z)^{p+r+m}}\,.$$

Так, например, сумму $\Big(\frac{\partial}{\partial v}\Big)^2\partial_\tau u(\tanh v;1)(v^0-v)^3(\tau-1)^1+S_3^1(v,\tau)(v^0-v)^4(\tau-1)^1$ можно заменить выражением $S_2^1(v,\tau)(v^0-v)^3(\tau-1)$, для которого справедливо неравенство

$$\Big|S_2^1(v,\tau)(v^0-v)^3(\tau-1)\Big| \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-\tau)^4}{(1-z)^4}\,.$$

Следующая теорема является основным результатом работы. В ходе доказательства теоремы предлагается метод нахождения членов асимптотического разложения эллиптического синуса.

Теорема. *Для остаточного члена* $U_n(v,\tau)(1-\tau)^{n+1}$ *разложения эллиптического синуса по степеням* $1-\tau$ *имеет место весовая оценка*

$$(\cosh v)^2|U_n(v,\tau)|(1-\tau)^{n+1} \leqslant \mathrm{const}\frac{(1-\tau)^{n+1}}{(1-z)^{n+1}} \quad (z\in[0,1), \quad \tau\in[0,1)).$$

Константа const *не зависит от* τ *и* z.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложение в ряд Тейлора функции $\tanh v^{(0)}$ по степеням $v^{(0)}-v$ представим в виде

$$z=\tanh v^{(0)}=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}(\partial_v^r\tanh v)(v^{(0)}-v)^r+T_n(v,v^{(0)})(v^{(0)}-v)^{n+1}$$

$$=\tanh v+\Big(\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}(\partial_v^r\tanh v)(v^{(0)}-v)^{r-1}+T_n(v,v^{(0)})(v^{(0)}-v)^n\Big)(v^{(0)}-v)\,.$$

Заменим множитель $(v^{(0)}-v)$ разложением (2.1). Получим

$$z=\tanh v-\Big[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(\partial_v^k\tanh v)(v^{(0)}-v)^{k-1}+T_n(v,v^{(0)})(v^{(0)}-v)^n\Big](\partial_\tau u)(z;1)(\tau-1)$$

$$-\ldots-\Big[\sum_{k=1}^{n-r}\frac{1}{k!}(\partial_v^k\tanh v)(v^{(0)}-v)^{k-1}+T_{n-r}(v^{(0)},v)(v^{(0)}-v)^{n-r}\Big]$$

$$\times\frac{1}{(r+1)!}(\partial_\tau^{r+1}u)(z;1)(\tau-1)^{r+1}-\ldots-\Big[(\partial_v\tanh v)+\frac{1}{2!}(\partial_v^2\tanh v)(v^{(0)}-v)+T_2(v^{(0)},v)(v^{0)}-v)^2\Big]$$

$$\times\frac{1}{(n-1)!}(\partial_\tau^{n-1}u)(z;1)(\tau-1)^{n-1}-\Big[(\partial_v\tanh v)+T_1(v^{(0)},v)(v^{0)}-v)\Big]$$

$$\times\Big[\frac{1}{n!}(\partial_\tau^n u)(z;1)(\tau-1)^n+R_n(z,\tau)(\tau-1)^n\Big]\,.$$

Согласно леммам 1, 3 и 4, имеем

$$\big|R_n(z,\tau)(\tau-1)^{n+1}\big|\leqslant\mathrm{const}\frac{(1-\tau)^{n+1}}{(1-z)^{n+1}};\quad\big|(\partial_\tau^{r+1}u)(z;1)(\tau-1)^{r+1}\big|\leqslant\mathrm{const}\frac{(1-\tau)^{r+1}}{(1-z)^{r+1}};$$

$$\big|T_{n-r}(v,\tau)(v^{(0)}-v)^{n-r}\big|\leqslant\mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 v}\frac{(1-\tau)^{n-r}}{(1-z)^{n-r}},\quad r=0,\ldots,n-1\,.$$

Поэтому верны оценки

$$\big|T_{n-r}(v,\tau)(v^{(0)}-v)^{n-r}\partial_\tau^{r+1}u)(z;1)(\tau-1)^{r+1}\big|\leqslant\mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 v}\frac{(1-\tau)^{r+1}}{(1-z)^{r+1}}\frac{(1-\tau)^{n-r}}{(1-z)^{n-r}}$$

$$\mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 v}\frac{(1-\tau)^{n+1}}{(1-z)^{n+1}},\quad r=0,\ldots,n-2,$$

и

$$\big|T_1(v,\tau)(v^{(0)}-v)R_{n-1}(z,\tau)(\tau-1)^n\big|\leqslant\mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 v}\frac{(1-\tau)}{(1-z)}\frac{(1-\tau)^n}{(1-z)^n}=\mathrm{const}\frac{1}{\cosh^2 v}\frac{(1-\tau)^{n+1}}{(1-z)^{n+1}}\,.$$

По этой причине в дальнейшем остаточные слагаемые можно не рассматривать и остановиться только на рассмотрении выражения

$$\tanh v - \sum_{r=0}^{n-1}\Big[\sum_{k=1}^{n-r}\frac{1}{k!}(\partial_v^k \tanh v)(v^{(0)}-v)^{k-1}\Big]\frac{1}{(r+1)!}(\partial_\tau^{r+1}u)(z;1)(\tau-1)^{r+1}\,. \tag{3.8}$$

Отметим, что максимальный порядок слагаемых в этом выражении равен n. Поменяем порядок суммирования. Тогда (3.8) примет вид

$$\tanh v - \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k!}(\partial_v^k \tanh v)(v^{(0)}-v)^{k-1}\Big)\sum_{r=0}^{n-k}\frac{1}{(r+1)!}(\partial_\tau^{r+1}u)(z;1)(\tau-1)^{r+1}\,. \tag{3.9}$$

На следующем шаге производную $(\partial_\tau^m u)(z;1)$ заменим разложением по степеням $(v^{(0)}-v)$:

$$(\partial_\tau^{r+1}u)(z;1) = \sum_{p=0}^{n-r-k}\frac{1}{p!}\big(\frac{\partial}{\partial v}\big)^p(\partial_\tau^{r+1}u)(\tanh v;1)(v^{(0)}-v)^p + S_{n-r-k}^{r+1}(v,v^{(0)})(v^{(0)}-v)^{n-r-k+1}\,.$$

Тогда разложение (3.9) перепишется в виде

$$\tanh v - \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k!}(\partial_v^k \tanh v)(v^{(0)}-v)^{k-1}\Big)\sum_{r=0}^{n-k}\frac{1}{(r+1)!}$$

$$\times\Big(\sum_{p=0}^{n-r-k}\frac{1}{p!}\big(\frac{\partial}{\partial v}\big)^p(\partial_\tau^{r+1}u)(\tanh v;1)(v^{(0)}-v)^p(\tau-1)^{r+1}+S_{n-r-k}^{r+1}(v,v^{(0)})(v^{(0)}-v)^{n-r-k+1}(\tau-1)^{r+1}\Big)\,.$$

Выделим остаточные слагаемые

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k!}(\partial_v^k \tanh v)(v^{(0)}-v)^{k-1}\Big)\sum_{r=0}^{n-k}\frac{1}{(r+1)!}S_{n-r-k}^{r+1}(v,v^{(0)})(v^{(0)}-v)^{n-r-k+1}(\tau-1)^{r+1}\,.$$

Согласно лемме 2 имеем

$$|S_{n-r-k}^{r+1}(v,v^{(0)})|(v^{(0)}-v)^{n-r-k+1}(1-\tau)^{r+1} \leqslant \frac{(1-\tau)^{n-r-k+r+1+1}}{(1-z)^{n-r-k+r+1+1}} = \frac{(1-\tau)^{n-k+2}}{(1-z)^{n-k+2}}.$$

Учитывая, что $|\partial_v^k \tanh v| \leqslant \mathrm{const}\dfrac{|P_k(\tanh v)|}{\cosh^2 v} \leqslant \mathrm{const}\dfrac{1}{\cosh^2 v}$, где P_k — многочлен порядка k, выделенные слагаемые по абсолютной величине не превосходят $\mathrm{const}\dfrac{1}{\cosh^2 v}\dfrac{(1-\tau)^{n+1}}{(1-z)^{n+1}}$. Таким образом, выражение (3.9) примет вид

$$\tanh v - \sum_{k=1}^{n}\big(\frac{1}{k!}\big(\partial_v^k \tanh v\big)(v^{(0)}-v)^{k-1}\big)\sum_{r=0}^{n-k}\frac{1}{(r+1)!}$$

$$\times\sum_{p=0}^{n-r-k}\frac{1}{p!}\big(\frac{\partial}{\partial v}\big)^p\big(\partial_\tau^{r+1}u\big)(\tanh v;1)(v^{(0)}-v)^p(\tau-1)^{r+1} + V(v,\tau)(\tau-1)^{n+1}\,.$$

Здесь и далее через $V(v,\tau)(\tau-1)^{n+1}$ будем обозначать выражения, допускающие оценку $|V(v,\tau)(1-\tau)^{n+1}| \leqslant \mathrm{const}\dfrac{1}{\cosh^2 v}\dfrac{(1-\tau)^{n+1}}{(1-z)^{n+1}}$ и, значит, входящие в остаточный член. Сгруппируем теперь слагаемые при $(v^{(0)}-v)$ в нулевой степени. Остальные слагаемые объединим и множитель $(v^{(0)}-v)$ вынесем за скобку. Коэффициент при $(v^{(0)}-v)$ в нулевой степени, равный

$$\tanh v - (\partial_v \tanh v)\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(r+1)!}(\partial_\tau^{r+1}u)(\tanh v;1)(\tau-1)^{r+1},$$

является вкладом в главную часть разложения эллиптического синуса по степеням $(\tau - 1)$. Найдем подходящее представление суммы

$$\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\frac{1}{k!}\bigl(\partial_v^k \tanh v\bigr)(v^{(0)}-v)^{k-1}\Bigr)\sum_{r=0}^{n-k}\frac{1}{(r+1)!}$$

$$\times\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant n-r-k,\\ k+p>1}}\frac{1}{p!}\Bigl(\frac{\partial}{\partial v}\Bigr)^p\bigl(\partial_\tau^{r+1}u\bigr)(\tanh v;1)(v^{(0)}-v)^p(\tau-1)^{r+1}. \tag{3.10}$$

Обозначим через $a_{p,r}$ выражение $\frac{1}{p!}\Bigl(\frac{\partial}{\partial v}\Bigr)^p\bigl(\partial_\tau^{r+1}u\bigr)(\tanh v;1)$ и положим $n-k=m$. Тогда (3.10) перепишется в виде

$$\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{(n-m)!}\bigl(\partial_v^{n-m}\tanh v\bigr)\sum_{r=0}^{m}\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant m-r,\\ p+n-m>1}}\frac{(\tau-1)^{r+1}}{(r+1)!}a_{p,r}(v^{(0)}-v)^{p+n-m-1}.$$

Максимальный порядок слагаемых в этом выражении сохраняется и равен n.

Положим $N=p+n-m-1$. Нетрудно видеть, что $1\leqslant N\leqslant n-1$. Коэффициент при $(v^{(0)}-v)^N$ равен

$$\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{(n-m)!}\bigl(\partial_v^{n-m}\tanh v\bigr)\sum_{r=0}^{m}\frac{(\tau-1)^{r+1}}{(r+1)!}\sum_{\substack{0\leqslant p\leqslant m-r\\ p+n-m=N+1}}a_{p,r}.$$

Далее процедура повторяется. На каждом последующем шаге степень $(v^{(0)}-v)$ уменьшается и максимальный порядок слагаемых сохраняется и равен n. Таким образом, главная часть разложения порядка n будет найдена и нужная оценка остаточного члена будет получена.

Коэффициенты разложения при $(k^2-1)^m$ представляются в виде суммы произведений выражений вида $\frac{\partial^p}{\partial v^n}(\partial_\tau^r u)(\tanh v;1)$ и явно вычисляются. □

В качестве приложения доказанной теоремы выпишем главную часть разложения эллиптического синуса до третьего порядка включительно:

$$\begin{aligned}
&\tanh v-(\partial_v\tanh v)\Bigl[(\partial_\tau u)(\tanh v;1)(\tau-1)\\
&\quad+\frac12(\partial_\tau^2 u)(\tanh v;1)(\tau-1)^2+\frac16(\partial_\tau^3 u)(\tanh v;1)(\tau-1)^3\Bigr]\\
&+\Bigl[(\partial_v\tanh v)\frac{\partial}{\partial v}(\partial_\tau u)(\tanh v;1)(\tau-1)\Bigl((\partial_\tau u)(\tanh v;1)(\tau-1)\\
&-\frac12\frac{\partial}{\partial v}\bigl((\partial_\tau u)(\tanh v;1)\bigr)^2(\tau-1)^2+\frac12(\partial_\tau^2 u)(\tanh v;1)(\tau-1)^2\Bigr)\\
&\quad+\frac12(\partial_v\tanh v)\frac{\partial}{\partial v}(\partial_\tau^2 u)(\tanh v;1)(\partial_\tau u)(\tanh v;1)(\tau-1)^3\\
&-\frac12(\partial_v\tanh v)\frac{\partial^2}{\partial v^2}(\partial_\tau u)(\tanh v;1)\bigl((\partial_\tau u)(\tanh v;1)\bigr)^2(\tau-1)^3\Bigr]\\
&+\frac12(\partial_v^2\tanh v)(\partial_\tau u)(\tanh v;1)(\tau-1)\Bigl((\partial_\tau u)(\tanh v;1)(\tau-1)\\
&\quad-\frac{\partial}{\partial v}(\partial_\tau u)(\tanh v;1)(\partial_\tau u)(\tanh v;1)(\tau-1)^2\Bigr)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(\partial_v^2\tanh v)(\partial_\tau u)(\tanh v;1)(\partial_\tau^2 u)(\tanh v;1)(\tau-1)^3$$
$$-\frac{1}{2}(\partial_v^2\tanh v)\frac{\partial}{\partial v}(\partial_\tau u)(\tanh v;1)\big((\partial_\tau u)(\tanh v;1)\big)^2(\tau-1)^3$$
$$-\frac{1}{6}(\partial_v^3\tanh v)\big((\partial_\tau u)(\tanh v;1)\big)^3(\tau-1)^3\,,$$

где $\tau = k^2$. Можно показать, что для остаточного члена первых четырех членов разложения эллиптического синуса верна оценка

$$\left|\cosh^2 v\, U_3(v,\tau)(1-\tau)^4\right| \leqslant \frac{(1-\tau)^4}{(1-z)^4},$$

а также что в наших обозначениях для первых трех членов разложения эллиптического синуса верно соотношение

$$\lim_{z\to 1-0}\lim_{k\to 1-0} U_2(v,k^2)(1-z)^2 \neq 0\,. \tag{3.11}$$

Из (3.11) следует, что полученная для $U_2(v,k^2)$ оценка не может быть улучшена.

Главная часть для первых трех членов разложения эллиптического синуса найдена в работе [5].

Таким образом, в статье получена оценка остаточного члена разложения по степеням k^2-1 эллиптического синуса и указана схема нахождения главной части разложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abramowitz M., Stegun I. A.** Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Washington, D.C. 20402 : National Bureau of Standards, 1972. 1046 p. ISBN: 0-486-61272-4 .
2. **Ахиезер Н.И.** Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
3. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. Том 1. М.: Наука, 1967. 486 с.
4. **Kiselev O. M.** Uniform asymptotic behaviour of Jacobi-sn near a singular point. The Lost formula from handbooks for elliptic functions [e-resource]. 2015. 9 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1510.06602.pdf .
5. **Красильников А.В.** Об асимптотике эллиптического синуса // Челяб. физ.-мат. журн. 2017. Т. 2, № 2. С. 169–180.

Соловьев Александр Артёмович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой компьютерной безопасности и прикладной алгебры
Челябинский государственный университет,
г. Челябинск
e-mail: alsol@csu.ru

Поступила 10.01.2018

Репьевский Сергей Владимирович
ассистент кафедры вычислительной математики
Челябинский государственный университет,
г. Челябинск
e-mail: repyevsky@gmail.com

REFERENCES

1. Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* Washington, D.C. 20402: National Bureau of Standards, 1972, 1046 p. ISBN: 0-486-61272-4 .
2. Akhiezer N.I. *Elements of the theory of elliptic functions.* Providence: Amer. Math. Soc., 1990, Thrans. Math. Monographs, vol. 79, 237 p. ISBN: 0-8218-4532-2 . Original Russian text published in Akhiezer N.I. *Elementy teorii ellipticheskikh funktsii*, Moscow: Nauka Publ., 1970, 304 p.

3. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskikh funktsiy. T. 1.* [The theory of analytic functions. Vol. 1.] Moscow: Nauka Publ., 1967, 486 p. ISBN(3rd ed.): 978-5-8114-0928-0 .
4. Kiselev O. M. Uniform asymptotic behaviour of Jacobi-sn near a singular point. The Lost formula from handbooks for elliptic functions [e-resource]. 2015. 9 p.
Available at: URL: https://arxiv.org/pdf/1510.06602.pdf .
5. Krasilnikov A.V. On asymptotics of elliptic sine. *Chelyabinsk Physical Math. J.*, 2017, vol. 2, no. 2, pp. 169–180 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on January 18, 2018.

Aleksandr Artemovich Solov'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: alsol@csu.ru .

Sergei Vladimirovich Rep'evskii, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia,
e-mail: repyevsky@gmail.com .