ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 519.214

О РЯДАХ ГИЛЬБЕРТА — ПУАНКАРЕ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ ДВУМЯ НИЛЬЭЛЕМЕНТАМИ[1]

А. И. Созутов, Г. П. Егорычев, И. О. Александрова

В работе вычисляются коэффициенты ряда Гильберта — Пуанкаре $H_A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ градуированной ассоциативной алгебры $A = \langle\langle x, y | x^m, y^n \rangle\rangle$ с единицей (теоремы 1 и 2). Других соотношений на алгебру не накладывается. Задача заключается в комбинаторной проблеме нахождения компактных формул (и асимптотики) числа ассоциативных слов фиксированной длины в алфавите $\{x, y\}$, не содержащих подслов x^m и y^n. В работе с реккурентными соотношениями, производящими функциями и комбинаторными суммами используются как операции над степенными рядами (одного переменного), так и элементы теории вычетов комплексных переменных. Эти методы могут послужить дополнением к теореме Голода — Шафаревича, применение которой при $d = 2$ и $m, n \leq 9$ невозможно. В связи с группами Алешина, Григорчука, Гупты, особое внимание в работе уделено малым значениям $m, n \leq 4$. Найдена асимптотика коэффициентов a_k. Проведено сравнение коэффициентов a_k с коэффицинтами ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, обратного к многочлену $1 - 2t + t^m + t^n$. Указаны случаи отрицательных коэффициентов c_k и неравенств $c_k > a_k$, что в теореме Голода — Шафаревича исключается ее условиями. Однако сложность полученных формул пока не позволяет находить дополнительные соотношения, достаточные для получения бесконечномерных нильалгебр.

Ключевые слова: ассоциативная нильалгебра, ряд Гильберта — Пуанкаре.

A. I. Sozutov, G. P. Egorychev, I. O. Aleksandrova. On Hilbert–Poincare series of associative nilalgebras generated by two nilelements.

The coefficients of the Hilbert–Poincare series $H_A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ of a graded associative algebra $A = \langle\langle x, y | x^m, y^n \rangle\rangle$ with unit are calculated (Theorems 1 and 2). There are no other constraints on the algebra. The problem is the combinatorial search for compact formulas (and asymptotics) for the number of associative words of fixed length in the alphabet $\{x, y\}$ not containing the subwords x^m and y^n. Working with recurrence relations, generating functions, and combinatorial sums, we use operations with power series (of one variable) and elements of the theory of residues for complex variables. These methods supplement the Golod–Shafarevich theorem, which is inapplicable for $d = 2$ and $m, n \leq 9$. In connection with Aleshin, Grigorchuk, and Gupta groups, we pay a special attention to the small values $m, n \leq 4$. An asymptotic expansion of the coefficients a_k is found, and a_k are compared with the coefficients of the series $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, which is the inverse of the polynomial $1-2t+t^m+t^n$. We also consider the cases of negative coefficients c_k and inequalities $c_k > a_k$, which are excluded by the conditions of the Golod–Shafarevich theorem. However, additional relations sufficient for obtaining infinite-dimensional nilalgebras cannot be found yet because the obtained formulas are rather cumbersome.

Keywords: associative nilalgebra, Hilbert–Poincare series.

MSC: 16W50, 16Z99

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-243-255

Введение

В работе исследуются ассоциативные алгебры $A = \langle\langle x, y | x^m, y^n \rangle\rangle$ с порождающими x, y и соотношениями $x^m = y^n = 0$ и вычисляются коэффициенты рядов Гильберта — Пуанкаре $H_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ алгебр $A = \langle\langle x, y | x^m, y^n \rangle\rangle$.

В [2;3] найдены конкретные системы неравенств (0.1), при выполнении которых алгебра A, порожденная d элементами, бесконечномерна:

$$r_n \leq \frac{(d-1)^2}{4}; \quad r_n \leq \epsilon^2 (d - 2\epsilon)^{n-2}, \quad 0 < \epsilon < \frac{d-1}{2}, \tag{0.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-04987 а).

где r_n — число многочленов степени n в последовательности порождающих алгебру многочленов.

Очевидно, что при $d = 2$ неравенства $r_n \leq (d-1)^2/4$ неприменимы, а система неравенств $1 \leq r_n \leq \epsilon^2(d-2\epsilon)^{n-2}$ допускает значения $r_n \geq 1$ только при $n \geq 9$ [5]. В то же время известные группы Алешина [5;6], Григорчука [5;7], Гупты [8] порождены элементами порядков не более 4, и для них построение нильалгебр с помощью неравенств (0.1) невозможно. Авторам также неизвестно, вложимы ли эти группы в присоединенные группы подходящих нильалгебр.

Так, например, 2*-группа Алешина* [5; 6] *порождена двумя элементами* a, b, $|a| = 2$, $|b| = 4$, *но уже в ряде* $(1 - 2t + t^2 + t^4)^{-1}$ *бесконечно много отрицательных коэффициентов и неравенства* (0.1) *неприменимы. Однако алгебра* $A = \langle\langle x, y | x^2, y^4\rangle\rangle$ *бесконечномерна и в* § 3 *работы дается прямое вычисление ее ряда Гильберта — Пуанкаре.*

С другой стороны, как показано в [11–13], ряд вопросов о строении нелокально конечных финитно-аппроксимируемых и локально ступенчатых p-групп (см., например, вопросы 8.67, 9.76, 11.56 из Коуровской тетради [10]) достаточно решить для групп с двумя порождающими, при этом многое зависит от строения их двупорожденных подгрупп.

1. Алгебры с двумя соотношениями

Один из основных способов задания алгебр состоит в описании их с помощью образующих и определяющих соотношений [1]. В работе изучается ассоциативная алгебра $A = \Phi(x,\ y|\ x^m = y^n = 0)$ над полем Φ, заданная образующими $x,\ y$ и двумя соотношениями $x^m = 0$, $y^n = 0$, где m, n — натуральные числа и $2 \leq m \leq n$.

Напомним определения и известные факты [2–4]. Пусть $R = \Phi(x, y)$ — ассоциативная алгебра многочленов над полем Φ от неперестановочных переменных x, y. Как известно, алгебра R свободна и *градуирована*, т. е. разлагается в прямую сумму $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \ldots$ подпространств R_n с $R_iR_j \subseteq R_{i+j}$, где $R_0 \simeq \Phi$ и R_n — подпространство размерности 2^n с базисом из мономов $x_1 \ldots x_n$, где $x_1,\ \ldots,\ x_n \in \{x,\ y\}$. Многочлены из R_n называются *однородными* степени n. Идеал J алгебры R называется *однородным*, если он порождается однородными многочленами, в рассматриваемом случае идеал J однороден, поскольку порождается мономами x^m, y^n. Как известно, однородный идеал вместе с каждым своим многочленом содержит все его однородные компоненты. В частности, идеал J наследует градуировку алгебры R, т. е.

$$J = J_m \oplus J_{m+1} \oplus \ldots, \quad \text{где} \quad J_s = R_s \cap J \quad \text{и} \quad J_sJ_r \subseteq J_{s+r}. \tag{1.1}$$

Подпространство $R^{(k)} = R_k \oplus R_{k+1} \oplus \ldots$ является подалгеброй в R при любом натуральном k и понятно, что алгебра A изоморфна фактор-алгебре $R^{(1)}/J$. Она также наследует градуировку $R = \Phi(x,\ y)$, и, положив $A_0 = R_0 \simeq \Phi$, получим

$$A_0 \oplus A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots, \quad \text{где} \quad A_k = (R_k + J)/J \simeq R_k/(R_k \cap J) \quad \text{и} \quad A_iA_j \subseteq A_{i+j}.$$

Формальный степенной ряд (*производящая функция*) [9]

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad \text{где} \quad a_k = \dim A_k,$$

называется *рядом Гильберта — Пуанкаре* алгебры A и обозначается $H_A(t)$. Аналогично, разложению (1.1) соответствует ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad \text{где} \quad b_k = \dim J_k = 2^k - a_k \quad \text{и} \quad b_0 = b_1 = \ldots = b_{m-1} = 0.$$

Известные результаты Голода — Шафаревича [5; 6] (см. также [2–4]) на языке производящих функций дают ответ на следующий естественный вопрос: сколько можно накладывать однородных соотношений данной степени, чтобы алгебра оставалась бесконечномерной независимо от вида соотношений. В [6] были построены первые примеры конечнопорожденных бесконечномерных нильалгебр и конечнопорожденных бесконечных периодических групп и тем самым даны ответы на известные проблемы теории колец и теории групп. Основными результатами работы являются доказательства следующих утверждений.

Теорема 1. *При $N > n$ $(m > n)$ для коэффициентов a_N ряда Гильберта — Пуанкаре алгебры $A = \langle\langle x, y | x^m, y^n \rangle\rangle$ справедлива формула*

$$a_N = 2\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k_1,\dots,k_{m+n-3}} \binom{k_1+\ldots+k_{m+n-3}}{k_1,\ldots,k_{m+n-3}} (m-1)^{k_{m-1+\ldots+k_{n-1}}} \prod_{i=1}^{m-2} i^{k_i+k_{m+n-i-2}}$$
$$+\sum_{j=m}^{n-1} \sum_{k_1,\dots,k_{m+n-3}} \binom{k_1+\ldots+k_{m+n-3}}{k_1,\ldots,k_{m+n-3}} (m-1)^{k_{m-1+\ldots+k_{n-1}}} \prod_{i=1}^{m-2} i^{k_i+k_{m+n-i-2}}, \tag{1.2}$$

где $k_1, \ldots, k_{m+n-3}$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $2k_1 + 3k_2 + \ldots + (m+n-2)k_{m+n-3} = N - j$.

В теореме 1 найдена производящая функция $H_A(t)$ для коэффициентов a_N, что позволило найти явную формулу для них. Однако эта $(m+n-2)$-кратная формула суммирования с полиномиальными коэффициентами недостаточно пригодна для вычислений с возрастанием m и n. В следующем утверждении показано, что знание $H_A(t)$ позволяет найти для a_N явную 5-кратную формулу суммирования для любых m и n.

Утверждение. *При $N > n$ $(m > n)$ для коэффициентов a_N ряда Гильберта — Пуанкаре алгебры $A = \langle\langle x, y | x^m, y^n \rangle\rangle$ справедлива формула*

$$a_N = 2b_0(N) - b_m(N) - b_n(N), \tag{1.3}$$

где положено

$$b_i(N) = \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)\in\Omega_i} (-1)^{k_1+k_4} (2m-4)^{k_1-k_2} (m-1)^{k_2} \binom{k_1+k_3}{k_4}$$
$$\times \binom{k_1+k_3}{k_2, k_1-k_2, k_3} \binom{k_1+k_3+k_5}{k_1+k_3-k_4, k_4, k_5}, \quad i = 0, m, n, \tag{1.4}$$

и

$$\Omega_i = \big\{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5) \in \mathbb{N}_0^5 \colon k_1 m + k_2 + k_3 + nk_4 + k_5 = N - i, k_2 \le k_1, k_4 \le k_1 + k_3\big\}. \tag{1.5}$$

Теорема 2. *При $N > m$ для коэффициентов a_N ряда Гильберта — Пуанкаре алгебры $A = \langle\langle x, y | x^m, y^m \rangle\rangle$ справедлива формула*

$$a_N = \sum_{j=0}^{\delta} (2^m - 2^{j+1}) \sum_{k_1,\ldots,k_{m-1}} \binom{k_1+\ldots+k_{m-1}}{k_1,\ldots,k_{m-1}},$$

где $\delta = \min(m-2, N-m)$, $k_1, \ldots, k_{m+n-3}$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $k_1 + 2k_2 + \ldots + (m-1)k_{m-1} = N - m - j$.

2. Доказательства теорем 1 и 2, утверждения

Очевидно, что коэффициент a_N равен числу слов $x_1x_2\dots x_N$ длины N от переменных $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_N \in \{x,\ y\}$, не содержащих подслов вида x^m и y^n. Рассмотрим обратную задачу: найти число слов длины N, содержащих подслова вида x^m или y^n, т. е. найти размерности b_N однородных подпространств $R_N \cap J$ идеала J. Введем обозначения: W_j — множество слов длины j, содержащее подслова вида x^m или y^n; соответственно, X_j и Y_j — множества слов длины j, содержащие подслова вида x^m или y^n и начинающиеся с буквы x и y; соответственно, $\bar{X}_j$ и $\bar{Y}_j$ — множества слов длины j, начинающиеся с буквы x и y и не содержащие подслов вида x^m или y^n. Очевидно, что $W_j = X_j \cup Y_j$ и множества X_j и Y_j не пересекаются. Также понятно, что для любых $j,\ k$ множества $\bar{X}_j,\ \bar{Y}_j,\ W_k$ попарно не пересекаются. Поэтому для любого слова $w \in W_N$ справедливо одно и только одно из следующих разложений:

1. $w = x \cdot w'$, где $w' \in W_{N-1}$.
2. $w = y \cdot w'$, где $w' \in W_{N-1}$.
3. $w = \underbrace{x\dots x}_{m} \cdot w'$, где $w' \in \bar{Y}_{N-m}$.
4. $w = \underbrace{y\dots y}_{n} \cdot w'$, где $w' \in \bar{X}_{N-n}$.

Пусть S_i — множество слов указанных выше типов, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, $P_i = |S_i|$ и $b_N = |W_N|$. Очевидно, что
$$b_N = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \tag{2.1}$$
и справедливы следующие рекуррентные соотношения для чисел b_N:
$$P_1 = P_2 = b_{N-1}, \tag{2.2}$$
$$P_3 = 2^{N-m-1} - p^y_{N-m}, \tag{2.3}$$
$$P_4 = 2^{N-n-1} - p^x_{N-n}, \tag{2.4}$$
где $p^x_j = |X_j|$, $p^y_j = |Y_j|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Если $N > n$ $(m > n)$, то $Y_{N-m} = yW_{N-m-1} \cup \underbrace{y\dots y}_{n}\bar{X}_{N-m-n}$ и
$$p^y_{N-m} = b_{N-m-1} + 2^{N-m-n-1} - p^x_{N-m-n}. \tag{2.5}$$
Аналогично,
$$p^x_{N-n} = b_{N-n-1} + 2^{N-m-n-1} - p^y_{N-m-n}. \tag{2.6}$$
Подставляя (2.5) в (2.3) и (2.6) в (2.4), имеем
$$P_3 = 2^{N-m-1} - b_{N-m-1} - 2^{N-m-n-1} + p^x_{N-m-n}, \tag{2.7}$$
$$P_4 = 2^{N-n-1} - b_{N-n-1} - 2^{N-m-n-1} + p^y_{N-m-n}. \tag{2.8}$$
И, наконец, подставляя (2.2), (2.7) и (2.8) в (2.1), получаем
$$b_N = 2b_{N-1} + 2^{N-m-1} - b_{N-m-1} - 2^{N-m-n-1} + p^x_{N-m-n} + 2^{N-n-1} - b_{N-n-1} - 2^{N-m-n-1} + p^y_{N-m-n}.$$
Отсюда, так как $p^x_{N-m-n} + p^y_{N-m-n} = b_{N-m-n}$, из последнего соотношения при $N > m+n$ имеем
$$b_N = 2b_{N-1} - b_{N-m-1} - b_{N-n-1} + b_{N-m-n} + 2^{N-m-1} + 2^{N-n-1} - 2^{N-m-n}. \tag{2.9}$$

Найдем производящую функцию [14] $B(t) = \sum_{N\geq 1} b_N t^N$ для последовательности $\{b_N\}$. Согласно (2.9)
$$B(t) - b_1 t - \dots - b_{m+n}t^{m+n} = 2t\left(B(t) - b_1 t - \dots - b_{m+n-1}t^{m+n-1}\right)$$

$$- t^{m+1}\left(B(t) - b_1 t - \ldots - b_{n-1}t^{n-1}\right) - t^{n+1}\left(B(t) - b_1 t - \ldots - b_{m-1}t^{m-1}\right)$$
$$+ t^{m+n}B(t) + \left(2^n t^{m+n+1} + 2^m t^{m+n+1} - 2t^{m+n+1}\right)(1-2t)^{-1}.$$

Так как $b_1 = \ldots = b_{m-1} = 0,\ b_m = 1$, то

$$\left(1 - 2t + t^{m+1} + t^{n+1} - t^{m+n}\right) B(t) = t^m + \sum_{j=m+1}^{2m} (b_j - 2b_{j-1})\, t^j$$

$$+ \sum_{j=2m+1}^{m+n} (b_j - 2b_{j-1} + b_{j-m-1})\, t^j + (2^n + 2^m - 2)t^{m+n+1}(1-2t)^{-1}. \qquad (2.10)$$

Если $n < 2m$, то согласно (2.1) имеем следующие соотношения для коэффициентов ряда (2.10):

$$b_j - 2b_{j-1} = \begin{cases} 2^{j-m-1}, & \text{если} \quad j \in \overline{m+1, n-1}, \\ 2^{n-m-1} + 1, & \text{если} \quad j = n, \\ 2^{j-m-1} + 2^{j-n-1}, & \text{если} \quad j \in \overline{n+1, 2m}, \end{cases}$$

$$b_j - 2b_{j-1} + b_{j-m-1} = \begin{cases} 2^{j-m-1} + 2^{j-n-1}, & \text{если} \quad j \in \overline{2m+1, m+n-1}, \\ 2^{n-1} + 2^{m-1} - 2, & \text{если} \quad j = m+n. \end{cases}$$

Если $n = 2m$, то

$$b_j - 2b_{j-1} = \begin{cases} 2^{j-m-1}, & \text{если} \quad j \in \overline{m+1, n-1}, \\ 2^{n-m-1} + 1, & \text{если} \quad j = n, \\ 2^{j-m-1} + 2^{j-n-1}, & \text{если} \quad j \in \overline{n+1, 2m}, \end{cases}$$

$$b_j - 2b_{j-1} + b_{j-m-1} = \begin{cases} 2^{j-m-1} + 2^{j-n-1}, & \text{если} \quad j \in \overline{n+1, m+n-1}, \\ 2^{n-1} + 2^{m-1} - 2, & \text{если} \quad j = m+n. \end{cases}$$

Если $n > 2m$, то

$$b_j - 2b_{j-1} = \begin{cases} 2^{j-m-1}, & \text{если} \quad j \in \overline{m+1, 2m}, \\ 2^{n-m-1} + 1, & \text{если} \quad j = n, \end{cases}$$

$$b_j - 2b_{j-1} + b_{j-m-1} = \begin{cases} 2^{j-m-1}, & \text{если} \quad j \in \overline{2m+1, n-1}, \\ 2^{j-m-1} + 2^{j-n-1}, & \text{если} \quad j \in \overline{n+1, m+n-1}, \\ 2^{n-1} + 2^{m-1} - 2, & \text{если} \quad j = m+n. \end{cases}$$

Подставляя найденные выражения для коэффициентов в (2.10), имеем

$$\left(1 - 2t + t^{m+1} + t^{n+1} - t^{m+n}\right) B(t) = t^m + \sum_{j=m+1}^{n-1} 2^{j-m-1} t^j + \left(2^{n-m-1} + 1\right) t^n$$

$$+ \sum_{j=n+1}^{m+n} \left(2^{j-m-1} + 2^{j-n-1}\right) t^j - 2t^{m+n} + (2^n + 2^m - 2)t^{m+n+1}(1-2t)^{-1}.$$

Отсюда

$$B(t) = \frac{1}{Q(t)(2t-1)}\Big(2\sum_{j=n}^{m+n-1} t^j + \sum_{j=m}^{n-1} t^j\Big) = 1 - \frac{P(t)}{Q(t)(2t-1)},$$

где

$$Q(t) = \sum_{j=n}^{m+n-2} (m+n-j-1)t^j + (m-1)\sum_{j=m}^{n-1} t^j + \sum_{j=2}^{m-1} (j-1)t^j - 1,$$

$$P(t)=\sum_{j=n+1}^{m+n-2}(m+n-j-1)t^j+(m-3)t^n+(m-2)\sum_{j=m+1}^{n-1}t^j+(m-4)t^m+\sum_{j=1}^{m-1}(j-3)t^j-1.$$

Вычисляя коэффициенты разложения

$$\frac{P(t)}{(2t-1)Q(t)}=\frac{A}{2t-1}+\frac{1}{Q(t)}\sum_{j=0}^{m+n-3}B_jt^j,$$

имеем

$$A=1,\quad B_j=-2,\quad j\in\overline{0,m-1},\quad B_j=-1,\quad j\in\overline{m,n-1},\quad B_j=0,\quad j\in\overline{n,m+n-3},$$

и, таким образом,

$$B(t)=1+\frac{1}{1-2t}-\frac{1}{Q(t)}\Big(2\sum_{j=0}^{m-1}t^j+\sum_{j=m}^{n-1}t^j\Big).$$

Так как $a_N=2^N-b_N$, то $H_A(t)=\dfrac{1}{1-2t}-B(t)$, и получаем

$$H_A(t)=-1-\frac{1}{Q(t)}\Big(2\sum_{j=0}^{m-1}t^j+\sum_{j=m}^{n-1}t^j\Big). \tag{2.11}$$

Поскольку $a_N=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|t|=\rho}\frac{H_A(t)dt}{t^{N+1}},\ 0<\rho\ll 1$, (см. [3]), то из формулы (2.11) непосредственно вытекает требуемая формула (1.2). $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения. В доказательстве теоремы 1 найдена производящая функция $H_A(t)$ (2.11). Запишем $Q(t)=S_1+S_2+S_3-1$, где

$$S_1:=\sum_{j=n}^{m+n-2}(m+n-j-1)t^j=(m-1)t^n\sum_{i=0}^{m-2}t^i-t^{n+1}\sum_{i=0}^{m-2}it^{i-1}$$

$$=(m-1)t^n\frac{1-t^{m-1}}{1-t}-t^{n+1}\frac{1+(m-3)t^{m-2}}{(1-t)^2}$$

$$=\frac{t^n}{(1-t)^2}\{(m-1)-mt-(2m-4)t^{m-1}+(m-1)t^m\}, \tag{2.12}$$

$$S_2:=(m-1)\sum_{j=m}^{n-1}t^j=\frac{(m-1)t^m}{1-t}(1-t^{n-m}), \tag{2.13}$$

$$S_3:=\sum_{j=2}^{m-1}(j-1)t^j=t^2(t+t^2+\ldots+t^{m-2})'=t^2\Big(\frac{t(1-t^{m-2})}{1-t}\Big)'=t^2\frac{1+(m-3)t^{m-2}}{(1-t)^2}. \tag{2.14}$$

Суммируя (2.12)–(2.14), имеем

$$Q(t)=\frac{t^n}{(1-t)^2}\{(m-1)-mt-(2m-4)t^{m-1}+(m-1)t^m\}$$

$$+\frac{(m-1)t^m}{1-t}(1-t^{n-m})+t^2\frac{1+(m-3)t^{m-2}}{(1-t)^2}-1$$

$$=\frac{1}{(1-t)^2}\{-(1-t)+t(1-t^n)-((2m-4)-(m-1)t)t^m(1-t^n)\}. \tag{2.15}$$

Таким образом,

$$H_A(t) = -\frac{P(t)}{Q(t)} - 1, \tag{2.16}$$

где

$$P(t) := 2\sum_{j=0}^{m-1} t^j + \sum_{j=m}^{n-1} t^j = 2\frac{1-t^m}{1-t} + t^m \frac{1-t^{n-m}}{1-t} = \frac{2-t^m-t^n}{1-t}. \tag{2.17}$$

Согласно (2.15), (2.17) и (2.16) имеем

$$H_A(t) + 1 = -\frac{P(t)}{Q(t)} = -\frac{(1-t)(2-t^m-t^n)}{-(1-t)+t(1-t^n)-((2m-4)-(m-1)t)t^m(1-t^n)}$$

$$= \frac{(1-t)(2-t^m-t^n)}{(S(t)+R(t))},$$

где положено $S(t) = (1-t) - t(1-t^n)$, $R(t) = ((2m-4)-(m-1)t)t^m(1-t^n)$. Далее имеем

$$H_A(t) + 1 = (1-t)(2-t^m-t^n)S^{-1}(t)\Big(1 + \frac{R(t)}{S(t)}\Big)^{-1} =$$

(разложение в геометрическую прогрессию, $|t| << 1$, $|R(t)/S(t)| < 1$)

$$= (1-t)(2-t^m-t^n)\sum_{k_1}^{\infty}(-1)^{k_1}R^{k_1}(t)S^{-k_1-1}(t), \tag{2.18}$$

где по биному Ньютона

$$R^{k_1}(t) = ((2m-4)+(m-1)t)^{k_1}t^{k_1 m}(1-t^n)^{k_1}$$

$$= (2m-4)^{k_1}t^{k_1 m}(1-t^n)^{k_1}\sum_{k_2=0}^{k_1}\binom{k_1}{k_2}\Big(\frac{m-1}{2m-4}\Big)^{k_2}t^{k_2}, \tag{2.19}$$

и

$$S^{-k_1-1}(t) = ((1-t)-t(1-t^n))^{-k_1-1} = (1-t)^{-k_1-1}\Big(1 - t\frac{1-t^n}{1-t}\Big)^{-k_1-1} \tag{2.20}$$

$$= \sum_{k_3=0}^{\infty}\binom{k_1+k_3}{k_3}t^{k_3}(1-t^n)^{k_3}(1-t)^{-k_1-k_3-1}. \tag{2.21}$$

Согласно (2.19), (2.20) и (2.18) имеем

$$\frac{H_A(t)+1}{(2-t^m-t^n)} = (1-t)\sum_{k_1=0}^{\infty}(-1)^{k_1} \times (2m-4)^{k_1}t^{k_1 m}(1-t^n)^{k_1}$$

$$\times \sum_{k_2}^{k_1}\binom{k_1}{k_2}\Big(\frac{m-1}{2m-4}\Big)^{k_2}t_2^k \times \sum_{k_3}^{\infty}\binom{k_1+k_3}{k_3}t^{k_3}(1-t^n)^{k_3}(1-t)^{-k_1-k_3-1}$$

$$= \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_3}^{\infty}\sum_{k_2}^{k_1}(-1)^{k_1}(2m-4)^{k_1-k_2}(m-1)^{k_2}\binom{k_1+k_3}{k_2, k_1-k_2, k_3}$$

$$\times t^{k_1 m + k_2 + k_3}(1-t^n)^{k_1+k_3}(1-t)^{-k_1-k_3}$$

$$= \sum_{k_1}^{\infty}\sum_{k_3}^{\infty}\sum_{k_2}^{k_1}(-1)^{k_1}(2m-4)^{k_1-k_2}(m-1)^{k_2}\binom{k_1+k_3}{k_2, k_1-k_2, k_3}$$

$$\times\, t^{k_1m+k_2+k_3}\sum_{k_4=0}^{k_1+k_3}(-1)^{k_4}\binom{k_1+k_3}{k_4}t^{nk_4}\times\sum_{k_5=0}^{\infty}\binom{k_1+k_3+k_5-1}{k_5}t^{k_5}$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_4=0}^{k_1+k_3}\sum_{k_5=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_4}(2m-4)^{k_1-k_2}(m-1)^{k_2}\binom{k_1+k_3}{k_4}$$

$$\times\binom{k_1+k_3}{k_2,k_1-k_2,k_3}\binom{k_1+k_3+k_5-1}{k_1+k_3-k_4,k_4,k_5-1}t^{k_1m+k_2+k_3+nk_4+k_5}. \tag{2.22}$$

Таким образом, согласно (2.22)

$$H_A(t)=-1+2G_0(t)-G_m(t)-G_n(t), \tag{2.23}$$

где положено

$$G_i(t)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_4=0}^{k_1+k_3}\sum_{k_5=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_4}(2m-4)^{k_1-k_2}(m-1)^{k_2}\binom{k_1+k_3}{k_4}$$

$$\times\binom{k_1+k_3}{k_2,k_1-k_2,k_3}\binom{k_1+k_3+k_5}{k_1+k_3-k_4,k_4,k_5}t^{k_1m+k_2+k_3+nk_4+k_5+i},\quad i\in\mathbb{N}_0. \tag{2.24}$$

Коэффициент a_N при t^N в сумме (2.24) по k_1,k_2,k_3,k_4,k_5 равен сумме тех ее слагаемых, у которых $k_1m+k_2+k_3+nk_4+k_5+i=N$, $k_2\le k_1$ и $k_4\le k_1+k_3$. Согласно (2.24) это означает, что при $N\ge 2$ спреведливы формулы (1.3)–(1.5). □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Если в доказательстве теоремы 1 положить $m=n$, то $P_3=P_4$ и, так как $p^x_{N-m}+p^y_{N-m}=b_{N-m}$, то при $N>m+n$

$$b_N=2b_{N-1}+2^{N-m}-b_{N-m}. \tag{2.25}$$

Найдем производящую функцию $B(t)=\sum\limits_{N\ge1}b_Nt^N$ для чисел b_N. Согласно (2.25)

$$B(t)-b_1t-\ldots-b_mt^m=2t\left(B(t)-b_1t-\ldots-b_{m-1}t^{m-1}\right)-t^mB(t)+2t^{m+1}(1-2t)^{-1}.$$

Так как $b_1=\ldots=b_{m-1}=0,\ b_m=2$, то

$$B(t)=2t^m(t-1)(2t-1)^{-1}(t^m-2t+1)^{-1}. \tag{2.26}$$

Сокращая последнюю дробь на $t-1$, получаем $B(t)=\dfrac{2t^m}{(2t-1)(t^{m-1}+t^{m-2}+\ldots+t-1)}$.

Поскольку при $0<\rho\ll 1$

$$b_N=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho}\frac{2dt}{(2t-1)(t^{m-1}+t^{m-2}+\ldots+t-1)t^{N-m+1}},$$

то, полагая

$$\frac{1}{(2t-1)(t^{m-1}+t^{m-2}+\ldots+t-1)}=\frac{A}{2t-1}+\frac{1}{t^{m-1}+t^{m-2}+\ldots+t-1}\sum_{j=0}^{m-2}B_jt^j,$$

находим $A=-2^{m-1}$, $B_j=2^{m-1}-2^j$, $j=\in\overline{0,m-2}$. Отсюда

$$b_N=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho}\frac{2^mdt}{(2t-1)t^{N-m+1}}+\sum_{j=0}^{m-2}\left(2^m-2^{j+1}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho}\frac{dt}{(t^{m-1}+t^{m-2}+\ldots+t-1)t^{N-m-j+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho} \frac{2^m dt}{(2t-1)t^{N-m+1}} - \sum_{j=0}^{m-2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^m - 2^{j+1}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho}(t^{m-1}+t^{m-2}+\ldots+t)^k\frac{dt}{t^{N-m-j+1}}.$$

Отсюда по полиномиальной формуле получаем

$$b_N = 2^N - \sum_{j=0}^{\delta}\left(2^m - 2^{j+1}\right)\sum_{k_1,\ldots,k_{m-1}}\binom{k_1+\ldots+k_{m-1}}{k_1,\ldots,k_{m-1}},$$

где $\delta = \min(m-2, N-m)$, $k_1,\ \ldots,\ k_{m-1}$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $k_1 + 2k_2 + \ldots + (m-1)k_{m-1} = N - m - j$. Так как $a_N = 2^N - b_N$, то

$$a_N = \sum_{j=0}^{\delta}\left(2^m - 2^{j+1}\right)\sum_{k_1,\ldots,k_{m-1}}\binom{k_1+\ldots+k_{m-1}}{k_1,\ldots,k_{m-1}}. \qquad \square$$

Следствие 1. *При $N > 3$ для коэффициентов a_N ряда Гильберта — Пуанкаре алгебры $A = \langle\langle x, y | x^3, y^3\rangle\rangle$ справедлива формула*

$$a_N = \Big(2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\Big)\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{N-2} + \Big(2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\Big)\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{N-2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказательства теоремы 1 следует, что $a_N = 2^N - b_N$, где b_N — размерности однородных подпространств $R_N \cap J$ идеала J. При $m = 3$ производящая функция $B(t)$ (см. формулу (2.26)) для последовательности b_N имеет вид

$$B(t) = \frac{2t^3}{(2t-1)(t^2+t-1)},$$

и по теореме Коши для многосвязной области [15] имеем

$$b_N = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho}\frac{2dt}{(2t-1)(t^2+t-1)t^{N-2}} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{3}t^{2k}\int\limits_{|t-t_i|=\rho}\frac{2dt}{(2t-1)(t^2+t-1)t^{N-2}},$$

где $t_1 = 0{,}5,\ t_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ t_3 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ — корни уравнения $(2t-1)(t^2+t-1) = 0$. Вычисляя интегралы, получаем

$$b_N = 2^N - \frac{4+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{N-2} + \frac{4-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{N-2}.$$

Так как $a_N = 2^N - b_N$, то получаем утверждение следствия 2. $\square$

Найдем асимптотику коэффициентов a_N. Так как

$$\left|\frac{t_1}{t_2}\right|^N \to 0,\ \left|\frac{t_1}{t_3}\right|^N \to 0 \ \text{ при }\ N \to \infty,$$

то по теореме 4.3 [14] коэффициенты a_N растут как $\dfrac{t_1^2 + 2t_1 + 2}{\left(3t_1^2 + 2t_1\right)t_1^{N+1}}$.

Таким образом,

$$a_N \sim \frac{4+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{N-2} \approx 2.38 \cdot 1.62^N.$$

Следствие 2. *При $N > 3$ для коэффициентов a_N ряда Гильберта — Пуанкаре алгебры $A = \langle\langle x, y | x^2, y^n\rangle\rangle$ справедлива формула*

$$a_N = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\rho} \frac{t^{n-1} + \ldots + t^2 + 2t + 2}{(1 - t^2 - \ldots - t^n)\, t^{N+1}} dt$$

$$= 2\sum_{j=0}^{1} \sum_{k_1, \ldots,\ k_{n-1}} \frac{(k_1 + \ldots + k_{n-1})!}{k_1! \ldots k_{n-1}!} + \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k_1, \ldots,\ k_{n-1}} \frac{(k_1 + \ldots + k_{n-1})!}{k_1! \ldots k_{n-1}!}, \qquad (2.27)$$

где $k_1, \ldots, k_{n-1}$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию

$$2k_1 + 3k_2 + \ldots + nk_{n-1} = N - j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (2.28)$$

Доказательство. Если $m = 2$, $n \geq 3$, то производящая функция $H_A(t)$ для последовательности a_N имеет вид

$$H_A(t) = \frac{t^{n-1} + \ldots + t^2 + 2t + 2}{1 - t^2 - \ldots - t^n} - 1,$$

а для коэффициентов a_N справедливы формулы (2.27), (2.28). □

Оценим коэффициенты a_N. Так как радиус сходимости ряда $\sum_{N=0}^{\infty} a_N t^N$ равен t_0, где t_0 — ближайший к нулю корень уравнения $t^n + \ldots + t^2 - 1 = 0$, то по теореме 4.3 из [14] следует, что коэффициенты a_N растут медленнее, чем $\left(\frac{1}{|t_0|} + \epsilon\right)^N$ для любого $\epsilon > 0$. Если t_0 — действительный корень уравнения $t^n + \ldots + t^2 - 1 = 0$, который является ближайшим к нулю, то

$$a_N \sim \frac{t_0^{n-1} + \ldots + t_0^2 + 2t_0 + 2}{nt_0^n + (n-1)t_0^{n-1} + \ldots + 2t_0^2} \left(\frac{1}{t_0}\right)^N.$$

3. Приложение

1. Коэффициенты c_N ряда Маклорена для функции $(1 - 2t + 2t^m)^{-1}$, $|t| < 1$, имеют вид

$$c_N = \sum_{l=0}^{[N/(m-1)]} (-1)^l 2^{N-l(m-1)} \binom{N - l(m-1)}{l}.$$

В частности, при $m = 3$ для коэффициентов c_N:

$$c_N \sim 1{,}36 \cdot 1.62^N \cdot \cos(0.39N - 0.39),$$

для коэффициентов a_N ряда Гильберта — Пуанкаре алгебры $A = \langle\langle x, y | x^3, y^3\rangle\rangle$

$$a_N \sim 2.38 \cdot 1.62^N.$$

Для всех N выполняется неравенство $|c_N| < a_N$.

2. Коэффициенты c_N ряда Маклорена для функции $(1 - 2t + t^2 + t^3)^{-1}$, $|t| < 1$, имеют вид

$$c_N = \sum_{m=0}^{[N/3]} (-1)^m \binom{N - m + 1}{N - 3m}.$$

Для коэффициентов c_N:

$$c_N \sim 0.82 \cdot 1.52^N \cdot \sin(0.53N - 0.91),$$

для коэффициентов a_N ряда Гильберта — Пуанкаре алгебры $A = \langle\langle x, y | x^2, y^3 \rangle\rangle$

$$a_N \sim 0.86 \cdot 1.32^N.$$

Существуют номера N, для которых $c_N > a_N$, например, при $N = 15$ $c_N \sim 297.84$, $a_N \sim 55$. В частности, в данном случае нарушается система неравенств, на которую опирается теорема Голода — Шафаревича и

$$1 - 2t + \sum_{m=2}^{\infty} a_m t^m \ngeq 1 - 2t + \sum_{m=2}^{\infty} c_m t^m.$$

3. Коэффициенты c_N ряда Маклорена для функции $(1 - 2t + t^2 + t^4)^{-1}$, $|t| < 1$, имеют вид

$$c_N = \sum_{m=0}^{[N/4]} (-1)^m \binom{N - 2m + 1}{N - 4m}.$$

Для коэффициентов c_N:

$$c_N \sim 1.47 \cdot 1.44^N \cdot \sin(0.45N - 1.35),$$

для коэффициентов a_N ряда Гильберта — Пуанкаре алгебры $A = \langle\langle x, y | x^2, y^4 \rangle\rangle$

$$a_N \sim 1.52 \cdot 1.47^N.$$

Для всех N выполняется неравенство $|c_N| < a_N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Уфнаровский В.А.** Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре// Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики Фундам. направления. ВИНИТИ. 1990. Т 57. С. 5–178.
2. **Голод Е.С., Шафаревич И.Р.** О башне полей классов// Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1964. Т. 28, №2. С. 261–272.
3. **Голод Е.С.** О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых p-группах// Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1964. Т. 28, № 2. С. 273–276.
4. **Херстейн И.** Некоммутативные кольца. М.: Мир. 1982. 190 с.
5. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
6. **Алешин С. В.** К проблеме Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. 1972. Vol. 32, №3. С. 319–328.
7. **Григорчук Р.И.** К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функц. анализ и его приложения. 1980. Vol. 14, № 1. С. 53–54.
8. **Gupta N., Sidki S.** Some infinite $p-$groups// Алгебра и логика. 1983. Vol. 22, № 5. С. 584–586.
9. **Егорычев Г.П.** Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм / СО АН СССР. Новосибирск: Наука, 1979. 286 с.
10. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 15-е издание. Новосибирск. 2002.
11. **Шунков В.П.** Об одном классе p-групп// Алгебра и логика. 1970. Т. 9, №4. С. 484-496.
12. **Созутов А.И., Александрова И.О.** О некоторых свойствах присоединенных групп ассоциативных нильалгебр // Алгебра и логика: теория и приложения: тез. докл. Международ. конф. / Сиб. федерал. ун-т. Красноярск, 2013 г. С. 12–14.
13. **Sozutov A.I., Alexandrova I.O.** On some propeties of adjoint groups of associative nil algebras / Журнал Сиб. федерал. ун-та. Математика и физика. 2017. Т. 10, № 4. С. 503–508.

14. **Ландо С.К.** Лекции о производящих функциях: учеб. М.: МЦНМО, 2007. 144 с.
15. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Функции одного переменного: учеб. М.: Наука, 1985. 336 с.

Поступила 28.03.2018

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

Егорычев Георгий Петрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск
e-mail: gegorych@mail.ru

Александрова Инна Олеговна
старший преподаватель
Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск
e-mail: aio40@mail.ru

REFERENCES

1. Ufnarovskii V.A. Combinatorial and asymptotic methods in algebra. *Algebra VI. Encycl. Math. Sci.*, 1995, vol. 57, pp. 1–196.
2. Golod E.S., Shafarevich I.R. On the class field tower. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1964, vol. 28, pp. 261–272 (in Russian).
3. Golod E.S. On nil-algebras and finitely approximable p-groups. *Am. Math. Soc., Translat.*, 1965, vol. 48, no. 2, pp. 103–106.
4. Herstein I. *Noncommutative rings.* Washington: Mathematical Association of America, 1968, 202 p. doi: 10.5948/UPO9781614440154 . Translated to Russian under the title *Nekommutativnye kol'tsa.* Moscow, Mir Publ., 1982, 190 p.
5. Kargapolov M.I., Merzljakov Ju.I. *Fundamentals of the theory of groups.* Transl. from the 2nd Russian ed. Ser. Graduate Texts in Mathematics, vol. 62. N Y; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag. 1979, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0 . Original Russian text (3rd ed.) published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp*, Moscow, Nauka Publ., 1982, 288 p.
6. Aleshin S.V. Finite automata and Burnside's problem for periodic groups.*Math. Notes*, 1972, vol. 11, no. 3, pp. 199–203. doi: 10.1007/BF01098526 .
7. Grigorchuk R.I. Burnside problem on periodic groups. *Funct. Anal. Appl.*, 1980, vol. 14, no. 1, pp. 41–43. doi: 10.1007/BF01078416 .
8. Gupta N., Sidki S. Some infinite p-groups. *Algebra i Logika*, 1983, vol. 22, no 5, pp. 584–589.
9. Egorychev G.P. *Integral representation and the computation of combinatorial sums.* Ser. Translations of Mathematical Monographs, vol. 59, Providence: American Mathematical Society, 1984, 286 p. ISBN: 0821845128 . Original Russian text piblished in Egorychev G.P. *Integral'noe predstavlenie i vychislenie kombinatornykh summ*, Novosibirsk: Nauka Publ., 1979, 286 p.
10. *Kourovskaya tetrad': Nereshennye voprosy teorii grupp* [The Kourovka Notebook: Unsolved Problems of Group Theory]. Edited by V. D. Mazurov and E. I. Khukhro. 15th ed., IM RAN, Novosibirsk, 2002, 172 p. ISBN: 5-94356-058-0 .
11. Shunkov V.P. On a certain class of p-groups. *Algebra and Logic*, 1970, vol. 9, pp. 291–297.
12. Sozutov A.I., Aleksandrova I.O. On some properties associated groups of associative nil algebras. *Abstr. Int. Conf. "Algebra i Logika: Teoriya i Prilozheniya"* [Algebra and Logic: Theory and Applications] Krasnoyarsk, 2013, pp. 12–14 (in Russian).
13. Sozutov A.I., Alexandrova I.O. On some properties of adjoint groups of associative nil algebras. *Zh. Sib. Fed. Univ. Mat. Fiz.*, 2017, vol. 10, no. 4, pp. 503–508.

14. Lando S.K. *Lectures on generating functions.* Ser. Student Mathematical Library, vol. 23, Providence: AMS, 2003, 148 p. ISBN: 978-0-8218-3481-7 . Original Russian text (3rd ed.) published in Lando S.K. *Lektsii o proizvodyashchikh funktsiyakh,* Moscow: MTsNMO Publ., 2007, 144 p.
15. Shabat B.V. *Vvedenie v kompleksnyi analiz. Ch. 1. Funktsii odnogo peremennogo: ucheb.* [Introduction to Complex Analysis. Part I: Functions of one variable. Textbook]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 336 p. ISBN(5th ed.): 978-5-9710-1358-7 .

The paper was received by the Editorial Office on March 28, 2018.

Anatolii Ilich Sozutov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: sozutov_ai@mail.ru .

Georgii Petrovich Egorychev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: gegorych@mail.ru .

Inna Olegovna Aleksandrova, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia,
e-mail: aio40@mail.ru .