ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 519.85

О СМЕЖНОСТИ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА СВЯЗНЫХ k-ФАКТОРОВ[1]

Р. Ю. Симанчев

Комбинаторные характеристики многогранников, ассоциированных с комбинаторными задачами оптимизации, в определенной степени могут считаться характеристиками их труднорешаемости. Например, NP-полнота проверки несмежности вершин многогранника задачи очень часто сопутствует NP-трудности самой задачи. Еще одной важной характеристикой графа многогранника задачи является кликовое число. В некотором довольно широком классе алгоритмов кликовое число является нижней оценкой временной трудоемкости задачи. Кроме того, для большого количества труднорешаемых задач известны экспоненциальные нижние оценки кликового числа графов многогранников, в то время как для полиномиально разрешимых задач для него установлены полиномиальные нижние и верхние оценки. В данной работе рассматривается многогранник задачи о взвешенном связном остовном k-однородном подграфе (связном k-факторе) полного n-вершинного графа, который при $k = 2$ является многогранником симметричной задачи коммивояжера. Показано, что при k, удовлетворяющих условиям $k \geq 3$ и $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leq \frac{n}{8} - 1$, проверка несмежности вершин этого многогранника является NP-полной задачей и кликовое число экспоненциально по n. Доказательства основаны на сведении к случаю $k = 2$.

Ключевые слова: k-фактор, многогранник, смежность вершин многогранника, кликовое число графа.

R. Yu. Simanchev. On the vertex adjacency in a polytope of connected k-factors.

Combinatorial characteristics of polytopes associated with combinatorial optimization problems can be considered to some extent as the intractability characteristics of these problems. For example, the NP-completeness of verifying the nonadjacency of vertices in the polytope of a problem quite often accompanies the NP-hardness of the problem. Another important characteristic of the polytope graph of a problem is its clique number. For a rather wide class of algorithms, the clique number is a lower bound for the time complexity of the problem. In addition, for the clique number of polytope graphs, there are known exponential lower bounds for a large number of intractable problems and known polynomial upper and lower bounds for problems solvable in polynomial time. In the present paper we consider the polytope of the problem on a weighted connected spanning k-regular subgraph (a connected k-factor) of a complete n-vertex graph; for $k = 2$, this is the polytope of the symmetric traveling salesman problem. For the values of k satisfying the conditions $k \geq 3$ and $\lceil k/2 \rceil \leq n/8 - 1$, we show that the problem of verifying the nonadjacency of vertices of this polytope is NP-complete and the clique number is exponential in n. The proofs are based on the reduction to the case $k = 2$.

Keywords: k-factor, polytope, adjacency of vertices, clique number of a graph.

MSC: 90XXX

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-235-242

Введение

Большое количество задач комбинаторной оптимизации допускает следующую формализацию. Пусть E — конечное множество, на котором задан аддитивный вещественный функционал $c\colon E \to \mathbb{R}$, и $\mathcal{H} \subset 2^E$ — семейство непустых подмножеств множества E. Среди элементов семейства $\mathcal{H}$ требуется найти множество $S \in \mathcal{H}$, максимизирующее (минимизирующее) функцию $c(S) = \sum_{e \in S} c(e)$. Предметом полиэдральной комбинаторики является ассоциированный с семейством $\mathcal{H}$ многогранник $P_{\mathcal{H}}$, являющийся выпуклой оболочкой векторов инциденций множеств из $\mathcal{H}$. Рассматриваемая оптимизационная задача при таком подходе становится задачей линейного программирования (на множестве вершин многогранника $P_{\mathcal{H}}$). В этой связи структура и свойства многогранника $P_{\mathcal{H}}$ становятся базой для разработки алгоритмов решения задач, построения оценок их трудоемкости. При решении NP-трудных задач большой размерности полиэдральные методы ведут себя, как правило, гораздо эффективнее комбинаторных.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-07-00599).

Наиболее впечатляющие рекорды при точном решении индивидуальных задач комбинаторной оптимизации получены именно с применением полиэдральных постановок (см., например, [1–5]).

Объектом исследования в данной статье служит граф многогранника связных остовных k-однородных подграфов (связных k-факторов) полного n-вершинного графа. Этот многогранник обозначим через $P_{k,n}$. Вершинами графа $G_{k,n}$ многогранника $P_{k,n}$ служат векторы инциденций связных k-факторов, а ребрами — одномерные грани.

Изучению свойств полиэдральных графов задач комбинаторной оптимизации посвящено много работ. Большое число результатов для различных задач содержится в монографии [6]. Графы многогранников NP-трудных задач, как правило, отличаются достаточно сложной комбинаторной структурой. Например, классический результат Пападимитриу [7] говорит о том, что задача проверки несмежности вершин многогранника гамильтоновых циклов (связных 2-факторов) NP-полна. Несмотря на этот факт, некоторые свойства графа многогранника гамильтоновых циклов были установлены. В частности, в работе [8] была получена экспоненциальная нижняя оценка кликового числа этого графа[2]. Для большого количества трудно-решаемых задач известны экспоненциальные нижние оценки кликового числа графов многогранников, в то время как для полиномиально разрешимых задач для него установлены полиномиальные нижние и верхние оценки [6].

В настоящей работе построено взаимнооднозначное соответствие между вершинами многогранника $P_{2,t}$ гамильтоновых циклов на полном t-вершинном графе K_t и вершинами грани многогранника $P_{k,n}$, $k \geq 3$, при определенных значениях n, зависящих от t. Показано, что это соответствие сохраняет смежность вершин. Отсюда вытекают два основных результата работы. Это, во-первых, NP-полнота проверки несмежности вершин многогранника $P_{k,n}$ и, во-вторых, нижняя оценка кликового числа графа $G_{k,n}$. Оценка кликового числа строится с использованием известной оценки для кликового числа графа $G_{2,n}$ многогранника связных 2-факторов

$$\omega(G_{2,n}) > 2^{\sqrt{n}/2-2}, \tag{1}$$

обоснованной в [6; 8].

Поскольку случай $k = 2$ в контексте рассматриваемых вопросов представляется вполне изученным, всюду ниже будем полагать $k \geq 3$.

Нам понадобятся следующие обозначения. Пусть $K_n = (V, E)$ — полный неориентированный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин V и множеством ребер E, $|V| = n$. Для любого подграфа $G \subset K_n$ через $V(G)$ и $E(G)$ будем соответственно обозначать множества его вершин и ребер. Для ребра $e \in E$ будем также использовать запись uv, где u, v — вершины из V, инцидентные ребру e. Каждое подмножество $R \subseteq E$ индуцирует некоторый подграф T, в котором $E(T) = R$ и $V(T)$ — совокупность вершин из V, инцидентных ребрам из R. Граф, индуцированный множеством ребер R, иногда будем обозначать через R. Для подграфов G, F из K_n положим $G \cup F = (V(G) \cup V(F), E(G) \cup E(F))$, $G \cap F = E(G) \cap E(F)$, и, если $F \subseteq G$, то $G \setminus F = (V(G), E(G) \setminus E(F))$. Степень вершины $u \in V$ относительно графа $G \subseteq K_n$, т. е. количество ребер графа G, инцидентных вершине u, будем обозначать через $d_G(u)$. Если $G = K_n$, то в обозначении $d_G(u)$ символ G будем опускать.

1. Многогранник связных k-факторов

Подграф $H \subseteq K_n$ называется *k-фактором*, если степень каждой вершины из V относительно подграфа H равна k. Поскольку всякий k-фактор является остовным подграфом графа K_n, для существования k-факторов в K_n необходимо и достаточно, чтобы число kn было четно. Мы будем полагать, что это условие выполняется.

[2]Кликовое число $\omega(G)$ графа G есть число вершин в его максимальной клике.

С графом K_n свяжем евклидово пространство $\mathbb{R}^E$ размерности $(n^2-n)/2$ посредством взаимнооднозначного соответствия между множеством ребер E и множеством осей координат в $\mathbb{R}^E$. Это пространство может рассматриваться как множество вектор-столбцов, компоненты которых индексированы элементами множества E. *Вектором инциденций* произвольного графа $G \subseteq K_n$ называется вектор $x^G \in \mathbb{R}^E$ с компонентами $x^G_e = 1$ при $e \in E(G)$, $x^G_e = 0$ при $e \notin E(G)$. Это правило задает взаимнооднозначное соответствие между множеством реберно-порожденных подграфов графа K_n и множеством вершин единичного куба в $\mathbb{R}^E$.

Многогранником k-факторов является множество

$$Q_{k,n} = \mathrm{conv}\{x^H \in \mathbb{R}^E \mid H - k\text{-фактор}\}.$$

Первым результатом в направлении использования полиэдрального подхода к задачам комбинаторной оптимизации стало полное линейное описание многогранника паросочетаний и как следствие многогранника совершенных паросочетаний $Q_{1,n}$ [9]. Там же, в [9] был анонсирован аналогичный результат для многогранника $Q_{k,n}$, строгое доказательство которого приведено в [10]. Наличие полного линейного описания многогранника $Q_{k,n}$ позволило в дальнейшем обосновать полиномиальную разрешимость задачи о взвешенном k-факторе (см. [11]).

Однако ситуация радикально меняется, если на рассматриваемые k-факторы наложить условие связности. Задача становится NP-трудной. Наиболее широко известен и изучен случай $k = 2$, соответствующий симметричной задаче коммивояжера. Условие связности не позволяет свести случай произвольного k к случаю $k = 1$. В связи с этим изучение многогранника связных k-факторов потребовало разработки новых подходов, которые хорошо проявили себя при исследовании многогранника гамильтоновых циклов. При этом, поскольку в силу NP-трудности надежды на получение полного линейного описания многогранника при условии связности достаточно призрачны, основные усилия в рамках полиэдрального подхода направлены на более глубокое изучение полиэдральных свойств задачи и получение рекордов при решении индивидуальных задач коммивояжера.

Нас будет интересовать семейство связных k-факторов полного графа как обобщение семейства гамильтоновых циклов. Многогранником связных k-факторов является множество

$$P_{k,n} = \mathrm{conv}\{x^H \in \mathbb{R}^E \mid H - \text{связный } k\text{-фактор}\}.$$

Граф этого многогранника, как уже говорилось, обозначим через $G_{k,n}$.

2. Основная конструкция

Итак, пусть $K_n = (V, E)$ — полный неориентированный граф без петель и кратных ребер, $G_{k,n}$ — граф многогранника связных k-факторов. При этом будем полагать, что kn четно, $k \geq 3$ и $\left\lceil \dfrac{k}{2} \right\rceil \leq \dfrac{n}{8} - 1$.

Разобьем множество вершин V на t попарно непересекающихся подмножеств $V_1, V_2, \ldots, V_t$, $t > 3$. В каждом из этих подмножеств выделим по одной вершине $u_i \in V_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Подмножества V_i, $i = 1, 2, \ldots, t$, должны быть такими, что на каждом из них возможно построение связного графа L_i со степенями вершин $d_{L_i}(u) = k$ при $u \in V_i \setminus \{u_i\}$ и $d_{L_i}(u_i) = k-2$. Клику на множестве вершин $\{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ обозначим через K_t. Зафиксируем клику K_t и графы $L_1, L_2, \ldots, L_t$ и обозначим $\bigcup\limits_{i=1}^{t} L_i = L$. Пусть C — произвольный гамильтонов цикл в клике K_t. Очевидно, что всякий граф вида $H = (\bigcup\limits_{i=1}^{t} L_i) \cup C$ является связным k-фактором в K_n. Векторы инциденций этих k-факторов лежат в пересечении опорных гиперплоскостей $x_e = 1$, $e \in E(L)$. Таким образом, эта конструкция, очевидно, определяет взаимнооднозначное соответствие между вершинами грани многогранника $P_{k,n}$, определяемой условием $\sum_{e \in E(L)} x_e = |E(L)|$, и вершинами многогранника $P_{2,t}$ гамильтоновых циклов в K_t.

Определим границы существования этой конструкции, а именно, взаимные соотношения величин n, k и t, при которых она имеет смысл. Условие $t > 3$, введенное выше, очевидно (в противном случае в K_t не более одного гамильтонова цикла).

Найдем наибольшее t, при котором возможно разбиение множества V вершин графа K_n на попарно непересекающиеся подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_t$ с указанными выше свойствами. При рассмотрении этого вопроса мы будем пользоваться терминологией степенных последовательностей [12].

Последовательность целых неотрицательных чисел $d = (d_1, d_2, \ldots, d_m)$ называется *правильной*, если $m - 1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_m$ и $\sum_{i=1}^{m} d_i$ — четное число.

Правильная последовательность d называется *графической*, если существует граф, последовательность степеней вершин которого совпадает с d с точностью до перестановки. Этот граф называется *реализацией последовательности* d.

Широко известен критерий Эрдеша — Галлаи (см., например, [12]), согласно которому правильная последовательность d является графической тогда и только тогда, когда для каждого $j = 1, 2, \ldots, m-1$ верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{j} d_i \leq j(j-1) + \sum_{i=j+1}^{m} \min\{j, d_i\}. \tag{2}$$

Если при этом $\sum_{i=1}^{m} d_i \geq 2(m-1)$, последовательность d может быть реализована связным графом.

Лемма 1. *Пусть $k \geq 3$ — целое положительное число. Минимальное m, при котором существует связная реализация последовательности d с компонентами $d_1 = d_2 = \ldots = d_{m-1} = k$, $d_m = k - 2$, при четном k равно $k + 2$, при нечетном k равно $k + 3$.*

Доказательство. Заметим, что при нечетном k величина m не может быть равной $k + 2$, так как в этом случае $\sum_{i=1}^{m} d_i = (m-1)k + k - 2$ является нечетным числом и последовательность d не является правильной. Предположим, что $m = k + 1$ (при любом k). Тогда при $j = m - 1$ не выполняется неравенство вида (2), поскольку его левая часть равна k^2, а правая часть равна $k^2 - 2$. Таким образом, $m \geq k + 2$ и $m \geq k + 3$ при четном и нечетном k соответственно.

Теперь построим непосредственно связную реализацию последовательности d на множестве вершин $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ при $m = k + 2$, если k четно, и $m = k + 3$, если k нечетно.

Пусть k четно и $m = k + 2$. На вершинах $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\}$ построим полный граф. Удалим из него $(k-2)/2$ попарно несмежных ребер. В оставшемся графе $m - (k-2)$ вершин будут иметь степень k и $k - 2$ вершин — степень $k - 1$. Построение завершается добавлением ребер, соединяющих вершину v_m с вершинами степени $k - 1$.

При нечетном k и $m = k + 3$ вновь построим на $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k+2}\}$ полный граф и удалим из него ребра $v_{k+2}v_1, v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-3}v_{k-2}, v_{k-2}v_{k-1}, v_kv_{k+1}$. Вершины полученного графа будут иметь степени $d(v_i) = k - 1$ при $i = 1, 2, \ldots, k - 2$, $d(v_i) = k$ при $i = k - 1, k, k + 1, k + 2$ и $d(v_{k+3}) = 0$. Добавив к этому графу ребра $v_{k+3}v_i$, $i = 1, 2, \ldots, k - 2$, получим граф, реализующий последовательность d.

Лемма доказана.

Для сокращения выкладок введем функцию $\nu(k)$, принимающую значение $k+2$ при четном k и значение $k + 3$ при нечетном k. Положим $t = \left\lfloor \dfrac{n}{\nu(k)} \right\rfloor$. Если n кратно $\nu(k)$, множества V_i, $i = 1, 2, \ldots, t$, можно выбрать так, что $|V_i| = \nu(k)$. В противном случае положим, что $|V_i| = \nu(k)$ лишь для $i = 1, 2, \ldots, t - 1$, а в качестве V_t возьмем множество $V_t = V \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{t-1} V_i$.

Пользуясь критерием Эрдеша — Галлаи, покажем, что на таком $V_t = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ также можно построить связный граф L_t, реализующий степенную последовательность d с компонентами $d_i = d_{L_t}(v_i) = k$ для всех $i = 1, 2, \dots, m-1$ и $d_m = d_{L_t}(v_m) = k-2$. Ясно, что $\nu(k) < |V_t| < 2\nu(k)$. Кроме того, заметим, что в силу четности величины kn при нечетном k величина $|V_t| = n - \sum_{i=1}^{t-1} \nu(k)$ четна. Это означает, что $k|V_t|$ всегда четно. Тогда $\sum_{i=1}^{m} d_i = (m-1)k + k - 2 = mk - 2$ четно, и, следовательно, d правильная. Покажем графичность последовательности d. Левая часть неравенства (2) для каждого $j = 1, 2, \dots, m-1$ имеет вид $\sum_{i=1}^{j} d_i = kj$. Если $j > k$, то

$$-\sum_{i=1}^{j} d_i + j(j-1) + \sum_{i=j+1}^{m} \min\{j, d_i\} \geq -kj + j(j-1) = j(-k+j-1) \geq 0.$$

Если $j \leq k$, имеем

$$-kj + j(j-1) + \sum_{i=j+1}^{m-1} j + \min\{j, k-2\}$$

$$= -kj + j(j-1) + (m-1-j)j + \min\{j, k-2\} = j(-k+m-2) + \min\{j, k-2\} \geq 0,$$

так как $m - k - 2 > \nu(k) - (k+2) \geq 0$. Таким образом, условия критерия Эрдеша — Галлаи выполняются и последовательность d является графической. Существование связной реализации следует из того, что

$$\sum_{i=1}^{m} d_i = \sum_{i=1}^{m-1} k + k - 2 = mk - 2 > 2(m-1).$$

Итак, описываемая в данном разделе конструкция возможна лишь при $t\nu(k) \leq n$. Отсюда $\nu(k) \leq \dfrac{n}{t}$, что в силу условия $t \geq 4$ эквивалентно $\left\lceil \dfrac{k}{2} \right\rceil \leq \dfrac{n}{8} - 1$.

3. Сохранение смежности вершин и основные следствия

Лемма 2. *Пусть $k \geq 3$ и $\left\lceil \dfrac{k}{2} \right\rceil \leq \dfrac{n}{8} - 1$, C_1 и C_2 — два различных гамильтонова цикла в K_t и $H_i = L \cup C_i$, $i = 1, 2$, — соответствующие связные k-факторы в K_n. Вершины x^{H_1} и x^{H_2} смежны в многограннике $P_{k,n}$ тогда и только тогда, когда вершины x^{C_1} и x^{C_2} смежны в многограннике $P_{2,t}$.*

Доказательство. Заметим, что $H_2 = (H_1 \setminus C_1) \cup C_2$. Значит, $x^{H_2} = x^{H_1} - x^{C_1} + x^{C_2}$. Всякая точка, лежащая на отрезке, соединяющем x^{H_1} и x^{H_2}, представима в виде

$$\bar{x} = (1-\lambda)x^{H_1} + \lambda x^{H_2} = (1-\lambda)x^{H_1} + \lambda(x^{H_1} - x^{C_1} + x^{C_2})$$

$$= x^{H_1} - \lambda x^{C_1} + \lambda x^{C_2} = x^{H_1 \setminus C_1} + (1-\lambda)x^{C_1} + \lambda x^{C_2} = x^L + (1-\lambda)x^{C_1} + \lambda x^{C_2}, \qquad (3)$$

где $0 < \lambda < 1$.

Предположим, что при некотором $\lambda_* \in (0, 1)$ точка $\bar{x} = (1-\lambda_*)x^{H_1} + \lambda_* x^{H_2}$ представима в виде выпуклой комбинации остальных вершин многогранника $P_{k,n}$:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x^{M_j},$$

где $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, p$, и среди связных k-факторов $M_1, M_2, \dots, M_p$ есть отличные от H_1 и H_2. Совмещая последнее разложение с разложением (3), получим

$$x^L + (1-\lambda_*)x^{C_1} + \lambda_* x^{C_2} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x^{M_j} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x^{M_j \cap (K_n \setminus K_t)} + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x^{M_j \cap K_t}.$$

Так как точки x^{M_j} — целочисленные, $L \subseteq K_n \setminus K_t$, $C_1, C_2 \subset K_t$ и все рассматриваемые комбинации выпуклые, то при $e \in E(K_n \setminus K_t)$ имеем $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_e^{M_j} = x_e^L$. Это означает, что для каждого $j = 1, 2, \ldots, p$ непременно $x^{M_j \cap (K_n \setminus K_t)} = x^L$ или, что то же, $M_j \cap (K_n \setminus K_t) = L$. Таким образом,

$$\bar{x} = x^L + (1 - \lambda_*)x^{C_1} + \lambda_* x^{C_2} = x^L + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x^{M_j \cap K_t},$$

и, следовательно,

$$(1 - \lambda_*)x^{C_1} + \lambda_* x^{C_2} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x^{M_j \cap K_t}.$$

Легко заметить, что для каждого $j = 1, 2, \ldots, p$ граф $M_j \cap K_t$ является гамильтоновым циклом в клике K_t, так как в противном случае графы M_j не являются связными.

По сути показано, что точка, лежащая на отрезке, соединяющем вершины x^{H_1} и x^{H_2} многогранника $P_{k,n}$, представима в виде выпуклой комбинации остальных вершин тогда и только тогда, когда аналогичное построение возможно для вершин x^{C_1} и x^{C_2} в многограннике $P_{2,t}$.

Лемма доказана.

Теперь простыми следствиями лемм 1 и 2 являются следующие результаты. Из NP-полноты проверки несмежности вершин многогранника задачи коммивояжера [7] имеем следующую теорему.

Теорема 1. *При* $k \geq 3$ *и* $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leq \frac{n}{8} - 1$ *задача проверки несмежности вершин многогранника связных* k*-факторов в* K_n NP*-полна.*

В силу леммы 1 наибольшее t равно $\left\lfloor \frac{n}{\nu(k)} \right\rfloor$. Подставляя эту оценку в (1), получим теорему.

Теорема 2. *При* $k \geq 3$ *и* $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leq \frac{n}{8} - 1$ *для кликового числа графа многогранника связных* k*-факторов справедлива оценка*

$$\omega(G_{k,n}) > 2^{\sqrt{\lfloor \frac{n}{\nu(k)} \rfloor / 2 - 2}}.$$

4. Заключение

Построенная в данной работе конструкция может интерпретироваться как следующий вывод: многогранник симметричной задачи коммивояжера комбинаторно эквивалентен грани (которых на самом деле много) многогранника связных k-факторов. В целом приведенный в статье результат естественным образом вписывается в идеологию, активно развиваемую в работах В. А. Бондаренко, А. Н. Максименко [6; 8; 13] и др., а именно: многие комбинаторные характеристики полиэдральных графов NP-трудных задач имеют экспоненциальный характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Padberg M. W., Rinaldi G.** A branch and cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems // SIAM Review. 1991. Vol. 33, no. 1. P. 60–100. doi: 10.1137/1033004.
2. **Grotschel M., Holland O.** Solution of large-scale symmetric traveling salesman problems // Math. Progr. 1991. Vol. 51, no. 1–3. P. 141–202. doi: 10.1007/BF01586932.
3. **Crowder H., Johnson E. L., Padberg M. W.** Solving large-scale zero-one linear programming problems // Operations Research. 1983. Vol. 31, no. 5. P. 803–834. doi: 10.1287/opre.31.5.803.
4. **Simanchev R. Yu., Urazova I. V.** Cutting planes algorithm for the connected k-factor problem using the facet inequalities [e-resource] // Proc. OPTIMA-2017 Conf. (Petrovac, Montenegro, October 2–7). 2017. P. 517–523. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1987/paper74.pdf.

5. **Grotschel M., Wakabayashi Y.** A cutting plane algorithm for a clustering problem // Math. Progr. 1989. Vol. 45, no. 1–3. P. 59–96. doi: 10.1007/BF01589097 .
6. **Бондаренко В. А., Максименко А. Н.** Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М.: ЛКИ, 2008. 184 с.
7. **Papadimitriou C. H.** The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complete // Math. Progr. 1978. Vol. 14, no. 1. P. 312–324. doi: 10.1007/BF01588973 .
8. **Бондаренко В. А.** Неполиномиальная нижняя оценка сложности задачи коммивояжера в одном классе алгоритмов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 9. С. 45–50.
9. **Edmonds J.** Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices // J. Research National Bureau Standards. Sec. B. 1965. Vol. 69. P. 125–130.
10. Reductions to 1-matching polyhedra / J. Araoz, W. H. Cunningham, J. Edmonds, J. Green-Krotki // Networks. 1983. Vol. 13. P. 455–473. doi: 10.1002/net.3230130403 .
11. **Gerards A. M. H.** Matching // Handbooks in Operations Research and Management Science / eds. M.O. Ball, T.L. Magnanti, C.L. Monma and G.L. Nemhause. Amsterdam: Elsevier, 1995. Vol. 7. P. 135–224. doi: 10.1016/S0927-0507(05)80120-3 .
12. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев и др. М.: Наука, 1990. 384 с.
13. **Maksimenko A. N.** The common face of some 0/1-polytopes with NP-complete nonadjacency relation // J. Math. Sci. 2014. Vol. 203, iss. 6. P. 823–832. doi: 10.1007/s10958-014-2172-9 .

Симанчев Руслан Юрьевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. каф. ПОЗИ
Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского;
науч. сотрудник
Омский научный центр СО РАН,
г. Омск
e-mail: osiman@rambler.ru

Поступила 05.02.2018

REFERENCES

1. Padberg M.W., Rinaldi G. A Branch and cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM Review*, 1991, vol. 33, no. 1, pp. 60–100. doi: 10.1137/1033004 .
2. Grotschel M., Holland O. Solution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *Math. Progr.*, 1991, vol. 51, no. 1-3, pp. 141–202. doi: 10.1007/BF01586932 .
3. Crowder H., Johnson E.L., Padberg M.W. Solving large-scale zero-one linear programming problems. *Operations Research*, 1983, vol. 31, no. 5, pp. 803–834. doi: 10.1287/opre.31.5.803 .
4. Simanchev R.Yu., Urazova I.V. Cutting planes algorithm for the connected k-factor problem using the facet inequalities [e-resource]. *Proc. OPTIMA-2017 Conf.*, Yu.G. Evtushenko, M.Yu. Khachay, O.V. Khamisov, Yu.A. Kochetov, V.U. Malkova, M.A. Posypkin (eds.), 2017, pp. 517–523. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1987/paper74.pdf .
5. Grotschel M., Wakabayashi Y. A cutting plane algorithm for a clustering problem. *Math. Progr.*, 1989, vol. 45, no. 1–3, pp. 59–96. doi: 10.1007/BF01589097 .
6. Bondarenko V.A., Maksimenko A.N. *Geometricheskie konstrukcii i slozhnost' v kombinatornoj optimizacii.* [Geometric constructions and complexity in combinatorial optimization]. Moscow: LKI Publ., 2008, 184 p. ISBN: 978-5-382-00687-1 .
7. Papadimitriou C. H. The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complete. *Math. Progr.*, 1978, vol. 14, no. 1, pp. 312–324. doi: 10.1007/BF01588973 .
8. Bondarenko V.A. Nonpolynomial lower bounds for the complexity of the traveling salesman problem in a class of algorithms. *Autom. Remote Control*, 1983, vol. 44, no. 1, pp. 1137–1142.
9. Edmonds J. Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices. *J. Research National Bureau Standards*, Sec. B, 1965, vol. 69, pp. 125–130.
10. Araoz J., Cunningham W.H., Edmonds J., Green-Krotki J. Reductions to 1-matching Polyhedra. *Networks*, 1983, vol. 13, pp. 455–473. doi: 10.1002/net.3230130403 .
11. Gerards A.M.H. Matching. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, M.O. Ball, T.L. Magnanti, C.L. Monma and G.L. Nemhause (eds.), Amsterdam: Elsevier, 1995, vol. 7, pp. 135–224. doi: 10.1016/S0927-0507(05)80120-3 .

12. Mel'nikov O., Tyshkevich R.I., Emelichev V.A., Sarvanov V.I. *Lectures on graph theory.* Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag. 1994, 371 p. ISBN: 3-411-17121-9 . Oroginal Russian text published in Emelichev V.A. et al. *Lekcii po teorii grafov,* Moscow, Nauka Publ., 1990, 384 p.
13. Maksimenko A.N. The common face of some 0/1-polytopes with NP-complete nonadjacency relation. *J. Math. Sci.*, 2014, vol. 203, no. 6, pp. 823–832. doi: 10.1007/s10958-014-2172-9 .

The paper was received by the Editorial Office on February 5, 2018.

Ruslan Yur'evich Simanchev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Omsk State University, Omsk, 644077 Russia; Omsk Scientific Center SB RAS, Omsk, 644040 Russia; Omsk State University, Omsk, 644077 Russia, e-mail: osiman@rambler.ru .