ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 517.977

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ ТОНКОГО ЭЛЛИПСА[1]

М. И. Русанова

Настоящая работа посвящена построению формального асимптотического разложения плотности потенциала двойного слоя тонкого эллипса, толщина которого характеризуется малым параметром. При этом сам потенциал является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа во внешности тонкого эллипса. Его физической интерпретацией может быть функция тока при обтекании тонкого тела ламинарным потоком идеальной жидкости. Надо отметить, что само решение данной краевой задачи не являлось целью статьи, так как оно легко могло быть найдено конформным отображением внешности круга на внешность эллипса. Однако данный пример является модельным для рассматриваемого в работе метода нахождения асимптотического разложения решения краевых задач для уравнения Лапласа во внешности тонких областей, и он легко может быть перенесен в трехмерное пространство, где аппарат конформных отображений не работает. Данный метод основан на разложении по малому параметру левой и правой частей уравнения на потенциал двойного слоя и последующем приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях этого малого параметра. В настоящей работе рассмотрены сложности построения асимптотического разложения данным способом и изложен ряд нерешенных пока проблем.

Ключевые слова: многомерный интеграл, малый параметр, асимптотическое разложение, метод вычитания особенностей, потенциал двойного слоя, уравнение Лапласа.

M. I. Rusanova. Asymptotic expansion for the density of the double layer potential of a thin ellipse.

The paper is devoted to the construction of a formal asymptotic expansion for the density of the double layer potential of a thin ellipse whose width is characterized by a small parameter. The potential is a solution to the Dirichlet problem for the Laplace equation in the exterior of the ellipse. The physical interpretation can be the function of a laminar flow of an ideal fluid around a thin body. We should note that the solution of this boundary value problem was not the aim of the paper, since it can be easily found by a conformal mapping of the exterior of a disk to the exterior of the ellipse. However, this problem can be viewed as a model example for the method of finding asymptotic expansions for solutions of boundary value problems for the Laplace equation in the exterior of thin domains that we consider in this paper. The analysis can be easily transferred to three-dimensional space, where the techniques of conformal mappings do not work. The method is based on expanding both sides of the equation for the double layer potential in the small parameter and then equating the coefficients at the same powers of the parameter. We consider the difficulties of constructing the asymptotic expansion by this method and formulate a number of unsolved problems.

Keywords: multidimensional integral, small parameter, asymptotic expansion, singularity subtraction method, double layer potential, Laplace equation.

MSC: 35J25, 35C20, 31A10

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-229-234

Введение

В настоящей работе рассматривается задача, поставленная М. В. Федорюком в [1]. В одном частном разговоре А. М. Ильин отметил, что полученное в работе [1] асимптотическое приближение лишено каких-либо преимуществ асимптотического ряда, и поэтому имеет смысл попытаться либо улучшить его вид, либо доказать, что это сделать невозможно. Здесь мы рассмотрим более простую вспомогательную задачу в двумерном пространстве, методы решения которой могут быть перенесены на трехмерное пространство.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

1. Постановка задачи

Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле вне тонкого эллипса

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega', \\ u(x) = \varphi(\alpha), & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2)$, Ω' — внешность эллипса, $\Gamma = \partial\Omega$ — эллипс, $\varphi(\alpha)$ — граничная функция, зависящая от полярного угла α так, что $\varphi(\alpha) = f(\cos\alpha)$, $f \in C^\infty[-1, 1]$ (рис. 1).

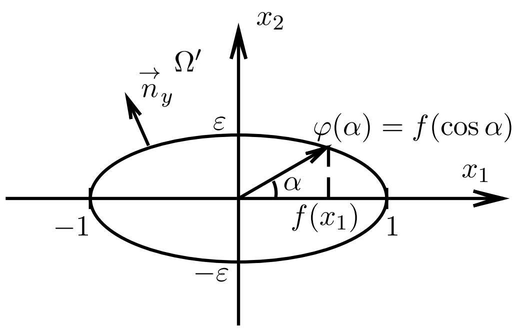

Рис. 1.

Пусть $y = (y_1, y_2)$. Как известно (см., например, [2, гл. 6, § 6.8]), решение краевой задачи (1.1) представимо в виде

$$u(x) = \int\limits_\Gamma \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} \, dS_y + C, \tag{1.2}$$

где $\nu(y)$ — плотность потенциала двойного слоя, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$\nu(x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_\Gamma \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} \, dS_y + \frac{\varphi(x) - C}{\pi}, \tag{1.3}$$

а постоянная C определяется из условия разрешимости уравнения (1.3).

Обозначим $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ через r. Параметризуем границу Γ следующим образом:

$$\Gamma : \begin{cases} x_1 = \cos\alpha, \\ x_2 = \varepsilon \sin\alpha, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_1 = \cos\gamma, \\ y_2 = \varepsilon \sin\gamma, \end{cases} \quad \text{где } \alpha, \gamma \in [-\pi, \pi].$$

Тогда выражения (1.2) и (1.3) можно переписать следующим образом:

$$u(r, \alpha, \varepsilon) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \nu(\gamma, \varepsilon) \frac{-\varepsilon + \varepsilon r \cos\alpha \cos\gamma + r \sin\alpha \sin\omega}{(\cos\gamma - r\cos\alpha)^2 + (\varepsilon \sin\gamma - r \sin\alpha)^2} \, d\gamma + C(\varepsilon), \tag{1.4}$$

$$\nu(\alpha, \varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \nu(\gamma, \varepsilon) \frac{\varepsilon(\cos(\alpha - \gamma) - 1)}{(\cos\gamma - \cos\alpha)^2 + \varepsilon^2(\sin\gamma - \sin\alpha)^2} \, d\gamma + \frac{\varphi(\alpha) - C(\varepsilon)}{\pi}. \tag{1.5}$$

Итак, наша задача заключается в том, чтобы найти асимптотическое разложение функции $\nu(\gamma, \varepsilon) \in C^\infty[-\pi, \pi]$ при $\varepsilon \to 0$. Отметим, что подставив затем разложение $\nu(\alpha, \varepsilon)$ в (1.4) и исследовав полученный интеграл, можно найти двухмасштабное асимптотическое разложение функции $u(r, \alpha, \varepsilon)$ по малому параметру $\varepsilon > 0$.

2. Построение формального асимптотического разложения

После замены $\xi = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $\eta = \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, $g(\xi,\varepsilon) = \nu(2\operatorname{arctg}\xi,\varepsilon)$ уравнение (1.5) примет вид

$$g(\xi,\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\eta,\varepsilon)\frac{\varepsilon(1+\xi^2)d\eta}{(\xi+\eta)^2+\varepsilon^2(\xi\eta-1)^2} + \frac{\varphi(2\operatorname{arctg}\xi) - C(\varepsilon)}{\pi}. \tag{2.1}$$

Теорема. *Пусть $h(x)\in C^2(-\infty,\infty)$. Тогда справедливо асимптотическое равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(y)\frac{\varepsilon(1+x^2)dy}{(x+y)^2+\varepsilon^2(xy-1)^2} = \pi h(-x) + \varepsilon(1+x^2)$$

$$\times\Bigg(-2h(-x) + \int\limits_{-1}^{1}\frac{h(-x+t)-h(-x)-t\,h'(-x)}{t^2}\,dt + \int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{h(-x+t)}{t^2}\,dt + \int\limits_{1}^{\infty}\frac{h(-x+t)}{t^2}\,dt\Bigg)$$

$$+\varepsilon^2\pi(1+x^2)h'(-x) + O(\varepsilon^3),\quad \varepsilon\to 0.$$

З а м е ч а н и е 1. Здесь через $C^2(-\infty,\infty)$ мы обозначаем линейное пространство с нормой $||h(x)||_{C^2(-\infty,\infty)} = \max\big\{\sup\limits_{x\in(-\infty,\infty)}|h(x)|, \sup\limits_{x\in(-\infty,\infty)}|h'(x)|, \sup\limits_{x\in(-\infty,\infty)}|h''(x)|\big\}$. При этом функция $h(x)\in C^2(-\infty,\infty)$ тогда и только тогда, когда $||h(x)||_{C^2(-\infty,\infty)}<\infty$, т. е. $h(x)$, $h'(x)$ и $h''(x)$ ограничены на бесконечности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя асимптотическое равенство $1/(1+x) \overset{x\to 0}{=} 1+O(x)$, получим асимптотическое равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(y)\frac{\varepsilon(1+x^2)dy}{(x+y)^2+\varepsilon^2(xy-1)^2} = \begin{bmatrix} y=-x+t, \\ dy=dt \end{bmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(-x+t)\frac{\varepsilon(1+x^2)dt}{t^2+\varepsilon^2(-x^2-1+xt)^2}$$

$$= \varepsilon(1+x^2)\Bigg(\int\limits_{-1}^{1}\frac{h(-x+t)}{t^2+\varepsilon^2(1+x^2-xt)^2}\,dt + \int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{h(-x+t)}{t^2}\,dt + \int\limits_{1}^{\infty}\frac{h(-x+t)}{t^2}\,dt\Bigg) + O(\varepsilon^3).$$

В последней сумме лишь один интеграл

$$I(\varepsilon) = \int\limits_{-1}^{1}\frac{h(-x+t)}{t^2+\varepsilon^2(1+x^2-xt)^2}\,dt$$

нетривиальным образом зависит от ε. Следуя методу вычитания особенностей [3], воспользуемся тождеством

$$h(-x+t) = h(-x) + h'(-x)t + \frac{h(-x+t)-h(-x)-h'(-x)t}{t^2}\cdot t^2.$$

Тогда мы получим разбиение на три слагаемых интеграла $I(\varepsilon) = I_1(\varepsilon)+I_2(\varepsilon)+I_3(\varepsilon)$, где

$$I_1(\varepsilon) = \int\limits_{-1}^{1}\frac{h(-x)}{t^2+\varepsilon^2(1+x^2-xt)^2}\,dt = \int\limits_{-1}^{1}\frac{h(-x)}{t^2(1+\varepsilon^2x^2)-2\varepsilon^2(1+x^2)xt+\varepsilon^2(1+x^2)^2}\,dt$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{h(-x)}{\left(t\sqrt{1+\varepsilon^2x^2} - \dfrac{\varepsilon^2(1+x^2)}{\sqrt{1+\varepsilon^2x^2}}\right)^2 + \varepsilon^2(1+x^2)^2\left(1 - \dfrac{\varepsilon^2x^2}{1+\varepsilon^2x^2}\right)}\, dt$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+\varepsilon^2x^2)h(-x)dt}{(t(1+\varepsilon^2x^2) - \varepsilon^2(1+x^2))^2 + \varepsilon^2(1+x^2)^2} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{h(-x)d(t(1+\varepsilon^2x^2))}{(t(1+\varepsilon^2x^2) - \varepsilon^2(1+x^2))^2 + \varepsilon^2(1+x^2)^2}$$

$$= h(-x)\frac{1}{\varepsilon(1+x^2)} \operatorname{arctg} \frac{t(1+\varepsilon^2x^2) - \varepsilon^2(1+x^2)}{\varepsilon(1+x^2)}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2h(-x)}{\varepsilon(1+x^2)} \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon(1+x^2)} + O(\varepsilon^3)$$

$$= \frac{2h(-x)}{\varepsilon(1+x^2)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon(1+x^2) + O(\varepsilon^3)\right) = \frac{h(-x)\pi}{\varepsilon(1+x^2)} - 2h(-x) + O(\varepsilon^2),$$

$$I_2(\varepsilon) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{h'(-x)t}{t^2 + \varepsilon^2(1+x^2-xt)^2}\, dt = h'(-x) \int\limits_{-1}^{1} \frac{td(t(1+\varepsilon^2x^2))}{(t(1+\varepsilon^2x^2) - \varepsilon^2(1+x^2))^2 + \varepsilon^2(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{h'(-x)}{1+\varepsilon^2x^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{t(1+\varepsilon^2x^2)d(t(1+\varepsilon^2x^2))}{(t(1+\varepsilon^2x^2) - \varepsilon^2(1+x^2))^2 + \varepsilon^2(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{h'(-x)}{1+\varepsilon^2x^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(t(1+\varepsilon^2x^2) - \varepsilon^2(1+x^2) + \varepsilon^2(1+x^2))d(t(1+\varepsilon^2x^2))}{(t(1+\varepsilon^2x^2) - \varepsilon^2(1+x^2))^2 + \varepsilon^2(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{h'(-x)}{1+\varepsilon^2x^2} \cdot \frac{1}{2} \ln\Big((t(1+\varepsilon^2x^2) - \varepsilon^2(1+x^2))^2 + \varepsilon^2(1+x^2)^2\Big)\Big|_{-1}^{1}$$
$$+ \frac{h'(-x)\varepsilon^2(1+x^2)}{1+\varepsilon^2x^2} \frac{1}{\varepsilon(1+x^2)} \operatorname{arctg} \frac{t(1+\varepsilon^2x^2) - \varepsilon^2(1+x^2)}{\varepsilon(1+x^2)}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{h'(-x)}{2} \ln\left(\frac{(1+\varepsilon^2)^2 + \varepsilon^2(1+x^2)^2}{(1+\varepsilon^2+2\varepsilon^2x^2)^2 + \varepsilon^2(1+x^2)^2}\right) + \frac{h'(-x)\varepsilon}{1+\varepsilon^2x^2}\pi + O(\varepsilon^2) = \varepsilon\pi h'(-x) + O(\varepsilon^2),$$

$$I_3(\varepsilon) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{h(-x+t) - h(-x) - th'(-x)}{t^2} \frac{t^2}{t^2 + \varepsilon^2(1+x^2-xt)^2}\, dt$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{h(-x+t) - h(-x) - th'(-x)}{t^2} \frac{\left(t^2 + \varepsilon^2(1+x^2-xt)^2\right) - \varepsilon^2(1+x^2-xt)^2}{t^2 + \varepsilon^2(1+x^2-xt)^2}\, dt$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{h(-x+t) - h(-x) - th'(-x)}{t^2}\, dt + O(\varepsilon^2).$$

Складывая данные разложения, получаем утверждение теоремы. □

Введем линейный оператор $F : C^\infty(-\infty, +\infty) \to C^\infty(-\infty, +\infty)$, действующий по правилу

$$F[f](\xi) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(-\xi+t) - f(-\xi) - tf'(-\xi)}{2t^2}\, dt + \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{f(-\xi+t)}{2t^2}\, dt + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{f(-\xi+t)}{2t^2}\, dt.$$

Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$g(\xi, \varepsilon) = g(-\xi, \varepsilon) + \frac{\varphi(2\operatorname{arctg}\xi) - C(\varepsilon)}{\pi}$$

$$+\frac{\varepsilon(1+\xi^2)}{\pi}\big(-2g(-\xi,\varepsilon)+2F[g](\xi,\varepsilon)\big)+\varepsilon^2(1+\xi^2)\pi g'(-\xi,\varepsilon)+\dots. \tag{2.2}$$

Будем искать асимптотическое разложение функции $g(\xi,\varepsilon)$ в виде формального ряда $\varepsilon^{-1}g_0(\xi)+g_1(\xi)+\varepsilon g_1(\xi)+\dots$, а разложение постоянной $C(\varepsilon)$ — в виде формального ряда $C_0+\varepsilon C_1+\dots$. Подставляя эти разложения в уравнение (2.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-1}: \quad g_{-1}(\xi)=g_{-1}(-\xi),\\
&\varepsilon^{0}: \quad g_0(\xi)=g_0(-\xi)+\frac{\varphi(2\operatorname{arctg}\xi)-C_0}{\pi}+\frac{1+\xi^2}{\pi}\big(-2g_{-1}(-\xi)+2F[g_{-1}](\xi)\big),\\
&\varepsilon: \quad g_1(\xi)=g_1(-\xi)-\frac{C_1}{\pi}+\frac{1+\xi^2}{\pi}\big(-2g_0(-\xi)+2F[g_0](\xi)\big)+(1+\xi^2)\pi g'_{-1}(-\xi),\\
&\dots.
\end{aligned}$$

Как известно, любая функция представима в виде суммы двух функций, одна из которых является четной, а вторая — нечетной. Будем использовать обозначение

$$f(\xi)=\Lambda f(\xi)+Nf(\xi),$$

где $\Lambda f(\xi)$ — слагаемое, являющееся четной функцией, а $Nf(\xi)$ — нечетной функцией.

Из первого уравнения следует, что $g_{-1}(\xi)$ — четная функция, иначе говоря,

$$Ng_{-1}(\xi)=0. \tag{2.3}$$

Из второго уравнения следуют два уравнения:

$$2Ng_0(\xi)=\frac{N\varphi(2\operatorname{arctg}\xi)}{\pi}, \tag{2.4}$$

$$2g_{-1}(\xi)-2F[g_{-1}](\xi)=\frac{\Lambda\varphi(2\operatorname{arctg}\xi)-C_0}{1+\xi^2}. \tag{2.5}$$

Из третьего уравнения следует, что

$$2Ng_1(\xi)=\frac{1+\xi^2}{\pi}\big(2Ng_0(\xi)+2F[Ng_0](\xi)\big), \tag{2.6}$$

$$2\Lambda g_0(\xi)-2F[\Lambda g_0](\xi)=\pi^2\Lambda g'_{-1}(-\xi)-\frac{C_1}{1+\xi^2}. \tag{2.7}$$

Отсюда видно, что при достаточной гладкости граничной функции $\varphi(\alpha)$ нечетные части асимптотических коэффициентов легко находятся, и они также являются достаточно гладкими.

В нашем случае функция $\varphi(\alpha)=f(\cos\alpha)$ является четной, поэтому в силу равенств (2.3)–(2.7) и равенства $\Lambda g'_{-1}(-\xi)\equiv 0$ мы будем иметь четные асимптотические коэффициенты, удовлетворяющие уравнениям

$$g_{-1}(\xi)=F[g_{-1}](\xi)+\frac{\varphi(2\operatorname{arctg}\xi)-C_0}{2(1+\xi^2)}, \tag{2.8}$$

$$g_0(\xi)=F[g_0](\xi)-\frac{C_1}{2(1+\xi^2)} \tag{2.9}$$

и т. д.

З а м е ч а н и е 2. Нельзя считать, что мы окончательно построили формальное асимптотическое разложение, так как не доказано даже существование $g_{-1}(x)$, $g_0(x)$, являющихся первыми асимптотическими коэффициентами формального разложения. Для окончательного построения формального асимптотического разложения нам необходимо доказать разрешимость уравнений (2.8), (2.9) и вычислить значение постоянных C_0, C_1 из условия разрешимости. Для обоснования асимптотического разложения достаточно доказать устойчивость решений относительно малых в некоторой метрике возмущений правых частей уравнений вида (2.8).

Заключение

Итак, мы рассмотрели возможность применения асимптотических разложений интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра, для построения асимптотик решений краевых задач для уравнения Лапласа во внешности тонких областей. Отметим, что остаются вопросы существования, единственности и устойчивости решений построенных интегральных уравнений в некотором классе функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Федорюк М.В.** Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Труды семинара С.Л. Соболева. № 1. Новосибирск. 1980. С. 113–131.
2. **Ильин А.М.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 2005. 192 с. ISBN: 5-7271-0703-2 .
3. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 222 с.

Русанова Мария Игоревна
студент
Челябинский государственный университет,
г. Челябинск
e-mail: rusanova_mary94@mail.ru

Поступила 29.03.2018

REFERENCES

1. Fedoryuk M.V. The Dirichlet problem for the Laplace operator in the exterior of a thin body of revolution. *Tr. Semin. S. L. Soboleva*, 1980, no. 1, pp. 113–131 (in Russian).
2. Il'in A.M. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka Publ., 2005, 192 p. ISBN: 5-7271-0703-2 .
3. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize.* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. ISBN: 978-5-9221-1056-3 .

The paper was received by the Editorial Office on March 29, 2018.

Maria Igorevna Rusanova, undergraduate student, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: rusanova_mary94@mail.ru .