ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 519.17

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С $\theta_2 = -1$[1]

М. С. Нирова

Пусть дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет собственное значение $\theta_2 = -1$. Тогда $\Delta = \bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$, содержащим v клик Дельсарта вида $u^{\perp}$ порядка $k+1$. В случае $a_1 = 0$ имеем разбиение подграфа $\Delta(u)$ кликами $w^{\perp} - \{u\}$, $w \in \Gamma(u)$. Если существует сильно регулярный граф с параметрами (176,49,12,14), в котором окрестности вершин являются 7×7-решетками, то существует и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$. Если Δ содержит n-коклику $\{u, u_2, ..., u_n\}$, то $\Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^{n}\Gamma(u_i)$ содержит $k_3 - (n-1)(a_3+1)$ вершин. Отсюда получается новая верхняя граница для порядка клики в Γ_3. Более того, доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ и $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$ не существуют.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, собственное значение, сильно регулярный граф.

M. S. Nirova. On distance-regular graphs with $\theta_2 = -1$.

Let a distance-regular graph Γ of diameter 3 have eigenvalue $\theta_2 = -1$. Then $\Delta = \bar{\Gamma}_3$ is a pseudo-geometric graph for $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$ containing v Delsarte cliques $u^{\perp}$ of order $k+1$. In the case $a_1 = 0$ we have a partition of the subgraph $\Delta(u)$ by cliques $w^{\perp} - \{u\}$, where $w \in \Gamma(u)$. If there exists a strongly regular graph with parameters (176,49,12,14) in which neighborhoods of vertices are 7×7-lattices, then there exists a distance-regular graph with intersection array $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$. If Δ contains an n-coclique $\{u, u_2, ..., u_n\}$, then there are $k_3 - (n-1)(a_3+1)$ vertices in $\Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^{n}\Gamma(u_i)$, which yields a new upper bound for the order of a clique in Γ_3. Moreover, it is proved that distance-regular graphs with intersection arrays $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ and $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$ do not exist.

Keywords: distance-regular graph, eigenvalue, strongly regular graph.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-215-228

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ ($c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависит от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависят от выбора вершины u).

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется ровно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение через $pG_{\alpha}(s, t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется обобщенным четырехугольником и обозначается через $GQ(s, t)$.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 18-11-00067.

Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=(s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu=\alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры для некоторых натуральных чисел α,s,t, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$. В таких графах граница Хоффмана — Дельсарта для клик равна $s+1$ и каждая вершина вне $(s+1)$-клики L смежна с α вершинами из L. *Овоидом* псевдогеометрического графа для $pG_\alpha(s,t)$ называется коклика из $st/\alpha+1$ точек. Для овоида $\mathcal{O}$ достигается граница Хоффмана для коклик и каждая вершина вне $\mathcal{O}$ смежна с $t+1$ точками из $\mathcal{O}$. *Спредом* псевдогеометрического графа для $pG_\alpha(s,t)$ называется разбиение множества вершин множеством $\mathcal{S}$ клик порядка $s+1$.

Пусть G — группа автоморфизмов графа Γ. Тогда $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G. Для $g\in G$ положим $\mathrm{Fix}(g)=\{u\in\Gamma\mid u=u^g\}$, $\alpha_i(g)=|\{u\in\Gamma\mid d(u,u^g)=i\}|$. Для $u\in\Gamma$ положим $G_u=\{g\in G\mid u=u^g\}$.

В данной работе исследуются дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 сильно регулярен (равносильно $\theta_2=-1$). В [2] получен следующий результат.

Предложение 1 [2, лемма 4, п. (1)]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого граф Γ_3 сильно регулярен. Тогда $b_2=a_3+1$, $b_1=tc_2$ и граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k,t)$.*

Теорема 1 дает частичный ответ на вопрос о существовании дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{7,7,6;1,1,2\}$. В предложении 2 найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(176,49,12,14)$, с помощью которого возможно построение вышеуказанного дистанционно регулярного графа, а в следствии 2 найдены простые композиционные факторы группы автоморфизмов вершинно симметричного сильно регулярного графа с параметрами $(176,49,12,14)$.

Теорема 1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с $a_1=0$ и $\theta_2=-1$. Тогда для графа $\Delta=\bar\Gamma_3$ имеем разбиение подграфа $\Delta(u)$ кликами $w^\perp-\{u\}$, $w\in\Gamma(u)$. Если существует сильно регулярный граф с параметрами $(176,49,12,14)$, в котором окрестности вершин являются 7×7-решетками, то существует и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7,7,6;1,1,2\}$.*

Предложение 2. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(176,49,12,14)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(G)$. Тогда $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11\}$ и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *Ω — пустой граф, $p=11$ и $\alpha_1(g)=44$ или $p=2$ и $\alpha_1(g)=24l+8$;*

(2) *Ω является β-кликой, либо*

(*i*) *$p=7$, $\beta=1$ и $\alpha_1(g)=49,133$, либо*

(*ii*) *$p=2$, $\beta=2,4,6,8$ и $\alpha_1(g)=24l+8+5\beta$, либо*

(*iii*) *$p=3$, $\beta=2,5,8$ и $\alpha_1(g)=36l-4+5\beta$;*

(3) *Ω является γ-кокликой, $\gamma=8,15,22$, $p=7$ и $\alpha_1(g)=84l-40+5\gamma$;*

(4) *Ω содержит ребро и является объединением (по крайней мере двух) изолированных клик, $p=2$ и порядок любой максимальной клики из Ω равен $2,4$ или 6;*

(5) *Ω содержит геодезический 2-путь и $p\le 11$.*

Следствие 1. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(176,49,12,14)$, группа $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве его вершин и $\bar T$ — цоколь группы $\bar G=G/O_2(G)$. Тогда либо $\bar T\cong M_{11}$, $|\bar T:\bar T_a|=11,22$, либо $\bar T\cong M_{22}$, группа $\bar T_a$ изоморфна $L_3(4)$ и имеет индекс 22 в $\bar T$.*

Существование сильно регулярного графа с параметрами (176,49,12,14), в котором окрестности вершин являются 7×7-решетками, остается неизвестным.

В теореме 2 получены новые верхние границы для порядков клик сильно регулярных графов Γ_3, уточняющие классическую границу Хофмана — Дельсарта. С помощью этих оценок доказано несуществование дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ и $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$ (несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ независимо получено в [3]).

Теорема 2. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с $\theta_2 = -1$ и граф Γ_3 содержит n-клику $\{u, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда $\Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^{n}\Gamma(u_i)$ содержит $k_3 - (n - 1)(a_3 + 1)$ вершин и для графа с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$ имеем $n \le 3$, с массивом $\{31, 24, 8; 1, 4, 24\}$ имеем $n \le 7$, с массивом $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ имеем $n \le 15$, с массивом $\{35, 30, 8; 1, 3, 28\}$ имеем $n \le 12$, с массивом $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$ имеем $n \le 6$, с массивом $\{39, 32, 10; 1, 4, 30\}$ имеем $n \le 9$, с массивом $\{43, 36, 11; 1, 4, 33\}$ имеем $n \le 10$, с массивом $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$ имеем $n \le 7$, с массивом $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$ имеем $n \le 3$, с массивом $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$ имеем $n \le 9$ с массивом $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$, имеем $n \le 6$, с массивом $\{49, 36, 5; 1, 4, 45\}$ имеем $n \le 10$, с массивом $\{51, 44, 13; 1, 4, 39\}$ имеем $n \le 12$, с массивом $\{54, 42, 11; 1, 3, 44\}$ имеем $n \le 15$.*

Следствие 2. *Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ и $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$ не существуют.*

1. Известные примеры

В этом разделе приведены небольшие известные примеры. Хотя известны бесконечные серии допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов с $\theta_2 = -1$, но в примитивном случае известно существование лишь конечного числа таких графов.

Пример 1.1. Пусть Γ — нечетный граф с массивом пересечений $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$. Тогда $v = 1+4+12+18 = 35$ и Γ имеет спектр $4^1, 2^{14}, -1^{14}, -3^6$. Далее, $\Delta = \bar{\Gamma}_3$ – псевдогеометрический граф для $pG_2(4, 3)$. Поэтому Δ – стандартное частное графа Джонсона $J(8, 4)$, в котором окрестности вершин изоморфны 4×4-решетке. Заметим, что графы Γ и Δ имеют одно и то же множество вершин.

Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и рассмотрим решетку $\Delta(u)$. Пусть $\Gamma(u)$ – столбец решетки, превращенный в коклику. Тогда для $w \in \Delta(u)$ пусть $w^\perp - \{u\}$ – строка решетки, проходящая через w ($\Gamma(w)$ также превращаем в коклику). Для $y \in \Gamma(w) - \{u\}$ пусть $y^\perp - \{w\}$ – проходящая через y прямая решетки $\Delta(w)$, пересекающая $u^\perp \cap \Delta(w)$. Наконец, для $z \in \Gamma(y) - \{w\}$ пусть $z^\perp - \{y\}$ – проходящая через z прямая решетки $\Delta(y)$, пересекающая $w^\perp \cap \Delta(y)$. Снова превращаем $\Gamma(y)$ и $\Gamma(z)$ в коклики. В итоге получается граф с массивом пересечений $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$.

Аналогично, позднее будем пытаться построить граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$ (см. разд. 2).

Пример 1.2. Пусть Γ – граф Сильвестра с массивом пересечений $\{5, 4, 2; 1, 1, 4\}$. Тогда $v = 1 + 5 + 20 + 10 = 36$ и Γ имеет спектр $5^1, 2^{16}, -1^{10}, -3^9$. Далее, $\bar{\Gamma}_3$ – псевдогеометрический граф для $pG_4(5, 4)$ и $\Sigma = \Gamma_3$ – сильно регулярный граф с параметрами (36,10,4,2) и неглавными собственными значениями $4, -2$. Отсюда граф Σ изоморфен 6×6-решетке и $\Sigma(u)$ — объединение двух изолированных 5-клик.

Пример 1.3. Пусть Γ – обобщенный шестиугольник порядка $(2, 2)$ с массивом пересечений $\{6, 4, 4; 1, 1, 3\}$. Тогда $v = 1 + 6 + 24 + 32 = 63$ и Γ имеет спектр $6^1, 3^{21}, -1^{27}, -3^{14}$. Далее, $\bar{\Gamma}_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_3(6, 4)$ и $\Sigma = \Gamma_3$ – сильно регулярный граф с параметрами (63,32,16,16) и неглавными собственными значениями $4, -4$.

Пример 1.4. Пусть Γ – свернутый 7-куб с массивом пересечений $\{7, 6, 5; 1, 2, 3\}$. Тогда $v = 1 + 7 + 21 + 35 = 64$ и Γ имеет спектр $7^1, 3^{21}, -1^{35}, -5^7$. Далее, $\bar{\Gamma}_3$ – псевдогеометрический граф для $pG_3(7, 3)$ и $\Sigma = \Gamma_3$ – сильно регулярный граф с параметрами (64,35,18,20) и неглавными собственными значениями $3, -5$.

П р и м е р 1.5. Пусть Γ – унитарный граф на неизотропных точках с массивом пересечений $\{12,10,5;1,1,8\}$. Тогда $v=1+12+120+75=208$ и Γ имеет спектр $12^1,4^{78},-1^{64},-4^{65}$. Далее, $\bar\Gamma_3$ – псевдогеометрический граф для $pG_8(12,10)$ и $\Sigma=\Gamma_3$ – сильно регулярный граф с параметрами (208,75,30,25) и неглавными собственными значениями $10,-5$.

П р и м е р 1.6. Пусть Γ – дуально полярный граф с массивом пересечений $\{14,12,8;1,3,7\}$. Тогда $v=1+14+56+64=135$ и Γ имеет спектр $14^1,5^{35},-1^{84},-7^{15}$.

По теореме 1 граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_7(14,4)$. Далее, граф $\Sigma=\Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $4,-8$ и является сильно регулярным с параметрами $(135,64,28,32)$.

2. Граф с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с $a_1=0$ и $\theta_2=-1$. Тогда для графа $\Delta=\bar\Gamma_3$ имеем разбиение подграфа $\Delta(u)$ кликами $w^\perp-\{u\}$, $w\in\Gamma(u)$.

В [4] с помощью полярности симметричной блок-схемы Г. Хигмена построен сильно регулярный граф с параметрами $(176,49,12,14)$ и группой автоморфизмов, изоморфной S_8, имеющей орбиты длин 8 и 168 на множестве вершин графа. К сожалению, этот граф не изоморфен $\bar\Gamma_3$ для дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$ или с массивом $\{8,7,5;1,1,4\}$. Тогда граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_2(7,6)$ или $pG_4(8,7)$ и Γ_3 — псевдогеометрический граф для $pG_{15}(21,5)$ или $pG_7(14,4)$ соответственно.

В [5] изучаются сильно φ-однородные треугольные расширения сетей типа (n,m) (частичных геометрий $pG_{m-1}(n-1,m-1)$). Точечный граф такого расширения является псевдогеометрическим графом для $pG_\varphi(n,n-1)$, поэтому φ делит $n(n^2-1)$ и $\varphi(2n-\varphi)$ делит $n^2(n^2-1)$. Заметим, что эти условия выполнены, если $\varphi=n-1,n$ или $n+1$ (эти случаи исследованы в [5]).

Пусть $\varphi=n-e$ с $e>1$. Тогда $n-e$ делит $e(e^2-1)$ и n^2-e^2 делит $e^2(e^2-1)$, причем $n\le e^2$. Для максимально возможного значения $n=e^2$ все условия делимости выполнены. Если $e=q$ — степень простого числа, то параметры точечного графа расширенной сети $(1+q^2+q(q+1)(q^2+1),q^4,(q^2-1)(q^2-q),q^2(q^2-q))$ совпадают с параметрами дополнения для графа прямых в $PG(3,q)$ (см. [6, гл. 3]).

Кроме $n=e^2$ существуют спорадические возможности для $e>3$. Например:

(1) $e=4$ дает $n=6$ или 8 и в треугольном случае возможны расширенные сети типов (6,2) и (8,4) (псевдо $pG_4(8,7)$ является локально $pG_3(7,3)$-графом).

(2) $e=5$ дает $n=7$ (псевдо $pG_2(7,6)$ является локально $GQ(6,1)$-графом), 10 или 15.

(3) $e=6$ дает $n=8$, 9 или 36.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Допустим, что сильно регулярный локально 7×7-граф Δ с параметрами $(176,49,12,14)$ существует. Мы построим дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$, для которого граф Γ_3 равен Δ.

Зафиксируем вершину $u\in\Delta$ и пусть $\Gamma(u)$ — первый столбец решетки $\Delta(u)$, превращенный в коклику. Далее, для $w\in\Gamma(u)$ пусть $w^\perp-\{u\}$ — соответствующая строка решетки $\Delta(u)$, превращенная в коклику. Для $y\in\Gamma(w)-\{u\}$ пусть $y^\perp-\{w\}$ — соответствующая максимальная клика решетки $\Delta(w)$, пересекающая $w^\perp$ по вершине y, превращенная в коклику. Наконец, для $z\in\Gamma(y)-\{w\}$ пусть $z^\perp-\{y\}$ — соответствующая максимальная клика решетки $\Delta(w)$, пересекающая $y^\perp$ по вершине z, превращенная в коклику.

По построению окрестность любой вершины в Γ является 7-кокликой и параметр $c_2=1$. Отсюда $k_2=42$. Снова по построению имеем $b_2=6$ и с учетом равенства $v=176$ получим $c_3=2$. Итак, Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$, для которого граф Γ_3 равен Δ.

Теорема 1 доказана.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 6, 6; 1, 1, 2\}$. По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_2(7, 6)$ с параметрами (176,49,12,14). Найдем возможные автоморфизмы этого графа.

Лемма 2.1 (см., например, [7, § 2]). *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и неглавными собственными значениями r, s, $s < 0$. Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то*

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с $w(k-d)/(v-w)$ вершинами из Δ.

Лемма 2.2 [8, теорема 3.2]. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и собственными значениями $k, r, -m$. Если g — автоморфизм Γ, то $|\mathrm{Fix}(g)| \leq v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k-r)$.*

В леммах 2.3–2.7 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(176, 49, 12, 14)$. Тогда Γ имеет спектр $49^1, 5^{98}, -7^{77}$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По лемме 2.2 имеем $|\Omega| \leq 176 \cdot 14/44 = 56$.

Лемма 2.3. *Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то*

(1) $d - 5 \leq w(49 - d)/(176 - w) \leq d + 7$, *причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна точно с $w(49-d)/(176-w)$ вершинами из Δ;*

(2) *максимальный порядок клики в Γ не больше 8;*

(3) *максимальный порядок коклики в Γ не больше 22, и каждая вершина вне 22-коклики C смежна точно с 7 вершинами из C.*

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из леммы 2.1. Второе и третье утверждение леммы следует из первого. $\square$

Доказательство предложения 2 опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [9]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\overline{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, k-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = Aut(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств W_0, W_1, W_2 матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами и если правая часть равенства для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ должно быть целым.

Лемма 2.4. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 44)/12$;

(2) $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого* l, *взаимно простого с* p;

(3) $77 - \chi_2(g)$ *делится на* p.

Доказательство. Так как Γ имеет собственные значения 49, 5, -7 кратностей 1, 98, 77, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 49 & 5 & -7 \\ 126 & -6 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 98 & 10 & -14/3 \\ 77 & -11 & 11/3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 77, определяется как

$$\chi_2(g) = (7\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + \alpha_2(g)/3)/16.$$

Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/12 + 11/3$.

Два последних утверждения леммы следует из леммы 1 [10]. □

Лемма 2.5. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Ω — *пустой граф, то* $p = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 44$ *или* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 24l + 8$;

(2) *если* Ω *является* β-*кликой, то либо*

(*i*) $p = 7$, $\beta = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 49, 133$, *либо*

(*ii*) $p = 2$, $\beta = 2, 4, 6, 8$ *и* $\alpha_1(g) = 24l + 8 + 5\beta$, *либо*

(*iii*) $p = 3$, $\beta = 2, 5, 8$ *и* $\alpha_1(g) = 36l - 4 + 5\beta$;

(3) *если* Ω *является* γ-*кокликой, то* $\gamma = 8, 15, 22$, $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 84l - 40 + 5\gamma$;

(4) *если* Ω *содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик, то* $p = 2$ *и порядок любой максимальной клики из* Ω *равен* 2, 4 *или* 6.

Доказательство. Напомним, что $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 44)/12$, и положим $\alpha_i(g) = pw_i$.

Если Ω — пустой граф, то p делит 176, поэтому $p = 2$ или 11. В случае $p = 11$ имеем $\chi_2(g) = 11(-w_1 + 4)/12$, поэтому $\alpha_1(g) = 132l + 44$. Если $\alpha_1(g) = 176$, то каждая $\langle g \rangle$-орбита является 11-кликой, противоречие.

В случае $p = 2$ число $\chi_2(g) = (-w_1 + 22)/6$ нечетно, поэтому $w_1 = 12l + 4$ и $\alpha_1(g) = 24l + 8$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является β-кликой. Если $\beta = 1$, то p делит 49, $p = 7$, $\chi_2(g) = 7(7 - w_1)/12$, $w_1 = 12l + 7$ и $\alpha_1(g) = 49, 133$.

Если же $\beta \geq 2$, то p делит 36, 90 и $14 - \beta$, поэтому либо $p = 2$, $\beta = 2, 4, 6, 8$, число $\chi_2(g) = (5\beta/2 - w_1 + 22)/6$ нечетно и $\alpha_1(g) = 24l + 8 + 5\beta$, либо $p = 3$, $\beta = 2, 5, 8$, число $\chi_2(g) = (5\beta - \alpha_1(g) + 44)/12$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 36l - 4 + 5\beta$.

Пусть Ω является γ-кокликой, $\gamma \geq 2$. Тогда p делит 14, 35 и $92 - \gamma$, поэтому $p = 7$, γ сравнимо с 1 по модулю 7, $\chi_2(g) = (5\gamma - \alpha_1(g) + 44)/12$ и $\alpha_1(g) = 84l - 40 + 5\gamma$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик. Тогда p делит 14 и 36, поэтому $p = 2$ и порядок любой максимальной клики из Ω равен 2, 4 или 6. □

Лемма 2.6. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) Γ *не содержит вершин* a *таких, что* $[a] \subset \Omega$;

(2) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами* $(v', k', 12, 14)$, *и* $p \leq 13$;

(3) *если* Ω *содержит геодезический* 2-*путь, то* $p \leq 11$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $[a] \subset \Omega$ для некоторой вершины a. Тогда каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 14 вершинами из Ω. С учетом равенства $\lambda = 12$ имеем $\alpha_1(g) = 0$ и $\Omega = a^{\perp}$. Отсюда $\chi_2(g) = 294/12$, противоречие.

Пусть Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Δ с параметрами $(v', k', 12, 14)$. Тогда $n = 2u$, $k' = u^2+13$, Δ имеет неглавные собственные значения $(u-1), -(u+1)$ и кратность $u-1$ равна $u(u^2+13)(u^2+u+14)/(28u)$, поэтому $u \geq 6$, противоречие.

Если $p > 13$, то Ω — сильно регулярный подграф с параметрами $(v', k', 12, 14)$, противоречие. Пусть $p = 13$. Тогда $\lambda_\Omega = 12$, $\mu_\Omega = 1, 14$, $|\Omega| = 33, 46$ и степени вершин в Ω равны 23 или 36. В случае $|\Omega| = 33$ получим регулярный граф степени 23 на 33 вершинах, противоречие. Значит, $|\Omega| = 46$. Если Ω содержит такие вершины a, b, что $|\Omega(a) \cap \Omega(b)| = 1$, то $a^{\perp} \cup b^{\perp}$ содержит не менее 47 вершин из Ω. Значит, Ω — сильно регулярный подграф с параметрами $(46, k', 12, 14)$, противоречие.

Пусть $p = 11$. Тогда $\lambda_\Omega = 1, 12$, $\mu_\Omega = 3, 14$, $|\Omega| = 11t$, $t = 2, 3, 4, 5$ и степени вершин в Ω равны 5, 16, 27 или 38. Далее, $\chi_2(g) = 11(5t - \alpha_1(g)/11 + 4)/12$. Если $t = 4$, то $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/12 + 22$ и $\alpha_1(g) = 0, 132$. В последнем случае каждая $\langle g\rangle$-орбита длины 11 является кликой, противоречие. Если $t = 5$, то $\chi_1(g) = (-\alpha_1(g) + 5)/12 + 22$, $\alpha_1(g) = 12l + 5$ делится на 11 и $l = 6$.

Если Ω содержит вершину a степени 5, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 1 на 5 вершинах, противоречие.

Пусть Ω содержит вершину a степени 38, $u \in [a] - \Omega|$. Тогда u смежна по крайней мере с 4 вершинами $b_1, \dots, b_4$ из $\Omega(a)$. Отсюда $|\Omega - a^{\perp}| = 16$, $\Omega(b_i) \cap \Omega(b_j)$ содержит a, u, u^g и не менее 12 вершин из $\Omega - a^{\perp}$, противоречие.

Пусть Ω содержит вершину a степени 27. Тогда $[a] - \Omega$ содержит две $\langle g\rangle$-орбиты и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $25x + 14y + 3(27 - x - y) = 14z + 3(|\Omega - a^{\perp}| - z)$. В случае $|\Omega| = 33$ указанное число ребер не меньше 81, но не больше 70, противоречие. В случае $|\Omega| = 44$ имеем $14y + 3(27 - y) = 14z + 3(16 - z)$ и $z - y = 3$. Если $y \geq 3$, то найдутся две вершины b_1, b_2 из $\Omega(a)$ такие, что $\Omega(b_1) \cap \Omega(b_2)$ содержит a, u, u^g для некоторой вершины $u \in [a] - \Omega$ и не менее 12 вершин из $\Omega - a^{\perp}$, противоречие. Значит, $y \leq 2$ и $z \leq 5$. Пусть Y — множество вершин из $\Omega_2(a)$, смежных точно с 3 вершинами из $\Omega(a)$. Тогда $|Y| \geq 11$ и для раличных вершин $c_1, c_2 \in Y$ подграф $\Omega(c_1) \cap \Omega(c_2)$ содержит не менее 10 вершин из $\Omega_2(a)$. Противоречие с тем, что $[c_1] \cap [c_2]$ содержит 11 вершин из $[a] - \Omega$ для подходящих вершин $c_1, c_2 \in Y$. Итак, $|\Omega| = 55$.

Пусть Ω — регулярный граф степени 16. Ввиду леммы 2.3 имеем $|\Omega| \geq 44$, причем в случае равенства каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 11 вершинами из Ω. □

Из лемм 2.4–2.6 следует предложение 2.

До конца раздела предполагается, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(176, 49, 12, 14)$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве его вершин. Тогда $|G : G_a| = 176$ и $\{2, 11\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

Лемма 2.7. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) $|G|$ *не делится на* 121;

(2) *если* f *— элемент порядка* 11 *из* G, g *— элемент простого порядка* $p < 11$ *из* $C_G(f)$, *то либо*

(*i*) $p = 2$, Ω *— пустой граф,* $\alpha_1(g) = 176$ *или* $|\Omega| = 22$, $\alpha_1(g) = 22$, *или* $|\Omega| = 44$, $\alpha_1(g) = 132$, *либо*

(*ii*) $p = 3$, $|\Omega| = 44$, $\alpha_1(g) = 132$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $|G|$ делится на 121, то G содержит элементарную абелеву подгруппу W порядка 121. Пусть $g, g_2, \dots, g_{11}$ порождают различные подгруппы порядка 11 из W, $\Omega^i = \mathrm{Fix}(g_i)$, $\Omega^0 = \mathrm{Fix}(W)$ и a, b — две вершины из Ω^0, если Ω^0 — непустой граф.

Если на Γ имеется W-орбита Δ длины 121, то либо $|\Omega^0| = 0$ и можно считать, что $|\Omega| = 55$, либо $|\Omega^0| \neq 0$. В первом случае имеем противоречие с тем, что $\alpha_1(g) = 77$ не делится на 11.

Во втором случае a смежна с вершиной из Δ, поэтому a смежна со всеми вершинами из Δ, противоречие.

Значит, на Γ нет W-орбит длины 121. Если $|\Omega^0| \neq 0$, то либо $|\Omega^0| = 33$ и можно считать, что $|\Omega^i| = 44$ для $i = 1, 2, \ldots, 11$, $|\Omega| = 55$, либо $|\Omega^0| = 44$ и $|\Omega| = |\Omega^i| = 55$ для $i = 1, 2, \ldots, 11$. В первом случае для орбиты $u^{\langle g \rangle}$, не являющейся кокликой, можно считать, что $u \in \Omega^1$ и $u^{\langle g \rangle} = u^{\langle g_2 \rangle}$ является кокликой, противоречие.

Во втором случае пусть $u \in \Omega - \Omega^0$. Тогда для любой орбиты y^W на $\Gamma - \Omega$ вершина u смежна либо с нулем вершин из y^W, либо со всеми вершинами из y^W. Далее, $\Omega - \Omega^0$ содержит трехвершинный подграф U, являющийся кокликой или геодезическим 2-путем, причем $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 121 вершину из $\Gamma - \Omega$. Противоречие с леммой 2.3.

Если $|\Omega^0| = 0$, то можно считать, что $|\Omega| = |\Omega^2| = |\Omega^3| = |\Omega^4| = 44$ и Γ имеет разбиение четырьмя регулярными графами степени 16 на 44 вершинах. Более того, подграф Ω^2 имеет разбиение четырьмя кокликовыми $\langle g \rangle$-орбитами Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4. Пусть U — трехвершинный подграф из $\langle g_2 \rangle$-орбиты на Ω. Тогда U попадает в окрестности 0 или 11 вершин из $\langle g \rangle$-орбиты на Ω_i, поэтому $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 132 вершины из $\Gamma - \Omega$. Противоречие с леммой 2.3. Утверждение (1) доказано.

Пусть f — элемент порядка 11 из G, g — элемент простого порядка $p < 11$ из $C_G(f)$. Тогда $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф и $\alpha_1(f) = 44$. Пусть $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Если Ω — пустой граф, то $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 24l + 8$ делится на 11. Отсюда $\alpha_1(g) = 176$.

Если $|\Omega| = 11t$, то по предложению 2 либо Ω является 22-кокликой, $p = 7$, $\chi_1(g) = (154 - \alpha_1(g))/12$ и $\alpha_1(g) = 154$, либо Ω содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик, $p = 2$, порядок любой максимальной клики из Ω равен 2 или 4 и $|\Omega| = 22, 44$, либо Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 7$.

Пусть $p = 2$. Если $|\Omega| = 22$, то число $\chi_1(g) = (154 - \alpha_1(g))/12$ нечетно и $\alpha_1(g) = 24l - 2$ делится на 11. Отсюда $\alpha_1(g) = 22$. Если $|\Omega| = 44$, то число $\chi_1(g) = (264 - \alpha_1(g))/12$ нечетно и $\alpha_1(g) = 24l + 12$ делится на 11. Отсюда $\alpha_1(g) = 132$.

Пусть $p = 3$. Если $|\Omega| = 11$, то число $\chi_1(g) = (99 - \alpha_1(g))/12$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 36l + 3$ делится на 11, противоречие. Если $|\Omega| = 44$, то число $\chi_1(g) = (264 - \alpha_1(g))/12$ сравнимо с 2 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 36l - 12$ делится на 11. Отсюда $\alpha_1(g) = 132$.

Пусть $p = 5$. Если $|\Omega| = 11$, то число $\chi_1(g) = (99 - \alpha_1(g))/12$ сравнимо с 2 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 60l + 15$ делится на 11, противоречие.

Пусть $p = 7$. Если $|\Omega| = 22$, то $\chi_1(g) = (154 - \alpha_1(g))/12$ и $\alpha_1(g) = 154$. В этом случае каждая $\langle g \rangle$ длины 7 является кликой. Покажем, что $\lambda_\Omega = 12$. Иначе найдутся смежные вершины $a, b \in \Omega$ такие, что $\Omega(a) \cap [b]$ содержит вершину $u \in \Gamma - \Omega$, противоречие с тем, что $\{a, b\} \cup u^{\langle g \rangle}$ является 9-кликой.

Покажем, что $\mu_\Omega = 14$. Иначе найдутся две несмежные вершины $a, b \in \Omega$ такие, что $\Omega(a) \cap [b]$ содержит вершину $u \in \Gamma - \Omega$, противоречие с тем, что $\{a\} \cup u^{\langle g \rangle}$ является 8-кликой, в которой b смежна с 7 вершинами. Противоречие с тем, что Ω является сильно регулярным графом с параметрами $(22, k', 12, 14)$. $\square$

Завершим доказательство следствия 1. Так как $O_{11'}(G)$ является 2-группой, то либо $G/O_2(G)$ – расширение группы порядка 11 с помощью подгруппы порядка, делящего 10, либо по [11, теорема 1] цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморфен $L_2(11)$, M_{11}, M_{12}, $U_5(2)$, $U_6(2)$, M_{22}, A_{11}, A_{12}, McL, HiS. Так как $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ делит 176, то либо $\bar{T} \cong M_{11}$, $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 11, 22$, либо $\bar{T} \cong M_{22}$, группа $\bar{T}_a$ изоморфна $L_3(4)$ и имеет индекс 22 в $\bar{T}$ или A_7 и имеет индекс 176 в $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong U_5(2)$, группа $\bar{T}_a$ изоморфна $Z_3 \times U_4(2)$ и имеет индекс 176 в $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong HiS$, группа $\bar{T}_a$ изоморфна $U_3(5).Z_2$ и имеет индекс 176 в $\bar{T}$.

Известно, что подстановочное представление M_{22} по A_7 дает граф ранга 3 с параметрами (176,70,18,34), представление $U_5(2)$ по $Z_3 \times U_4(2)$ дает граф ранга 3 с параметрами (176,40,12,8), представление HiS по $U_3(5).Z_2$ является 2-транзитивным. Следствие 1 доказано.

3. Новые границы для порядков клик в некоторых графах Γ_3

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с $\theta_2 = -1$. Если граф Γ_3 содержит n-клику $\{u, u_2, \dots, u_n\}$, то $\Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $k_3 - (n-1)(a_3+1)$ вершин. В этом разделе рассматриваются массивы пересечений, для которых граф Γ_3 не является псевдогеометрическим.

Лемма 3.1. *Если* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(208, 45, 26, 10)$ *и не содержит* 4*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$. Тогда $v = 1+27+135+45 = 208$ и Γ имеет спектр $27^1, 8,211^{45}, -1^{117}, -6,211^{45}$.

По предложению 1 граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{21}(27, 5)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $5, -7$ и параметры (208,45,26,10).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $28n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $45 - 7(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 7$.

Если $n \ge 5$, то Δ содержит не более 17 вершин. Противоречие с тем, что $\Sigma(u_i) \cap \Sigma(u_j)$ содержит $n-2$ вершины из L и не менее $28-n$ вершин из Δ.

Если $n = 4$, то Δ содержит 24 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 2 вершины из L и все 24 вершины из Δ. Противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 5-кликой. $\square$

Лемма 3.2. *Если* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{31, 24, 8; 1, 4, 24\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(280, 62, 12, 14)$ *и не содержит* 8*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{31, 24, 8; 1, 4, 24\}$. Тогда $v = 1 + 31 + 186 + 62 = 280$ и Γ имеет спектр $31^1, 8.746^{62}, -1^{155}, -6.746^{62}$.

По предложению 1 граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{24}(31, 6)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $6, -8$ и параметры (280,62,12,14).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $32n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $62 - 8(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 8$.

Если $n = 8$, то Δ содержит 6 вершин. Тогда $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 6 вершин из L и все 6 вершин из Δ. Противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 9-кликой. $\square$

Лемма 3.3. *Если* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(624, 98, 22, 14)$ *и не содержит* 16*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$. Тогда $v = 1+35+490+98 = 624$ и Γ имеет спектр $35^1, 9^{168}, -1^{182}, -5273$.

По предложению 1 граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{30}(35, 14)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $14, -6$ и параметры (624,98,22,14).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $36n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $98 - 6(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 17$.

Если $n \ge 16$, то Δ содержит не более 8 вершин. Тогда $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит $n-2$ вершины из L и не менее $24-n$ вершин из Δ. Отсюда $n = 16$ и $\Sigma(u_i) \cap \Sigma(u_j)$ содержит все 8 вершин из Δ. Противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 17-кликой. $\square$

Лемма 3.4. *Если* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{35, 30, 8; 1, 3, 28\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(486, 100, 18, 20)$ *и не содержит* 13-*клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35, 30, 8; 1, 3, 28\}$. Тогда $v = 1+35+350+100 = 486$ и Γ имеет спектр $35^1, 8^{140}, -1^{210}, -7^{135}$.

По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{28}(35, 10)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $10, -8$ и параметры (486,100, 18,20).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $36n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $100 - 8(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 13$.

Если $n = 13$, то Δ содержит не более 4 вершин. Тогда $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 11 вершин из L и не более 4 вершин из Δ, противоречие. □

Лемма 3.5. *Если* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(300, 26, 4, 2)$ *и не содержит* 7-*клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$. Тогда $v = 1 + 39 + 234 + 26 = 300$ и Γ имеет спектр $39^1, 9^{78}, -1^{117}, -6^{104}$.

По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{36}(39, 6)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $6, -4$ и параметры (300,26,4,2).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $40n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $26 - 4(n-1)$ вершин. Далее, $\lambda(\Sigma) = 4$, поэтому $n \le 6$.

Если $n = 6$, то Δ содержит 6 вершин. В этом случае Σ содержит 6 вершин из L, 240 вершин из $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^6 u_i^\perp)$, 36 вершин, находящихся на расстоянии 3 от единственной вершины из L и 24 вершины из $\Sigma_2(u) \cap (\cap_i \Sigma_2(u_i))$. □

Лемма 3.6. *Если* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{39, 32, 10; 1, 4, 30\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(456, 104, 22, 24)$ *и не содержит* 10-*клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 32, 10; 1, 4, 30\}$. Тогда $v = 1+39+312+104 = 456$ и Γ имеет спектр $39^1, 9,718^{104}, -1^{247}, -7,718^{104}$.

По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{30}(39, 8)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $8, -10$ и параметры (456,104, 22,24).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $40n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $104 - 10(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 11$.

Если $n = 11$, то Δ содержит 4 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 9 вершин из L и не более 4 вершин из Δ, противоречие.

Если $n = 10$, то Δ содержит 14 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_i)$ содержит 8 вершин из L и все 14 вершин из Δ, противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 11-кликой. □

Лемма 3.7. *Если* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{43, 36, 11; 1, 4, 33\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(560, 129, 28, 30)$ *и не содержит* 11-*клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{43, 36, 11; 1, 4, 33\}$. Тогда $v = 1+43+387+129 = 560$ и Γ имеет спектр $43^1, 10,165^{129}, -1^{301}, -8,165^{129}$.

По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{33}(43, 9)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $9, -11$ и параметры (560,129, 28,30).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $44n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $129 - 11(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 12$.

Если $n = 12$, то Δ содержит 8 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 10 вершин из L и не более 8 вершин из Δ, противоречие.

Если $n = 11$, то Δ содержит 19 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 9 вершин из L и все 19 вершин из Δ, противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 12-кликой. $\square$

Лемма 3.8. *Если* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(375, 66, 9, 12)$ *и не содержит* 8*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$. Тогда $v = 1 + 44 + 264 + 66 = 375$ и Γ имеет спектр $44^1, 14^{55}, -1^{220}, -6^{99}$.

По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{36}(44, 6)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $6, -9$ и параметры (375,66, 9,12).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $45n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $66 - 9(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 8$.

Если $n = 8$, то Δ содержит 3 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 6 вершин из L и все 3 вершины из Δ, противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 9-кликой. $\square$

Лемма 3.9. *Если* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(243, 22, 1, 2)$ *и не содержит* 4*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$. Тогда $v = 1 + 44 + 176 + 22 = 243$ и Γ имеет спектр $44^1, 8^{66}, -1^{132}, -10^{44}$.

По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{40}(44, 4)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $4, -5$ и параметры (243,22, 1,2).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $45n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $22 - 5(n-1)$ вершин. Далее, $\lambda(\Sigma) = 1$, поэтому $n = 3$.

Если $n = 3$, то Δ содержит 12 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит вершину из L и 0 вершин из Δ. $\square$

Лемма 3.10. *Если* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(525, 128, 28, 32)$ *и не содержит* 10*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$. Тогда $v = 1+44+352+128 = 525$ и Γ имеет спектр $44^1, 9^{132}, -1^{308}, -11^{84}$.

По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{33}(44, 8)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $8, -12$ и имеет параметры (525,128,28,32).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \dots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $45n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $129 - 12(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 11$.

Если $n = 11$, то Δ содержит 9 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 9 вершин из L и не более 9 вершин из Δ, противоречие.

Если $n = 10$, то Δ содержит 21 вершину и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 8 вершин из L и 20 вершин из Δ, противоречие с тем, что $\cap_i \Sigma(u_i)$ содержит вершину $w \in \Delta$ и $L \cup \{w\}$ является 11-кликой. $\square$

Лемма 3.11. *Если* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(342, 33, 4, 3)$ *и не содержит* 7*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$. Тогда $v = 1+44+264+33 = 342$ и Γ имеет спектр $44^1, 6^{132}, -1^{152}, -12^{57}$.

По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{40}(44, 6)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $6, -5$ и параметры (342,33, 4,3).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \ldots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $45n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $33 - 5(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 7$. Далее, $\lambda(\Sigma) = 4$, поэтому $n \le 6$.

Если $n = 6$, то Δ содержит 8 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 4 вершины из L и 0 вершин из Δ. В этом случае Γ содержит 270 вершин из $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^6 u_i^\perp)$, 48 вершин, находящихся на расстоянии 3 от единственной вершины из L, и множество X_0 из 24 вершин, находящихся на расстоянии 2 от любой вершины из L. $\square$

Лемма 3.12. *Если* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{49, 36, 5; 1, 4, 45\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(540, 49, 8, 4)$ *и не содержит* 11*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{49, 36, 5; 1, 4, 45\}$. Тогда $v = 1+49+441+49 = 540$ и Γ имеет спектр $49^1, 13^{105}, -1^{189}, -5^{245}$.

По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{45}(49, 9)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $9, -5$ и параметры (540,49, 8,4).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \ldots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $50n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $49 - 5(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 10$.

Если $n = 10$, то Δ содержит 4 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 8 вершин из L и 0 вершин из Δ. В этом случае Σ содержит 500 вершин из $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^{10} u_i^\perp)$ и 40 вершин, каждая из которых смежна в Σ с единственной вершиной из L. $\square$

Лемма 3.13. *Если* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{51, 44, 13; 1, 4, 39\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(800, 187, 42, 44)$ *и не содержит* 13*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{51, 44, 13; 1, 4, 39\}$. Тогда $v = 1+51+561+187 = 800$ и Γ имеет спектр $51^1, 11^{187}, -1^{425}, -9^{187}$.

По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{39}(51, 11)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $11, -13$ и параметры (800,187, 42,44).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \ldots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $52n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $187 - 13(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 15$.

Если $n = 13$, то Δ содержит 31 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 11 вершин из L и все 31 вершину из Δ, противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 14-кликой. $\square$

Лемма 3.14. *Если* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{54, 42, 11; 1, 3, 44\}$*, то граф* $\Sigma = \Gamma_3$ *сильно регулярен с параметрами* $(1000, 189, 38, 35)$ *и не содержит* 16*-клик.*

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{54, 42, 11; 1, 3, 44\}$. Тогда $v = 1+54+756+189 = 1000$ и Γ имеет спектр $54^1, 14^{189}, -1^{432}, -6^{378}$.

По предложению 1 граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{44}(54, 14)$.

Далее, граф $\Sigma = \Gamma_3$ имеет неглавные собственные значения $14, -11$ и параметры (1000,189, 38,35).

Пусть Σ содержит n-клику $L = \{u, u_2, \ldots, u_n\}$. Тогда $u^\perp \cup (\cup_{i=2}^n u_i^\perp)$ содержит $55n$ вершин, $\Delta = \Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n u_i^\perp$ содержит $189 - 11(n-1)$ вершин. Ввиду границы Хоффмана — Дельсарта имеем $n \le 18$.

Если $n = 18$, то Δ содержит 2 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 16 вершин из L и не более 2 вершин из Δ.

Если $n = 17$, то Δ содержит 13 вершин и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 15 вершин из L и не более 13 вершин из Δ.

Если $n = 16$, то Δ содержит 24 вершины и $\Sigma(u) \cap \Sigma(u_j)$ содержит 14 вершин из L и все 24 вершины из Δ, противоречие с тем, что для $w \in \Delta$ подграф $L \cup \{w\}$ является 17-кликой. $\square$

Теорема 2 следует из лемм 3.1–3.14.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$. Тогда граф Γ_3 является сильно регулярным с параметрами (375,22,5,1) и не существует (окрестность его вершины является объединением изолированных 6-клик, противоречие).

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$, $\Sigma = \Gamma_3$, u — вершина графа Γ, $w \in \Sigma(u)$.

Тогда $|\Sigma(u)| = 45$, и по лемме 3.1 подграф $\Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ является 26-кокликой. Противоречие с тем, что для $z \in \Sigma(u) \cap \Sigma(w)$ имеем $|\Sigma(u) \cap \Sigma(z)| \le 1 + 18$. Следствие 2 доказано.

Автор выражает признательность рецензенту за замечания, позволившие улучшить текст статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. **Махнев А. А., Нирова М. С.** Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 5. С. 730–744. doi: 10.4213/mzm11503 .
3. **Bang S., Koolen J.** Distance-regular graphs of diameter three having eigenvalue -1 // Linear Algebra Appl. 2017. Vol. 531. P. 38–53. http:10.1016/j.laa.2017.05.038 .
4. **Brouwer A. E.** Polarities of G. Higman's symmetric design and a strongly regular graph on 176 vertices // Aequationes Math. 1982. Vol. 25. P. 77-82.
5. **Hobart S. A., Hughes D. R.** Extended partial geometries: nets and dual nets // Europ. J. Comb. 1990. Vol. 11. P. 357–372.
6. **Махнев А. А.** Частичные геометрии и их расширения // Успехи матем. наук 1999. Т. 54, № 5. С. 21–72.
7. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407. doi: 10.1006/eujc.1993.1044 .
8. **Behbahani M., Lam C.** Strongly regular graphs with non-trivial automorphisms // Discrete Math. 2011. Vol. 311, iss. 2-3. P. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
9. **Cameron P.** Permutation groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p. (London Math. Soc. Student Texts; vol. 45.)
10. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. РАН 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
11. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
12. **Coolsaet K.** Local structure of graph with $\lambda = \mu = 2$, $a_2 = 4$ // Combinatorica. 1995. Vol. 15. P. 481–457.

Нирова Марина Сефовна
канд. физ.-мат. наук, доцент

Поступила 25.12.2017

Кабардино-балкарский государственный университет имени Х. М. Бербекова,
г. Нальчик
e-mail: nirova_m@mail.ru

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-Regular Graphs.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 0387506195 .
2. Makhnev A.A., Nirova M.S. Shilla distance-regular graphs with $b_2 = c_2$. *Mat. Zametki*, 2018, vol. 103, no. 5, pp. 730–744 (in Russian). doi: 10.4213/mzm11503 .
3. Bang S., Koolen J. Distance-regular graphs of diameter three having eigenvalue -1. *Linear Algebra Appl.*, 2017, vol. 531, pp. 38–53. http:10.1016/j.laa.2017.05.038 .
4. Brouwer A.E. Polarities of G. Higman's symmetric design and a strongly regular graph on 176 vertices // Aequationes Math. 1982. V. 25, P. 77-82.
5. Hobart S.A., Hughes D.R. Extended partial geometries: nets and dual nets. *Europ. J. Comb.* 1990, vol. 11, pp. 357–372.
6. Makhnev A.A. Partial geometries and their extensions. *Russian Math. Surveys*, 1999, vol. 54, no. 5, pp. 895–945.
7. Brouwer A.E., Haemers W.H. The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra. *Europ. J. Comb.* 1993, vol. 14, pp. 397–407. doi: 10.1006/eujc.1993.1044 .
8. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with non-trivial automorphisms. *Discrete Math.* 2011, vol. 311, iss. 2-3 pp. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
9. Cameron P. *Permutation groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, Ser. London Math. Soc. Student Texts, vol. 45, 220 p.
10. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A. On Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. *Dokl. Math.*, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .
11. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sibirean Electr. Math. Reports.* 2009, vol. 6, pp. 1–12 (in Russian).
12. Coolsaet K. Local structure of graph with $\lambda = \mu = 2$, $a_2 = 4$. *Combinatorica*, 1995, vol. 15, pp. 481–457.

The paper was received by the Editorial Office on Dezember 25, 2017.

Marina Sefovna Nirova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: nirova_m@mail.ru .