ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 517.977

О СОВПАДЕНИИ МИНИМАКСНОГО РЕШЕНИЯ И ФУНКЦИИ ЦЕНЫ ИГРЫ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ЛИНИЕЙ ЖИЗНИ[1]

Н. В. Мунц, С. С. Кумков

В статье рассматриваются дифференциальные игры быстродействия с линией жизни. В таких играх наряду с терминальным множеством, куда стремится как можно быстрее привести систему первый игрок, имеется еще одно множество (называемое линией жизни), при попадании системы на которое выигрывает второй игрок. В качестве платы рассматривается результат применения замены Кружкова к времени достижения системой терминального множества. Также рассматриваются уравнения Гамильтона — Якоби, соответствующие таким играм. Обосновывается существование минимаксного решения у краевой задачи уравнения типа Гамильтона — Якоби. Для этого вводятся достаточно сильные предположения на динамику игры вблизи границы области, на которой игра происходит. А именно, каждый игрок имеет возможность направить движение системы на свое множество (первый — на терминальное, второй — на линию жизни), если система находится вблизи соответствующего множества. Такие предположения фактически приводят к непрерывности функции цены на области, где происходит игра. В тех же предположениях доказывается совпадение функции цены игры и минимаксного решения краевой задачи.

Ключевые слова: дифференциальные игры быстродействия с линией жизни, функция цены, уравнения Гамильтона — Якоби, минимаксное решение.

N. V. Munts, S. S. Kumkov. On the coincidence of the minimax solution and the value function in a time-optimal game with a lifeline.

We consider time-optimal differential games with a lifeline. In such games, as usual, there is a terminal set to which the first player tries to guide the system as fast as possible, and there is also a set, called a lifeline, such that the second player wins when the system attains this set. The payoff is the result of applying Kruzhkov's change to the time when the system reaches the terminal set. We also consider Hamilton–Jacobi equations corresponding to such games. The existence of a minimax solution of a boundary value problem for a Hamilton–Jacobi type equation is proved. For this we introduce certain strong assumptions on the dynamics of the game near the boundary of the game domain. More exactly, the first and second players can direct the motion of the system to the terminal set and the lifeline, respectively, if the system is near the corresponding set. Under these assumptions, the value function is continuous in the game domain. The coincidence of the value function and the minimax solution of the boundary value problem is proved under the same assumptions.

Keywords: time-optimal differential games with a lifeline, value function, Hamilton–Jacobi equations, minimax solution.

MSC: 91A23, 49N70, 49N75, 49J35, 35Q91

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-200-214

Введение

В данной статье рассматриваются дифференциальные игры быстродействия с линией жизни и связь их функции цены с минимаксным решением соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби. В таких играх первый игрок старается как можно скорее привести систему на заданное замкнутое терминальное множество; при этом траектория системы должна оставаться внутри некоторого открытого множества, на котором происходит игра. Второй игрок препятствует этому: он выигрывает, как только траектория системы покидает это открытое множество или если ему удается бесконечно удерживать систему вне терминального множества.

По всей видимости первым задачи с линией жизни сформулировал Р. Айзекс в своей книге [1]. В его формулировках под *линией жизни* понималось множество, достигнув которого, второй игрок безусловно выигрывал. Значительный вклад в исследование игр с линией

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00410).

жизни внес Л.А. Петросян (см., например, [2–5]). Однако авторам неизвестны работы, в которых исчерпывающе рассматривались бы игры такого типа. Л.А. Петросян в основном исследовал задачи, где игроки имели динамику простых движений. В книгах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [6; 7] такого рода задачи рассматриваются как задачи с фазовыми ограничениями: первый игрок не должен выводить систему за границу заданного множества. Французские авторы задачи с множествами, при выходе на которые происходит выигрыш одного из игроков, рассматривали в рамках теории выживаемости [8–10].

В данной статье доказывается совпадение функции цены дифференциальной игры и минимаксного решения для задачи быстродействия с линией жизни.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим систему с динамикой

$$\dot{x} = f(x, p, q), \quad t \geqslant 0, \quad p \in P, \quad q \in Q, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, p, q — управления первого и второго игроков, P и Q — компактные множества. Функция $f : \mathbb{R}^n \times P \times Q \mapsto \mathbb{R}^n$ предполагается непрерывной по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по переменной x:

$$\big\| f(x^{(1)}, p, q) - f(x^{(2)}, p, q) \big\| \leqslant \lambda \| x^{(1)} - x^{(2)} \| \tag{1.2}$$

при всех $x^{(1)}$, $x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, $p \in P$, $q \in Q$. Предполагается также, что выполняется условие седловой точки в маленькой игре (условие Айзекса)

$$\min_{p \in P} \max_{q \in Q} \big\langle s, f(x, p, q) \big\rangle = \max_{q \in Q} \min_{p \in P} \big\langle s, f(x, p, q) \big\rangle =: \mathcal{H}(x, s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь и далее символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение; символы “=:” и “:=” означают “равно по определению”, определяемая величина находится со стороны двоеточия.

Пусть задано замкнутое терминальное множество $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$. Также пусть задано открытое множество $\mathcal{W}$ такое, что $\mathcal{T} \subset \mathcal{W}$. Обозначим $\mathcal{G} := \mathcal{W} \setminus \mathcal{T}$ — множество, на котором происходит игра, $\mathcal{F} := \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{W}$. Считаем, что $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Начальное положение системы $x_0 \in \operatorname{cl} \mathcal{G}$, где символ cl обозначает замыкание множества. Первый игрок, использующий управление p, стремится привести систему на множество $\mathcal{T}$, избегая достижения траекторией множества $\mathcal{F}$. Второй игрок, использующий управление q, старается либо бесконечно долго сохранять движение системы на множестве $\mathcal{G}$, либо вывести его на множество $\mathcal{F}$, либо как можно сильнее отдалить момент попадания системы на целевое множество, если это неизбежно.

Формализовать такие цели игроков в виде функции платы можно следующим образом. Для заданных реализаций управлений игроков $t \mapsto p(t)$ и $t \mapsto q(t)$ определим величины

$$t_*\big(x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big) = \min\big\{t : x\big(t; x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big) \in \mathcal{T}\big\},$$
$$t^*\big(x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big) = \min\big\{t : x\big(t; x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big) \in \mathcal{F}\big\}$$

— моменты попадания траектории на множества $\mathcal{T}$ и $\mathcal{F}$ соответственно. Если траектория не приходит на множество $\mathcal{T}$ $(\mathcal{F})$, тогда величина t_* (t^*) полагается равной $+\infty$. Определим результат игры как

$$\tau\big(x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big) := \begin{cases} +\infty, & \text{если } t_*\big(x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big) = +\infty \text{ или} \\ & t^*\big(x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big) < t_*\big(x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big), \\ t_*\big(x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Таким образом, если движение приходит на множество $\mathcal{T}$, оставаясь при этом в $\mathcal{G}$, то плата — момент прибытия на $\mathcal{T}$. Если же траектория до этого момента выходит на $\mathcal{F}$ или никогда не приходит на $\mathcal{T}$, то результат равен $+\infty$.

Такую игру можно называть *игрой с линией жизни*: граница $\partial\mathcal{F}$ множества $\mathcal{F}$ — это линия жизни, т. е. область, где второй игрок безоговорочно выигрывает.

Рассмотрение будем проводить в позиционной формализации Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [6; 7]. Под стратегиями обратной связи первого и второго игрока подразумеваются функции $U : \mathbb{R}^n \mapsto P$ и $V : \mathbb{R}^n \mapsto Q$ соответственно.

2. Функция цены

Введем функцию цены игры быстродействия с линией жизни аналогично тому, как это делается для классической игры быстродействия в [11].

Для величины $\varepsilon > 0$ и движения $x(\cdot)$ определим функционал

$$\tau_\varepsilon\big(x(\cdot)\big) := \min\big\{t \in \mathbb{R}^+ : x(t) \in \mathcal{T}_\varepsilon,\ \forall\vartheta \in [0,t]\ x(\vartheta) \in \operatorname{cl}\mathcal{G}_\varepsilon\big\},$$

где $\mathcal{T}_\varepsilon := \mathcal{T} + B_\varepsilon$, B_ε — замкнутый шар радиуса ε, $\mathcal{F}_\varepsilon := \mathcal{F} + B_\varepsilon$, $\mathcal{G}_\varepsilon := \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{F}_\varepsilon \cup \mathcal{T}_\varepsilon)$. Считаем величину ε достаточно малой, чтобы множество $\mathcal{G}_\varepsilon$ было непустым.

Применяя свою стратегию U в дискретной схеме управления на разбиении Δ оси времени ($\Delta = \{t_i : t_{i+1} > t_i,\ t_i \to +\infty\}$), первый игрок гарантирует себе результат

$$T_1^\varepsilon(x_0, U, \Delta) := \sup\Big\{\tau_\varepsilon\big(x(\cdot)\big) : x(\cdot) \in \mathbf{X}(x_0, U, \Delta)\Big\}, \tag{2.1}$$
$$T_1^\varepsilon(x_0, U) := \limsup_{\operatorname{diam}(\Delta)\downarrow 0} T_1^\varepsilon(x_0, U, \Delta), \quad T_1^\varepsilon(x_0) := \inf_U T_1^\varepsilon(x_0, U), \quad T_1^0(x_0) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} T_1^\varepsilon(x_0),$$

где $\operatorname{diam}(\Delta) := \sup\{t_{i+1} - t_i : i = 0, 1, 2, \ldots\}$, а $\mathbf{X}(x_0, U, \Delta)$ — пучок пошаговых движений системы, выпущенных из точки x_0 с дискретным применением стратегии U первого игрока на разбиении Δ и всевозможных измеримых реализациях $q(\cdot) : [0, +\infty) \to Q$ управления второго игрока. Величина $T_1^0(x_0)$ есть гарантированный результат первого игрока в точке x_0.

Аналогично определяется оптимальный результат для второго игрока при применении им стратегии V в дискретной схеме управления на разбиении Δ оси времени:

$$T_2^\varepsilon(x_0, V, \Delta) := \inf\Big\{\tau_\varepsilon\big(x(\cdot)\big) : x(\cdot) \in \mathbf{X}(x_0, V, \Delta)\Big\}, \tag{2.2}$$
$$T_2^\varepsilon(x_0, V) := \liminf_{\operatorname{diam}(\Delta)\downarrow 0} T_2^\varepsilon(x_0, V, \Delta), \quad T_2^\varepsilon(x_0) := \sup_V T_2^\varepsilon(x_0, V), \quad T_2^0(x_0) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} T_2^\varepsilon(x_0).$$

Аналогично, $\mathbf{X}(x_0, V, \Delta)$ — пучок пошаговых движений системы, выпущенных из точки x_0 с дискретным применением стратегии V второго игрока на разбиении Δ и всевозможных измеримых реализациях $p(\cdot) : [0, +\infty) \to P$ управления первого игрока.

В [12] с использованием результатов книг [6; 7] авторами было доказано, что у задачи быстродействия с линией жизни (1.1), (1.3) существует функция цены

$$T(x_0) := T_1^0(x_0) = \limsup_{\operatorname{diam}(\Delta)\downarrow 0} \inf_U \lim_{\varepsilon\downarrow 0} T_1^\varepsilon(x_0, U, \Delta^{(1)}) = T_2^0(x_0) = \liminf_{\operatorname{diam}(\Delta)\downarrow 0} \sup_V \lim_{\varepsilon\downarrow 0} T_2^\varepsilon(x_0, V, \Delta^{(2)}).$$

Некоторое неудобство для исследования игры (1.1), (1.3) представляет неограниченность значений функций платы и цены. Поэтому часто с помощью *замены Кружкова* от неограниченной функции платы переходят к ограниченной:

$$J\big(x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big) = \begin{cases} 1 - \exp\big(-\tau\big(x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big)\big), & \text{если } \tau\big(x_0, p(\cdot), q(\cdot)\big) < +\infty, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.3}$$

При этом функция цены также становится ограниченной, и ее значения лежат в диапазоне от нуля до единицы.

3. Минимаксное решение

Далее по тексту наложим ограничение на множество $\mathcal{G}$: считаем, что его граница гладкая (т. е. гладкими являются границы множеств $\mathcal{T}$ и $\mathcal{F}$).

Запишем краевую задачу для уравнения Гамильтона — Якоби, соответствующую дифференциальной игре (1.1), (2.3) с линией жизни

$$H\big(x, Du(x)\big) - u(x) = 0, \quad x \in \mathcal{G}, \tag{3.1}$$

$$u(x) = 0 \ \text{ при } \ x \in \partial\mathcal{T}, \quad u(x) = 1 \ \text{ при } \ x \in \partial\mathcal{F}. \tag{3.2}$$

Здесь функция Гамильтона $H(x, s) = \mathcal{H}(x, s) + 1$.

Задача (3.1), (3.2) вкладывается в один из классов задач, изучаемых в книгах [11]. В частности, там изучаются существование и единственность решения краевой задачи Дирихле

$$F(x, u, Du) = 0, \quad x \in G, \quad u(x) = \sigma(x), \quad x \in \partial G \tag{3.3}$$

(см. [11, гл. 18]), где G — область, в которой решается задача. Поскольку уравнения в частных производных первого порядка могут не иметь решения в классическом смысле, исследуются *минимаксные* решения краевой задачи, которые строятся на основе понятий верхнего и нижнего решений уравнения (3.3), определения которых даются в [11, разд. 4.2, с. 38–40], а также на основе понятий верхнего, нижнего и минимаксных решений краевой задачи (3.3), которые вводятся в [11, разд.18.3, с.243–245].

Теорема существования и единственности минимаксного решения задачи (3.3) сформулирована в [11, теорема 18.6, разд. 18.6, с. 245–246]. Для выполнения теоремы существования и единственности функция Гамильтона $H(x, s)$ и краевое условие $\sigma(\cdot)$ должны удовлетворять требованиям (H1)–(H4) [11, с. 241].

Отметим некоторую несимметричность определений верхнего и нижнего решений краевой задачи (3.3), а именно то, что в определении нижнего решения имеется требование (jjj) непрерывности его на границе ∂G области G, а в определении верхнего решения такого требования нет. Однако, как отмечается в [11, разд. 18.6, с. 245–246], можно перенести требование (jjj) непрерывности в определение верхнего решения задачи (3.3) и переформулировать теорему существования и единственности, заменив требование существования нижнего решения, непрерывного на границе ∂G, на существование верхнего решения, непрерывного там же.

Цель данного раздела — показать, что для задачи (3.1), (3.2) существует минимаксное решение. Согласно требованиям теоремы существования и единственности минимаксного решения нужно подобрать функцию $\underline{u}$, которая бы являлась нижним решением задачи (3.1), (3.2) и была бы непрерывной на $\partial\mathcal{G}$.

Выберем и зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и отступим от множества $\mathcal{F}$ наружу на величину ε: $\mathcal{F}_\varepsilon = \mathcal{F} + B_\varepsilon$, $\mathcal{G}_\varepsilon = \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{F}_\varepsilon \cup \mathcal{T})$. Опять величину ε считаем достаточно малой, чтобы и в этой ситуации множество $\mathcal{G}_\varepsilon$ было непусто.

Построим функцию $\underline{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\underline{u}(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{G}_\varepsilon \cup \partial\mathcal{T}, \\ 1 - \dfrac{\operatorname{dist}(x, \mathcal{F})}{\varepsilon}, & x \in \mathcal{F}_\varepsilon \setminus \operatorname{int}\mathcal{F}, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\operatorname{int}\mathcal{F}$ обозначает внутренность множества $\mathcal{F}$, а $\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}) = \min\big\{\|x - a\| \colon a \in \mathcal{F}\big\}$ — расстояние от точки x до множества $\mathcal{F}$.

Построенная функция непрерывна, а значит, и полунепрерывна сверху, и для нее выполняются условия из определения нижнего решения [11, разд. 18.3, с. 243–244] для краевой задачи. Более того, в силу гладкости границы $\mathcal{F}$ можно подобрать величину ε столь малой, чтобы на множестве $\mathcal{F}_\varepsilon \setminus \operatorname{int}\mathcal{F}$ функция $\underline{u}$ была гладкой. Будем считать, что ε удовлетворяет этому условию.

Осталось показать, что сужение $\underline{u}$ на область $\mathcal{G}$ является нижним решением уравнения (3.1). Для этого воспользуемся определением нижнего решения уравнения Гамильтона — Якоби:

$$H(x,s) - \underline{u}(x) \geqslant 0 \quad \forall s \in D^+\underline{u}(x).$$

Здесь и далее $D^+\underline{u}(x)$ — супердифференциал функции $\underline{u}$ в точке x (см., например, [11, с. 298]).

Рассмотрим три случая.

(i) Пусть $x \in \mathcal{G}_\varepsilon$. Тогда $\underline{u}(x) = 0$, $D^+\underline{u}(x) = \{\mathbf{0}\}$; $\mathbf{0}$ — нулевой вектор.

$$H(x,s) - \underline{u}(x) = \min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle \mathbf{0}, f(x,p,q)\big\rangle + 1 - 0 = 1 \geqslant 0.$$

(ii) Пусть $x \in \operatorname{int}\mathcal{F}_\varepsilon$. Пусть точка $x_0 \in \partial\mathcal{F}$ такая, что кратчайшее расстояние от x до $\mathcal{F}$ есть $\operatorname{dist}(x,\mathcal{F}) = \|x - x_0\|$.

Тогда в силу гладкости границы $\mathcal{F}$ и функции $\underline{u}$ в $\operatorname{int}\mathcal{F}_\varepsilon \setminus \mathcal{F}$ имеем, что

$$x - x_0 = n_\mathcal{F}(x_0)\|x - x_0\| = n_\mathcal{F}(x_0)\operatorname{dist}(x,\mathcal{F}),$$

где $n_\mathcal{F}(x_0)$ — вектор внешней нормали к множеству $\mathcal{F}$ в точке x_0. В данной точке функция $\underline{u}(x) = 1 - \varepsilon^{-1}\operatorname{dist}(x,\mathcal{F})$ и

$$D^+\underline{u}(x) = \big\{\nabla\underline{u}(x)\big\}, \quad \nabla\underline{u}(x) = -\big(\varepsilon\operatorname{dist}(x,\mathcal{F})\big)^{-1}(x - x_0) = -\varepsilon^{-1}n_\mathcal{F}(x_0).$$

Оценим выражение $H(x,s) - \underline{u}(x)$:

$$\begin{aligned}
H(x,s) - \underline{u}(x) &= \min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle \nabla\underline{u}(x), f(x,p,q)\big\rangle + 1 - 1 + \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{F})}{\varepsilon}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle -n_\mathcal{F}(x_0), f(x,p,q) \pm f(x_0,p,q)\big\rangle + \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{F})}{\varepsilon}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\Big\{\big\langle -n_\mathcal{F}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle - \big\langle n_\mathcal{F}(x_0), f(x,p,q) - f(x_0,p,q)\big\rangle\Big\} + \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{F})}{\varepsilon}\\
&\geqslant \frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\Big\{\big\langle -n_\mathcal{F}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle - \|n_\mathcal{F}(x_0)\|\cdot\|f(x,p,q) - f(x_0,p,q)\|\Big\} + \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{F})}{\varepsilon}\\
&\geqslant \frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle -n_\mathcal{F}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle - \frac{\lambda\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{F})}{\varepsilon}\\
&\geqslant \frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle -n_\mathcal{F}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle - \lambda + \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{F})}{\varepsilon}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\Big(\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle -n_\mathcal{F}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle + \operatorname{dist}(x,\mathcal{F})\Big) - \lambda.
\end{aligned}$$

Дополнительно предположим, что для любой точки x_0 с границы $\mathcal{F}$ выполнено неравенство

$$\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle -n_\mathcal{F}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle = \max_{q\in Q}\min_{p\in P}\big\langle -n_\mathcal{F}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle > 0. \tag{3.5}$$

Смысл этого соотношения в том, что если система находится в любой точке границы множества $\mathcal{F}$, то второй игрок может направить движение системы внутрь множества $\mathcal{F}$.

Вследствие непрерывности функции f, непрерывности вектора $n_\mathcal{F}(x)$ вдоль границы $\mathcal{F}$ (из-за гладкости границы $\mathcal{F}$) и непрерывности скалярного произведения по аргументам можно утверждать, что найдется такое число $\eta > 0$, что для любой точки $x_0 \in \partial\mathcal{F}$ выполнено

$$\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle -n_\mathcal{F}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle \geqslant \eta > 0.$$

Тогда по η можно подобрать такую достаточно малую величину ε, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\Big(\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle -n_\mathcal{F}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle + \operatorname{dist}(x,\mathcal{F})\Big) - \lambda \geqslant 0.$$

(iii) Пусть $x \in \partial\mathcal{F}_\varepsilon$. Тогда $\underline{u}(x) = 0$, а $D^+\underline{u}(x) = \operatorname{co}\{\nabla\underline{u}(x), \mathbf{0}\} = \{\gamma\nabla\underline{u}(x) \colon \gamma \in [0,1]\}$ (co — операция взятия выпуклой оболочки множества.) Под величиной $\nabla\underline{u}(x)$ понимаем предел $\nabla\underline{u}(y)$ при $y \to x$, $y \in \mathcal{F}_\varepsilon$. Поскольку функция $\underline{u}$ гладкая на множестве $\mathcal{F}_\varepsilon \setminus \operatorname{int}\mathcal{F}$, то такой предел существует.

Проведем подобную оценку:

$$H(x,s) - \underline{u}(x) = \min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle \gamma\nabla\underline{u}(x), f(x,p,q)\big\rangle + 1 - 0 = \frac{1}{\varepsilon}\gamma\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle -n_{\mathcal{F}}(x_0), f(x,p,q)\big\rangle + 1.$$

Аналогично предыдущему случаю в том же предположении (3.5) приходим к неравенству

$$H(x,s) - \underline{u}(x) \geqslant \gamma\Big(\frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle -n_{\mathcal{F}}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle - \lambda\Big) + 1,$$

которое с помощью выбора ε снова можно сделать неотрицательным для любого $\gamma \in [0,1]$.

Итак, в предположении (3.5) для задачи (3.1), (3.2) существует нижнее решение, непрерывное на $\partial\mathcal{G}$, и выполняется теорема существования и единственности минимаксного решения. Значит, в этом предположении для задачи (3.1), (3.2) существует минимаксное решение.

Теперь проверим выполнение требований варианта теоремы существования и единственности минимаксного решения, в котором требуется существование верхнего решения задачи (3.1), (3.2), непрерывного на $\partial\mathcal{G}$. Для существования минимаксного решения это не требуется, так как оно уже доказано, однако в дальнейшем нам потребуется существование верхнего решения, непрерывного на $\partial\mathcal{G}$.

Теперь мы отступим от множества $\mathcal{T}$ наружу на некоторое небольшое расстояние $\varepsilon > 0$, получив множества $\mathcal{T}_\varepsilon := \mathcal{T} + B_\varepsilon$, $\mathcal{G}_\varepsilon = \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{F} \cup \mathcal{T}_\varepsilon)$.

Определим функцию $\bar{u} : \operatorname{cl}\mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}$ так:

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathcal{G}_\varepsilon \cup \partial\mathcal{F}, \\ \dfrac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{T})}{\varepsilon}, & x \in \mathcal{T}_\varepsilon \setminus \operatorname{int}\mathcal{T}. \end{cases}$$

Функция $\bar{u}$ является ограниченной, непрерывной на границе $\mathcal{G}$, и для нее выполняется граничное условие. В силу гладкости границы множества $\mathcal{T}$ можно подобрать достаточно малое ε, чтобы функция $\bar{u}$ была гладкой на множестве $\mathcal{T}_\varepsilon \setminus \operatorname{int}\mathcal{T}$. Считаем, что это сделано.

Проверим, что $\bar{u}$ — верхнее решение задачи (3.1). По определению функция $\bar{u}(x)$ является верхним решением, если имеет место неравенство

$$H(x,s) - \bar{u}(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in \mathcal{G}, \quad \forall s \in D^-u(x).$$

Здесь и далее $D^-\bar{u}(x)$ — субдифференциал функции $\bar{u}$ в точке x (см., например, [11, с. 298]).

Рассмотрим три случая.

(i) Пусть $x \in \mathcal{G}_\varepsilon$. Тогда $\bar{u}(x) = 1$, $D^-\bar{u}(x) = \{\mathbf{0}\}$.

$$H(x,s) - \bar{u}(x) = \min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle \mathbf{0}, f(x,p,q)\big\rangle + 1 - 1 = 0 \leqslant 0.$$

(ii) Пусть $x \in \operatorname{int}\mathcal{T}_\varepsilon$. Тогда в данной точке $\bar{u}(x) = \varepsilon^{-1}\operatorname{dist}(x,\mathcal{T})$; пусть кратчайшее расстояние от точки x до множества $\mathcal{T}$ достигается в точке $x_0 \in \partial\mathcal{T}$, т. е. $\operatorname{dist}(x,\mathcal{T}) := \|x - x_0\|$.

$$D^-\bar{u}(x) = \big\{\nabla\bar{u}(x)\big\}, \quad \nabla\bar{u}(x) = \big(\varepsilon\operatorname{dist}(x,\mathcal{T})\big)^{-1}(x - x_0) = \varepsilon^{-1}n_{\mathcal{T}}(x_0),$$

где $n_{\mathcal{T}}(x_0)$ — вектор внешней нормали к множеству $\mathcal{T}$ в точке x_0.

Оценим выражение $H(x,s)-\bar u(x)$:

$$\begin{aligned}
H(x,s)-\bar u(x) &= \min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle \nabla\bar u(x), f(x,p,q)\big\rangle + 1 - \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{T})}{\varepsilon}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x,p,q)\pm f(x_0,p,q)\big\rangle + 1 - \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{T})}{\varepsilon}\\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\Big\{\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle + \max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x,p,q)-f(x_0,p,q)\big\rangle\Big\} + 1 - \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{T})}{\varepsilon}\\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\Big\{\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle + \max_{q\in Q}\|n_{\mathcal{T}}(x_0)\|\cdot\|f(x,p,q)-f(x_0,p,q)\|\Big\} + 1 - \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{T})}{\varepsilon}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\|n_{\mathcal{T}}(x_0)\|\cdot\lambda\|x-x_0\| + 1 - \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{T})}{\varepsilon}\\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle + \frac{\lambda\varepsilon}{\varepsilon} + 1 - \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{T})}{\varepsilon}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\Big(\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle - \operatorname{dist}(x,\mathcal{T})\Big) + \lambda + 1.
\end{aligned}$$

Дополнительно предположим, что граница $\partial\mathcal{T}$ — допустимая зона [1], т. е. для любой точки $x_0\in\partial\mathcal{T}$ выполнено неравенство

$$\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle < 0. \tag{3.6}$$

Вследствие непрерывности функции f, непрерывности вектора $n_{\mathcal{T}}(x)$ вдоль границы множества $\mathcal{T}$ (в силу гладкости границы $\mathcal{T}$) и непрерывности скалярного произведения по аргументам найдется такая величина $\eta<0$, что для любой точки $x_0\in\partial\mathcal{T}$ выполнено неравенство

$$\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle \leqslant \eta < 0.$$

Тогда по η можно подобрать такое число ε, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\Big(\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle - \operatorname{dist}(x,\mathcal{T})\Big) + \lambda + 1 \leqslant 0.$$

(iii) Пусть $x\in\partial\mathcal{T}_\varepsilon$. Тогда $\bar u(x)=1$, а $D^-\bar u(x)=\operatorname{co}\big\{\nabla\bar u(x),\mathbf{0}\big\}=\big\{\gamma\nabla\bar u(x)\colon \gamma\in[0,1]\big\}$. Под величиной $\nabla\bar u(x)$ понимаем предел $\nabla\bar u(y)$ при $y\to x$, $y\in\mathcal{G}_\varepsilon$. Поскольку функция $\bar u$ гладкая на множестве $\mathcal{G}_\varepsilon\setminus\operatorname{int}\mathcal{G}$, то такой предел существует. Тогда

$$H(x,s)-u(x) = \min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle \gamma\nabla\bar u(x), f(x,p,q)\big\rangle + 1 - 1 = \frac{1}{\varepsilon}\gamma\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x,p,q)\big\rangle.$$

Аналогично предыдущему случаю в предположении (3.6) допустимости $\partial\mathcal{T}$ приходим к соотношению

$$H(x,s)-u(x) \leqslant \gamma\Big(\frac{1}{\varepsilon}\min_{p\in P}\max_{q\in Q}\big\langle n_{\mathcal{T}}(x_0), f(x_0,p,q)\big\rangle + \lambda\Big),$$

которое с помощью выбора ε снова можно сделать неположительным для любого $\gamma\in[0,1]$.

Таким образом, если $\partial\mathcal{T}$ — допустимая зона (выполнено предположение (3.6)), то для задачи (3.1), (3.2) существует верхнее решение, непрерывное на границе $\partial\mathcal{G}$, а значит, и выполняется соответствующая теорема существования минимаксного решения.

Следовательно, можно утверждать, что для задачи (3.1), (3.2) существует минимаксное решение, если выполнено хотя бы одно из предположений (3.5) и (3.6). Заметим, что выполнение предположения (3.5) влечет непрерывность функции цены вблизи $\partial\mathcal{F}$, а предположения (3.6) — вблизи $\partial\mathcal{T}$. Если выполнены оба предположения (как это будет требоваться ниже в разделе 4), то функция цены будет непрерывной на множестве $\mathcal{G}$. Интерес представляет доказательство существования минимаксного решения задачи (3.1), (3.2) в каких-либо более слабых предположениях.

4. Совпадение функции цены и минимаксного решения

В книге [11] доказательство совпадения функции цены задачи быстродействия и минимаксного решения краевой задачи для соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби проводится на основе двух утверждений. Согласно первому из них, теореме 19.6 [11, разд. 19.6, с. 269–272], при применении первым игроком стратегии градиентного прицеливания в дискретной схеме управления его гарантированный результат может быть сделан сколь угодно близким сверху к минимаксному решению посредством уменьшения шага по времени и точности приближения градиента функции цены. Второе утверждение, теорема 19.8 [11, разд. 19.8, с. 273–274], почти симметрично первому, и согласно ему гарантированный результат второго игрока может быть сделан сколь угодно близким снизу к любому нижнему решению.

Теоремы 19.6 и 19.8 не являются абсолютно симметричными: в то время как теорема 19.6 оперирует понятием минимаксного решения, в теореме 19.8 используется нижнее решение. Такая несимметричность идеологически обусловлена тем, что если цель первого игрока — привести траекторию на терминальное множество, то цель второго — отклонить движение системы от ε-окрестности терминального множества.

Сформулируем и докажем аналогичные теоремы для задачи быстродействия с линией жизни. Для нее мы и в теореме, аналогичной 19.6 (теорема 2), используем не минимаксное решение, а верхнее решение, так как первый игрок в такой игре должен не только приводить траекторию на терминальное множество, но и уклонять движение системы от ε-окрестности множества $\mathcal{F}$.

Докажем сначала теорему об оценке оптимального результата второго игрока.

Пусть $u_\natural$ — нижнее решение задачи (3.1), (3.2), непрерывное на $\partial\mathcal{G}$. Введем следующее преобразование функции $u_\natural$:

$$u_\natural^\alpha(x) := \max_{y\in \mathrm{cl}\,\mathcal{G}} \bigl\{u_\natural(y) - w_\alpha(x,y)\bigr\}.$$

Здесь

$$w_\alpha(x,y) := \frac{\bigl(\alpha^{2/\nu} + \|x-y\|^2\bigr)^\nu}{\alpha}, \quad \nu := (2+2\lambda)^{-1}, \quad 0<\alpha<\min\bigl\{1/3, [\lambda(1+\lambda)]^{-1}\bigr\} \tag{4.1}$$

и λ — коэффициент из условия Липшица (1.2).

Выберем точку

$$y_\alpha(x) \in \operatorname{Arg}\max_{y\in \mathrm{cl}\,\mathcal{G}} \bigl[u_\natural(y) - w_\alpha(x,y)\bigr].$$

Определим позиционную стратегию $V_\alpha : \mathrm{cl}\,\mathcal{G} \mapsto Q$ для второго игрока с помощью соотношения

$$V_\alpha(x) = q_0\bigl(x, s_\alpha(x)\bigr), \tag{4.2}$$

где q_0 — экстремальная предстрагетия, определенная равенством

$$q_0(x,s) \in \operatorname{Arg}\max_{q\in Q}\Bigl[\min_{p\in P}\bigl\langle s, f(x,p,q)\bigr\rangle\Bigr],$$

а вектор $s_\alpha(x)$ задается соотношением

$$s_\alpha(x) := -\bigl(D_x w_\alpha\bigr)\bigl(x, y_\alpha(x)\bigr) = \bigl(D_y w_\alpha\bigr)\bigl(x, y_\alpha(x)\bigr).$$

Теорема 1. *Пусть x_0 — точка области $\mathcal{G}$, и пусть θ — положительное число, удовлетворяющее неравенству*

$$\theta < \omega := -\ln\bigl(1-u(x_0)\bigr),$$

где $u : \mathrm{cl}\,\mathcal{G} \mapsto [0,1]$ — минимаксное решение задачи (3.1), (3.2). *Тогда существуют нижнее решение $u_\natural$ этой задачи, удовлетворяющее неравенству*

$$\theta < \omega_\natural := -\ln\bigl(1-u_\natural(x_0)\bigr), \tag{4.3}$$

и такие числа $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, $\delta_0 > 0$, что оценка

$$T_2^{\varepsilon}(x_0, V_\alpha, \Delta) \geqslant \theta \tag{4.4}$$

имеет место, если $\delta := \operatorname{diam}(\Delta) \leqslant \delta_0$. Здесь V_α — позиционная стратегия второго игрока, определенная соотношением (4.2), *величина $T_2^{\varepsilon}(x_0, V_\alpha, \Delta)$ задается равенством* (2.2).

Дополнительно предположим выполнение неравенства (3.5). В таком случае будет существовать нижнее решение, что было показано в разд. 3.

Доказательство теоремы 19.8 для обычной задачи быстродействия сводится к двум случаям: траектория или приходит на множество $\mathcal{T}$, или нет. В задаче быстродействия с линией жизни уже возможны три случая: траектория приходит на множество $\mathcal{T}$, не попадая на $\mathcal{F}$; траектория навсегда остается в множестве $\mathcal{G}$; траектория приходит на множество $\mathcal{F}$.

Подберем искомое нижнее решение $u_\natural$ следующим образом. Поскольку минимаксное решение существует (благодаря дополнительному предположению), то существует и последовательность нижних решений, непрерывных на границе $\partial\mathcal{G}$ и сходящихся к этому минимаксному решению. Среди элементов этой последовательности и выбирается нижнее решение так, чтобы было выполнено условие (4.3).

Выберем некоторое число $\alpha > 0$ и последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$ положительной полуоси времени такую, что $\delta_n = \operatorname{diam}\Delta_n \to 0$. По последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ выстраиваем последовательность пучков движений $\mathbf{X}(x_0, V_\alpha, \Delta_n) := \mathbf{X}_n^\alpha$.

Доказательство данной теоремы распадается на следующие случаи.

(I) Найдутся $\bar\varepsilon > 0$, $\bar\alpha \in (0, \bar\varepsilon/3]$ такие, что для всех последовательностей $\bigl\{x_n(\cdot) \in \mathbf{X}_n^\alpha\bigr\}$ и для всех $t \leqslant \theta$ выполнено неравенство $\operatorname{dist}\bigl(x_n(t), \mathcal{T}\bigr) \geqslant 3\bar\alpha$. При этом возможны два случая:

(I.1) Для каждого n и для любой траектории $x_n(\cdot) \in \mathbf{X}_n^\alpha$ при всех $t \in \Delta_n$, удовлетворяющих ограничению $t < \theta$, выполняется неравенство $\operatorname{dist}(x_n(t), \mathcal{F}) > 3\bar\alpha$,

(I.2) либо для каждого n существует траектория $x_n(\cdot) \in \mathbf{X}_n^\alpha$ такая, что найдется момент времени $t_n \in \Delta_n$ такой, что $t_n < \theta$ и $\operatorname{dist}(x_n(t_n), \mathcal{F}) \leqslant 3\bar\alpha$.

(II) Наоборот, пусть для любых $\varepsilon > 0$ и $\alpha \in (0, \varepsilon/3]$ найдутся последовательность $\bigl\{x_n(\cdot) \in \mathbf{X}_n^\alpha\bigr\}$ и набор моментов $\bar t_n$, $\bar t_n < \theta$, для которых имеем $\operatorname{dist}\bigl(x_n(\bar t_n), \mathcal{T}\bigr) < 3\alpha$.

В случае (I) оценка (4.4) является очевидной. Действительно, в ситуации (I.1) существует стратегия второго игрока, уклоняющая движение системы от некоторой окрестности терминального множества вплоть до момента θ, а значит, второй игрок может уклониться и от терминального множества до этого же момента, т. е. $\forall n \in \mathbb{N}$ $T_2^{\bar\varepsilon}(x_0, V_{\bar\alpha}, \Delta_n) \geqslant \theta$. Или же в ситуации (I.2) есть стратегия второго игрока, которая приводит движение системы на множество $\mathcal{F}$ до момента θ, а стало быть, гарантированный результат первого игрока равен 1, что больше, чем θ.

Покажем теперь, что случай (II) приводит к противоречию.

Возьмем какое-нибудь разбиение $\Delta = \{t_i\}$ оси времени. Рассуждениями, подобными тем, которые применялись в доказательстве теоремы 19.6 [11, с. 270–272], доказываем оценку на изменение функции $u_\natural^\alpha$ вдоль движения из пучка $\mathbf{X}_n^\alpha$, аналогичную оценке (19.37) [11, разд. 19.6, с. 269]:

$$u_\natural^\alpha\bigl(x(\tau)\bigr) \geqslant 1 - \bigl[1 - u_\natural^\alpha(x_{t_i})\bigr]e^{\tau - t_i} - (\tau - t_i)e^{\tau - t_i}h(\delta),$$

где $\tau \in [t_i, t_{i+1}] \cap [0, \theta_0]$. Здесь $h(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Момент $\theta_0 = t_{k+1}$ таков, что t_k, $t_{k+1} < \theta$, $\operatorname{dist}\bigl(x(t_k), \mathcal{T}\bigr) > 3\alpha$, а $\operatorname{dist}\bigl(x(t_{k+1}), \mathcal{T}\bigr) \leqslant 3\alpha$. Суммируя по всем отрезкам $[t_i, t_{i+1}]$, получим

$$u_\natural^\alpha\bigl(x(\theta_0)\bigr) \geqslant 1 - \bigl[1 - u_\natural^\alpha(x_0)\bigr]e^{\theta_0} - \theta_0 e^{\theta_0}h(\delta) \geqslant 1 - e^{\theta_0 - \omega_\natural} - e^{\theta_0}\alpha - \theta_0 e^{\theta_0}h(\delta). \tag{4.5}$$

Возьмем произвольные последовательности $\{\varepsilon_n\} \to 0$ и $\bigl\{\alpha_n : \alpha_n \in (0, \varepsilon_n/3]\bigr\}$. По ним строим функциональную последовательность $\{x_n(\cdot) : x_n(\cdot) \in \mathbf{X}_n^{\alpha_n}\}$ и последовательность моментов

$\{\bar{t}_n \in \Delta_n : \operatorname{dist}\big(x(\bar{t}_n), \mathcal{T}\big) < 3\alpha_n\}$. На основе числовых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\bar{t}_n\}$ и функциональных последовательностей $\{u_\natural^{\alpha_n}(\cdot)\}$ и $\{x_n(\cdot)\}$ получаем числовую последовательность

$$\Big\{u_\natural^{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big)\Big\}, \text{ где } u_\natural^{\alpha_n}(x) := \max_{y \in \operatorname{cl} \mathcal{G}} \big\{u_\natural(y) - w_{\alpha_n}(x, y)\big\}. \tag{4.6}$$

Так же, как и в рассуждениях в разд. 19.5 книги [11] (с. 267–268), можно показать, что максимум в (4.6) достигается в такой точке y_{α_n}, что $\|y_{\alpha_n} - x\| \leqslant 2\alpha_n$.

Таким образом, имеем, что $y_{\alpha_n}(x) \in O_{2\alpha_n}(x)$ и

$$u_\natural^{\alpha_n}(x) := \max_{y \in O_{2\alpha_n}(x)} \big\{u_\natural(y) - w_{\alpha_n}(x, y)\big\}.$$

По смыслу моментов $\bar{t}_n$ для них справедливо неравенство (4.5) с заменой θ_0 на $\bar{t}_n$

$$u_\natural^{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big) \geqslant 1 - \big[1 - u_\natural^{\alpha_n}(x_0)\big] e^{\bar{t}_n} - \bar{t}_n e^{\bar{t}_n} h(\delta_n) \geqslant 1 - e^{\bar{t}_n - \omega_\natural} - \alpha_n e^{\bar{t}_n} - \bar{t}_n e^{\bar{t}_n} h(\delta_n). \tag{4.7}$$

Последовательность $\{\bar{t}_n\}$ ограничена. В ней можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\bar{t}_{n_k}\} \to \bar{t}$. Чтобы не загромождать запись двойными индексами, положим, что сама последовательность $\{\bar{t}_n\}$ сходится. Поскольку для всех n верно неравенство $\bar{t}_n < \theta$, то $\bar{t} \leqslant \theta$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{x_n(\cdot)\}$. Ее элементы — решения дифференциального включения, поэтому $\{x_n(\cdot)\}$ является последовательностью, равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной. Следовательно, можно применить теорему Арцела — Асколи и выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность; пусть сходящейся последовательностью является сама последовательность $\{x_n(\cdot)\}$. Обозначим ее равномерный предел $\bar{x}(\cdot)$.

В силу равномерной сходимости $x_n(\cdot) \rightrightarrows \bar{x}(\cdot)$ имеем, что предел $\bar{x}(\cdot)$ непрерывен и, как следствие, $x_n(\bar{t}_n) \to \bar{x}(\bar{t})$ при $n \to \infty$. Поскольку $\operatorname{dist}\big(x_n(\bar{t}_n), \mathcal{T}\big) < 3\alpha_n$, а $\alpha_n \to 0$, то получаем, что $\bar{x}(\bar{t}) \in \partial\mathcal{T}$ и $u_\natural\big(\bar{x}(\bar{t})\big) = 0$ по определению нижнего решения (оно удовлетворяет граничному условию на $\partial\mathcal{T}$).

Покажем, что $\big\{u_\natural^{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big)\big\} \to u_\natural\big(\bar{x}(\bar{t})\big)$.

$$\begin{aligned}\Big|u_\natural^{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big) - u_\natural\big(\bar{x}(\bar{t})\big)\Big| &= \Big|\max_{y \in O_{2\alpha_n}(x_n(\bar{t}_n))} \Big\{u_\natural(y) - w_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n), y\big)\Big\} - u_\natural\big(\bar{x}(\bar{t})\big)\Big| \\ &= \Big|u_\natural\Big(y_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big)\Big) - w_{\alpha_n}\Big(x_n(\bar{t}_n), y_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big)\Big) - u_\natural\big(\bar{x}(\bar{t})\big)\Big| \\ &\leqslant \Big|u_\natural\Big(y_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big)\Big) - u_\natural\big(\bar{x}(\bar{t})\big)\Big| + \Big|w_{\alpha_n}\Big(x_n(\bar{t}_n), y_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big)\Big)\Big|.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Рассмотрим в (4.8) по отдельности первое и второе слагаемые-модули. В силу сделанного выше замечания имеем, что $y_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big) \in O_{2\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big)$. Поскольку сходятся последовательности $x_n(\bar{t}_n) \to \bar{x}(\bar{t})$ и $\alpha_n \to 0$, то $y_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big) \to \bar{x}(\bar{t})$. Поскольку $\bar{x}(\bar{t}) \in \partial\mathcal{T}$, а функция $u_\natural(\cdot)$, будучи нижним решением, непрерывна на границе $\mathcal{T}$, то сходится и последовательность $u_\natural\big(y_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big)\big) \to u_\natural\big(\bar{x}(\bar{t})\big)$ и первый модуль стремится к нулю при $n \to \infty$.

Теперь обратимся ко второму модулю. Поскольку верны неравенства $\operatorname{dist}\big(x_n(\bar{t}_n), \mathcal{T}\big) \leqslant 3\alpha_n$ и $\big\|x_n(\bar{t}_n) - y_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big)\big\| \leqslant 2\alpha_n$, то $\operatorname{dist}\big(y_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big), \mathcal{T}\big) \leqslant 5\alpha_n$. Пусть

$$\Omega_{\alpha_n} := \max_{z \in \operatorname{cl}(\mathcal{T}_{5\alpha_n} \cap \mathcal{G})} u_\natural(z) = u_\natural(z_{\alpha_n}). \tag{4.9}$$

В этом равенстве максимум достигается в силу того, что функция $u_\natural(\cdot)$ полунепрерывна сверху и максимум ищется на компактном множестве. Имеем ограниченную последовательность $\{z_{\alpha_n}\}$, где z_{α_n} определяется в (4.9), из которой можно выделить подпоследовательность, сходящуюся, очевидно, к точке границы $\mathcal{T}$. Пусть сама последовательность $\{z_{\alpha_n}\}$ сходится. В силу непрерывности $u_\natural(\cdot)$ на границе $\mathcal{T}$ получаем, что $\Omega_{\alpha_n} = u_\natural(z_{\alpha_n}) \to 0$.

Тогда

$$0 \leqslant w_{\alpha_n}\Big(x_n(\bar{t}_n), y_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big)\Big) = u_\natural\Big(y_{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big)\Big) - u_\natural^{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big) \leqslant \Omega_{\alpha_n} + \alpha_n \to 0.$$

Стало быть, оба слагаемых в правой части (4.8) идут к нулю с ростом n, а значит, идет к нулю и левая часть. Следовательно, $u_\natural^{\alpha_n}\big(x_n(\bar{t}_n)\big) \to u_\natural\big(\bar{x}(\bar{t})\big)$.

С учетом этого перейдем в (4.7) к пределу по $n \to \infty$ (тогда $\alpha_n \to 0$ и $\delta_n \to 0$) и получим

$$0 = u_\natural\big(\bar{x}(\bar{t})\big) \geqslant 1 - e^{\bar{t}-\omega_\natural} > 0,$$

противоречие. Следовательно, случай (II) невозможен. Теорема доказана.

Теперь сформулируем и докажем теорему об оценке гарантированного результата первого игрока для задачи быстродействия с линией жизни.

Пусть $u^\natural$ — верхнее решение задачи (3.1), (3.2), непрерывное на $\partial\mathcal{G}$. Введем преобразование функции $u^\natural$:

$$u_\alpha^\natural(x) := \min_{y \in \mathrm{cl}\,\mathcal{G}} \big\{u^\natural(y) + w_\alpha(x,y)\big\},$$

где все вспомогательные величины определяются посредством (4.1).

Выберем точку

$$y^\alpha(x) \in \operatorname{Arg}\min_{y \in \mathrm{cl}\,\mathcal{G}} \big[u^\natural(y) + w_\alpha(x,y)\big].$$

Определим позиционную стратегию $U_\alpha : \mathrm{cl}\,\mathcal{G} \mapsto P$ первого игрока равенством

$$U_\alpha(x) = p_0\big(x, s_\alpha(x)\big). \tag{4.10}$$

Здесь функция p_0 — это экстремальная предстратегия, определенная равенством

$$p_0(x,s) \in \operatorname{Arg}\min_{p \in P} \Big[\max_{q \in Q} \big\langle s, f(x,p,q)\big\rangle\Big],$$

а вектор $s^\alpha(x)$ задается соотношением

$$s^\alpha(x) := \big(D_x w_\alpha\big)\big(x, y^\alpha(x)\big) = -\big(D_y w_\alpha\big)\big(x, y^\alpha(x)\big).$$

(Для того чтобы имелось отличие от соответствующих величин в определении (4.2) стратегии второго игрока, индексы α сделаны верхними.)

Теорема 2. *Пусть x_0 — точка области $\mathcal{G}$, удовлетворяющая неравенству $u(x_0) < 1$, где функция $u : \mathrm{cl}\,\mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}^n$ — минимаксное решение задачи* (3.1), (3.2). *Пусть ε и θ — произвольные числа, такие, что $\varepsilon > 0$ и $1 > \theta > \omega := -\ln(1 - u(x_0))$. Тогда существуют верхнее решение $u^\natural$ этой задачи, удовлетворяющее неравенству*

$$\theta > w^\natural := -\ln(1 - u^\natural(x_0)), \tag{4.11}$$

и числа $\alpha > 0$ и $\delta_0 > 0$, для которых выполняется оценка

$$T_1^\varepsilon(x_0, U_\alpha, \Delta) \leqslant \theta,$$

если $\mathrm{diam}(\Delta) \leqslant \delta_0$. Здесь U_α — позиционная стратегия первого игрока, определенная (4.10), *а величина $T_1^\varepsilon(x_0, U_\alpha, \Delta)$ задается равенством* (2.1).

Дополнительно предположим выполнение неравенства (3.6). В таком случае будет существовать верхнее решение, что было показано в разд. 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подберем искомое верхнее решение $u^\natural$, непрерывное на границе $\partial\mathcal{G}$, следующим образом. Поскольку минимаксное решение существует (благодаря дополнительному предположению), то существует и последовательность верхних решений, непрерывных на границе, сходящихся к этому минимаксному решению. Среди элементов этой последовательности и выбирается верхнее решение так, чтобы было выполнено условие (4.11).

Выберем некоторые $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$. Выберем и зафиксируем последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$ положительной полуоси времени такую, что $\delta_n = \operatorname{diam}\Delta_n \to 0$. По последовательности $\{\Delta_n\}$ получаем последовательность пучков $\mathbf{X}(x_0, V_\alpha, \Delta_n) := \mathbf{X}_n^\alpha$.

Рассмотрим следующие случаи.

(I) Найдутся $\bar\varepsilon > 0$, $\bar\alpha \in (0, \bar\varepsilon/3]$ такие, что для всех последовательностей $\bigl\{x_n(\cdot) \in \mathbf{X}_n^\alpha\bigr\}$ и для всех $t \leqslant \theta$ выполнено неравенство $\operatorname{dist}\bigl(x_n(t), \mathcal{F}\bigr) \geqslant 3\bar\alpha$. При этом возможны два случая:

(I.1) Для каждого n существует траектория $x_n(\cdot) \in \mathbf{X}_n^\alpha$ такая, что найдется момент времени $t_n \in \Delta_n$ такой, что $t_n < \theta$ и $\operatorname{dist}(x_n(t_n), \mathcal{T}) \leqslant 3\bar\alpha$,

(I.2) либо для каждого n и для любой траектории $x_n(\cdot) \in \mathbf{X}_n^\alpha$ выполняется противоположное неравенство $\operatorname{dist}(x_n(t), \mathcal{T}) > 3\bar\alpha$ при всех $t \in \Delta_n$, удовлетворяющих ограничению $t < \theta$.

(II) Наоборот, пусть для любых $\varepsilon > 0$ и $\alpha \in (0, \varepsilon/3]$ найдутся последовательность $\bigl\{x_n(\cdot) \in \mathbf{X}_n^\alpha\bigr\}$ и набор моментов $\bar t_n$, $\bar t_n < \theta$, для которых имеем $\operatorname{dist}\bigl(x_n(\bar t_n), \mathcal{F}\bigr) < 3\alpha$.

Случаи (I.1) и (I.2) рассматриваются аналогично случаям (i) и (ii) доказательства теоремы 19.6 из книги [11]. Рассмотрим случай (II).

Напомним, что
$$u_\alpha^\natural(x) = \min_{y \in \operatorname{cl}\mathcal{G}} \bigl\{u^\natural(y) + w(x,y)\bigr\},$$
для любого $\tau \in [t_i, t_{i+1}] \cap [0, \theta_0]$ выполнено неравенство
$$u_\alpha^\natural\bigl(x(\tau)\bigr) \leqslant 1 - \bigl[1 - u_\alpha^\natural\bigl(x(t_i)\bigr)\bigr]e^{\tau - t_i} + (\tau - t_i)e^{\tau - t_i}h(\delta)$$
(это доказывается в [11, с. 270–272]) и $u_\alpha^\natural(x_0) \leqslant u^\natural(x_0) + \alpha = 1 - e^{-\omega} + \alpha$.

Момент $\theta_0 = t_{k+1}$ таков, что t_k, $t_{k+1} < \theta$, $\operatorname{dist}(x(t_k), \mathcal{F}) > 3\alpha$, а $\operatorname{dist}(x(t_{k+1}), \mathcal{F}) \leqslant 3\alpha$. Из данных рекуррентных оценок можно получить, что
$$u_\alpha^\natural(x(\theta_0)) \leqslant 1 - [1 - u_\alpha^\natural(x_0)]e^{\theta_0} + \theta_0 e^{\theta_0} h(\delta) \leqslant 1 - e^{\theta_0 - \omega^\natural} + e^{\theta_0}\alpha + e^{\theta_0}\theta_0 h(\delta). \tag{4.12}$$

Аналогично теореме 1 строим сходящиеся последовательности
$$\begin{gathered}\{\varepsilon_n\} \to 0, \quad \bigl\{\alpha_n : \alpha_n \in (0, \varepsilon_n/3]\bigr\} \to 0,\\ \{x_n(\cdot) : x_n(\cdot) \in \mathbf{X}_n^{\alpha_n}\} \rightrightarrows \bar x(\cdot),\\ \bigl\{\bar t_n : \operatorname{dist}\bigl(x(\bar t_n), \mathcal{F}\bigr) < 3\alpha_n\bigr\} \to \bar t,\end{gathered}$$
причем $\bar x(\bar t) \in \partial\mathcal{F}$. По построенным последовательностям получаем
$$\bigl\{u_{\alpha_n}^\natural\bigl(x_n(\bar t_n)\bigr)\bigr\}, \quad \text{где } u_{\alpha_n}^\natural(x) := \min_{y \in \operatorname{cl}\mathcal{G}} \bigl\{u^\natural(y) + w_{\alpha_n}(x,y)\bigr\}.$$

Доказательство сходимости $\bigl\{u_{\alpha_n}^\natural\bigl(x_n(\bar t_n)\bigr)\bigr\} \to u_{\alpha_n}^\natural\bigl(\bar x(\bar t)\bigr)$ полностью повторяет аналогичное доказательство из теоремы 1.

В (4.12) по смыслу моментов t_n можно заменить θ_0 на t_n, после чего с использованием сходимости, указанной в предыдущем абзаце, получаем
$$1 = u^\natural\bigl(\bar x(\bar t)\bigr) \leqslant 1 - e^{\bar t - \omega^\natural} < 1$$
и приходим к противоречию. Теорема доказана.

Таким образом, обосновано, что гарантированный результат первого игрока в дискретной схеме управления в игре (1.1), (2.3) может быть сделан сколь угодно близким сверху к минимаксному решению задачи (3.1), (3.2), а гарантированный результат второго игрока — сколь угодно близким снизу к минимаксному решению. Как следствие можно утверждать, что предельные гарантированные результаты, которые совпадают между собой, также совпадают и с минимаксным решением, а значит, с минимаксным решением совпадает и функция цены игры (1.1), (2.3).

5. Совпадение функции цены и минимаксного решения в обычных задачах быстродействия

В [11] доказательство теоремы 19.8 опущено по причине того, что оно подобно доказательству теоремы 19.6. В попытках провести доказательство теоремы 19.8, аналогичное доказательству теоремы 19.6, авторы пришли к заключению, что аналогичными являются лишь оценки на изменение нижнего решения вдоль решений соответствующего характеристического включения, а само рассуждение опирается на дополнительную информацию о непрерывности выбранного нижнего решения на границе терминального множества.

Доказательство теоремы 1 может быть использовано для конструирования доказательства теоремы 19.8 из книги [11]. Доказательство теоремы 19.8 может быть разбито на два случая: если нашлась стратегия второго игрока, уклоняющая движение системы от некоторой окрестности терминального множества вплоть до момента θ, и если такая стратегия не нашлась. Первый случай является очевидным, а второй доказывается так же, как случай (II) в теореме 1.

6. Заключение

В данной статье рассматривались дифференциальные игры быстродействия с линией жизни, где под линией жизни понимается такое множество, при попадании системы на которое второй игрок немедленно выигрывает. Судя по всему, впервые такие игры были сформулированы Р. Айзексом, и они были исследованы лишь в весьма несложных постановках: в случае простой динамики системы или простой формы линии жизни. Значительный вклад в исследование игр с линией жизни внес Л.А. Петросян, но он в основном исследовал задачи с динамикой простых движений. На данный момент авторам неизвестны работы, содержащие полное исследование дифференциальных игр быстродействия с линией жизни.

В статье при достаточно сильных предположениях на границу области, на которой происходит игра, было доказано существование минимаксного решения краевой задачи соответствующей дифференциальной игры быстродействия с линией жизни. При тех же предположениях было показано, что функция цены дифференциальной игры быстродействия с линией жизни совпадает с минимаксным решением краевой задачи соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби. Также было предложено доказательство теоремы для классических дифференциальных игр быстродействия, гласящей, что оптимальный результат для убегающего может быть сделан сколь угодно близким снизу к минимаксному решению.

Сделанные предположения заключаются в том, что граница терминального множества и линия жизни — гладкие многообразия. Кроме того, считается, что граница терминального множества является допустимой зоной для первого игрока (т. е. если система находится на границе терминального множества, то первый игрок гарантирует заведение траектории системы внутрь терминального множества), а линия жизни — допустимая зона второго игрока (т. е. если система находится на линии жизни, то второй игрок гарантирует движение траектории системы вовне множества, на котором происходит игра). Вместе такие предположения гарантируют непрерывность функции цены. В дальнейшем планируется ослабить предположения, в рамках которых были доказаны теоремы, и найти связь функции цены игры быстродействия с функцией цены игры быстродействия с линией жизни.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. **Petrosjan L. A.** A family of differential survival games in the space $\mathbb{R}^n$ // Soviet Math. Dokl. 1965. No. 6. С. 377–380.
3. **Петросян Л.А.** Дисперсионные поверхности в одном семействе игр преследования // Докл. АН Армянской ССР. 1966. Т 43, № 4. С. 193–197.
4. **Дуткевич Ю.Г., Петросян Л.А.** Игра с “линией жизни”. Случай l-захвата // Вестн. Ленингр. ун-та. 1969. № 13. С. 31–38.
5. **Петросян Л.А.** Дифференциальные игры преследования. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1977. 222 с.
6. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. N Y: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
8. **Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P.** Some algorithms for differential games with two players and one target // RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique. 1994. Vol. 28, № 4. P. 441–461. doi: 10.1051/m2an/1994280404411 .
9. **Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P.** Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games // Stochastic and Differential Games. Annals Internat. Soc. Dynamic Games / eds. M. Bardi, T.E.S. Raghavan, T. Parthasarathy. Boston: Birkhäuser, 1999. Vol. 4. P. 177–247. doi: 10.1007/978-1-4612-1592-9_4 .
10. **Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P.** Differential games through viability theory: Old and recent results // Advances in Dynamic Game Theory. Annals Internat. Soc. Dynamic Games / eds. S. Jørgensen, M. Quincampoix, T.L. Vincent. Boston: Birkhäuser, 2007. Vol. 9. P. 3–35.
11. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.
12. **Munts N.V., Kumkov S.S.** Существование функции цены в игре быстродействия с линией жизни [e-resource] // Proc. 47th Internat. Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications” / eds. A.A. Makhnev, S.F. Pravdin. Yekaterinburg, 2016. С. 94–99. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1662/opt6.pdf .

Мунц Наталья Владимировна
математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: natalymunts@gmail.com

Поступила 28.02.2018

Кумков Сергей Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: sskumk@gmail.com

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games.* N Y, John Wiley and Sons, 1965, 384 p. ISBN: 0471428604 . Translated to Russian under the title *Differentsial'nye igry.* Moscow, Mir Publ., 1967, 480 p.
2. Petrosjan L. A. A family of differential survival games in the space $\mathbb{R}^n$. *Soviet Math. Dokl.*, 1965, no. 6, pp. 377–380.
3. Petrosyan L.A. Dispersion surfaces in one family of pursuit games. *Proc. Acad. Sci. Armenian SSR*, 1966, vol. 43, no. 4, pp. 193–197.

4. Dutkevich Yu.G., Petrosyan L.A. Games with a “life-line”. The case of l-capture. *SIAM J. Control*, 1972, vol. 10, no. 1, pp. 40–47. doi: 10.1137/0310004 .
5. Petrosyan L.A. *Differential games of pursuit*. Singapore: World Scientific, 1993, 325 p. ISBN: 9810209797 . Original Russian text published in Petrosyan L.A., *Differentsial'nye igry presledovaniya*, Leningrad: Publ. Leningr. Gos. Univ., 1977, 222 p.
6. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. N Y, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I., *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
7. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. N Y: Springer-Verlag, 1988, 517 p.
8. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Some algorithms for differential games with two players and one target. *RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique*, 1994, vol. 28, no. 4, pp. 441–461. doi: 10.1051/m2an/1994280404411 .
9. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games. In: Bardi M., Raghavan T.E.S., Parthasarathy T. (eds): *Stochastic and Differential Games. Annals Internat. Soc. Dynamic Games*. Boston: Birkhäuser, 1999, vol. 4, pp. 177–247. doi: 10.1007/978-1-4612-1592-9_4 .
10. Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Differential games through viability theory: Old and recent results. In: Jørgensen S., Quincampoix M., Vincent T.L. (eds): *Advances in Dynamic Game Theory. Annals Internat. Soc. Dynamic Games*, Boston: Birkhäuser, 2007, vol. 9, pp. 3–35. doi: 10.1007/978-0-8176-4553-3_1 .
11. Subbotin A.I. *Generalized solutions of First-Order PDEs. The Dynamical optimization perspective*. Basel, Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka: Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*, Moscow, Izhevsk: Inst. Komp'yuter. Issled. Publ., 2003, 336 p.
12. Munts N.V., Kumkov S.S. Existence of value function in time-optimal game with life line [e-resource]. In: Makhnev A.A., Pravdin S.F. (eds.): *Proc. 47th Internat. Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”*, Yekaterinburg, 2016, pp. 94–99 (in Russian). Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1662/opt6.pdf .

The paper was received by the Editorial Office on February 28, 2018.

Natal'ya Vladimirovna Munts, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: natalymunts@gmail.com .

Sergei Sergeevich Kumkov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: sskumk@gmail.com .