ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 517.955:519.213:519.217

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ЗАДАННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ[1]

И. В. Мельникова, Д. И. Сметанников

Настоящая работа посвящена сравнению двух подходов к исследованию связи между процессами с заданным набором свойств, определяемых свойствами решений стохастических уравнений со случайностями типа винеровских процессов и уравнениями в частных производных для вероятностных характеристик этих процессов, включая уравнения для плотностей переходных вероятностей. Первый подход основан на применении формулы Ито для диффузионных процессов — решений стохастических уравнений, второй – на свойствах непрерывности процесса и существовании пределов, характеризующих локальное поведение решений стохастического уравнения. В ходе сравнения установлено следующее. В первом подходе для доказательства конкретной связи между коэффициентами стохастического уравнения и соответствующего уравнения в частных производных определяющими являются свойства марковости и мартингальности функций от решения стохастического уравнения. В основе второго подхода лежит существование глобальных моментов первого и второго порядков для решений стохастических задач Коши, которые в случае стохастических уравнений со случайностями типа винеровских процессов, определяют их локальное поведение. В качестве приложения показано моделирование стохастической задачи для некоторой конкретной системы через связь с уравнениями для переходных вероятностей процесса, определяемых статистическими данными.

Ключевые слова: винеровский процесс, марковский процесс, мартингал, формула Ито, уравнение Колмогорова, вероятностные характеристики

I. V. Melnikova, D. I. Smetannikov. The study of equations for probability characteristics of random processes described by stochastic equations.

The paper is devoted to the comparison of two approaches to investigating the relationship between processes with a given set of properties determined by properties of solutions to stochastic equations with Wiener-type randomness and partial differential equations for probabilistic characteristics of these processes, including equations for densities of transition probabilities. The first approach is based on the application of the Ito formula for diffusion processes, which are solutions of stochastic equations, whereas the second approach employs the continuity properties of the process and the existence of limits characterizing the local behavior of solutions to stochastic equations. In the course of the comparison, the following is established. In the first approach, in the proof of the relationship between the coefficients of the stochastic equation and the coefficients of the corresponding partial differential equation, the key role is played by the Markov and martingale properties of functions of solutions to stochastic equations. The second approach is based on the existence of global moments of the first and second order for solutions of stochastic Cauchy problems, which in the case of stochastic equations with Wiener-type randomness define their local behavior. As an application, we model a stochastic problem for a specific system using the connection with equations for the transition probabilities of the process determined by statistical data.

Keywords: Wiener process, Markov process, martingale, Ito formula, Kolmogorov equation, probability characteristics.

MSC: 60G15:60H10:60J25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-185-193

Введение

Исследование уравнений для вероятностных характеристик случайных процессов с заданными свойствами — одно из центральных направлений стохастического анализа как в конечномерном случае для непрерывных процессов и процессов со скачками (см., например, [2;6;7])

[1]Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление №211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт №02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

так и в бесконечномерном случае для процессов, порождаемых случайными возмущениями типа бесконечно-мерных винеровских (см., например, [3; 4]). При этом авторы базовых и более поздних работ используют разные свойства процессов, позволяющие получить уравнения для их вероятностных характеристик: в [7] — это учет свойств процессов без последействия типа однородности и ординарности, в [6] — обобщение формулы Ито на случай процессов типа пуассоновских, в [2] — свойство существования локальных пределов для различных случайных процессов — развитие классических идей Колмогорова на случай процессов, допускающих скачки, в [8] — характеристики свойств решений стохастических уравнений типа первых интегралов от решения. Таким образом, при изучении уравнений для вероятностных характеристик процессов принципиально важно выделить какие свойства изучаемых процессов позволяют получить уравнения в частных производных или более общие интегродифференциальные уравнения для характеристик и при этом какие требования необходимо наложить на сами вероятностные характеристики, чтобы получить уравнения в классической или некоторой обобщенной постановке.

Настоящая работа посвящена сравнению двух подходов к исследованию связи между процессами, задаваемыми базовыми стохастическими уравнениями со случайностями типа винеровских процессов, и уравнениями в частных производных для вероятностных характеристик. Первый подход основан на свойствах марковости и мартингальности функций от решений стохастических уравнений и на возможности применять для них формулу Ито, второй — на непрерывности процесса и существовании предельных соотношений, связанных с локальными и глобальными моментами, через которые определяются коэффициенты уравнения в частных производных. На базе первого подхода получена задача Коши для вероятностных характеристик, важных в современной финансовой математике [5], в частности, для плотности переходной вероятности. На базе второго подхода получены прямая и обратная задачи Коши для плотности переходной вероятности, для которых в зависимости от поведения вспомогательных функций, участвующих в выводе уравнений, может быть дана классическая или обобщенная постановка. При этом исходная информация в каждом из подходов — свойства решений стохастических уравнений. Исследовать какие свойства решений стохастических уравнений с общими стохастическими интегралами по мартингальным мерам могут быть использованы для получения соответствующих вероятностных характеристик этих процессов в конечномерном и тем более бесконечномерном случаях — это отдельная задача, подлежащая исследованию.

Приложения указанной связи многообразны. Отметим, во-первых, использование связи в численных методах решения уравнений в частных производных и, во-вторых, моделирование стохастических уравнений через связь с уравнениями для характеристик. В работе дан пример такого моделирования. Что касается терминологии, то как отмечено в [2], физико-ориентированные исследователи прямое уравнение в частных производных для плотности переходной вероятности называют уравнением Фоккера — Планка а математико-ориентированные — прямое и обратное — уравнением Колмогорова. Это связано с тем, что прямое уравнение встречалось в работах А. Фоккера (1914) и М. Планка (1917), а строгое математическое обоснование дано А. Н. Колмогоровым [9]. Более общее уравнение, в котором присутствуют наряду с дифференциальными и интегральные слагаемые, называют уравнением Колмогорова — Феллера.

1. Подход к построению задачи для вероятностных характеристик процесса, заданного стохастическим уравнением, основанный на формуле Ито

Обоснование справедливости перехода от стохастического дифференциального уравнения к уравнению в частных производных при использовании формулы Ито, проведем следуя [5]. Рассмотрим задачу Коши для стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = A(t, X(t))dt + B(t, X(t))dW(t), \quad t \in [0, T], \quad X(0) = \xi, \tag{1.1}$$

где $W = W(t),\ t \geq 0,$ — броуновское движение (винеровский процесс), а функции A, B и начальное условие ξ удовлетворяют условиям существования единственного решения $X = X(t), t \in [0,T]$, (см., например, [6]).

Теорема 1. *Пусть процесс* $X(t) = X(t,\omega) \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$, $\omega \in (\Omega, \mathcal{F}(t))$, *— единственное решение задачи* (1.1), $h(y)$ *— борелевская функция и функция* $g = g(t,x)$ *определяется равенством*

$$g(t,x) = \boldsymbol{E}^{t,x}\big[h(X(T))\big] \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}, \quad \textit{при условии} \quad \boldsymbol{E}^{t,x}\big[|h(X(T))|\big] < \infty,$$

где $\boldsymbol{E}^{t,x}\big[h(X(T))\big]$ *— математическое ожидание функции* h *от решения в момент* T*, принимающего значения* x *в текущие моменты времени* $0 \leq t < T$*. Тогда* g *является решением обратной задачи Коши*

$$g_t(t,x) + A(t,x)g_x(t,x) + \frac{1}{2}B^2(t,x)g_{xx}(t,x) = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}, \quad g(T,x) = h(x). \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы показать связь между задачами (1.1) и (1.2), будем использовать мартингальность процесса $g(t,X(t)) = g(t,x)|_{x=X(t)}$. Для доказательства мартингальности, т. е. равенства $\mathbf{E}[g(t,X(t))|\mathcal{F}(s)] = g(s,X(s)),\ t \geq s \geq 0$, сначала доказываем, что $\mathbf{E}[h(X(T))|\mathcal{F}(s)] = g(s,X(s))$:

$$\mathbf{E}[h(X(T))|\mathcal{F}(s)] = \mathbf{E}[h(X^{s,X(s)}(T))|\mathcal{F}(s)] = \mathbf{E}[h(X^{s,X(s)}(T))] = g(s,X(s)). \tag{1.3}$$

Первое равенство в (1.3) верно в силу марковости решения X [10]. Поскольку $h(X^{s,X(s)}(T))$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}(s)$, то по свойству условного математического ожидания получаем второе равенство, третье — следует из определения функции g. Далее в силу марковости решения получаем

$$g(t,x) = \mathbf{E}[h(X^{t,x}(T))] = \mathbf{E}[h(X^{s,X(s)}(T))] = g(s,X(s)).$$

Отсюда следует, что $g(t,X(t))$ является мартингалом:

$$\mathbf{E}[g(t,X(t))|\mathcal{F}(s)] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[h(X(T))|\mathcal{F}(t)]|\mathcal{F}(s)] = \mathbf{E}[h(X(T))|\mathcal{F}(s)] = g(s,X(s)). \tag{1.4}$$

Для дальнейшего доказательства используем формулу Ито с функцией $F(t,X) \in C^1[0,T] \times \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$:

$$dF(t,X) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,X)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X)dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X)(dX)^2. \tag{1.5}$$

В качестве $F(t,X(t))$ в (1.5) возьмем функцию $g(t,X(t))$ и подставим вместо $dX(t)$ правую часть уравнения (1.1). Учитывая известные соотношения $dt \cdot dt = dt \cdot dW = 0,\ dW \cdot dW = dt$ [10], получаем стохастическое уравнение для функции g в форме дифференциалов:

$$\begin{aligned} dg(t,X(t)) = \Big(g_t(t,X(t)) + A(t,X(t))g_x(t,X(t)) + \frac{1}{2}B^2(t,X(t))g_{xx}(t,X(t))\Big)dt \\ + B(t,X(t))g_x(t,X(t))dW(t). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Запишем уравнение (1.6) в интегральной форме с интегралом Ито $\displaystyle\int_t^T B(t,X(t))g_x(t,X(t))dW(t)$. Применим к уравнению математическое ожидание $\mathbf{E}$. Учитываем, что $\mathbf{E}\left(dg(t,X(t))\right) = 0$ в силу (1.4) и что математическое ожидание от интеграла Ито равно нулю. Используя стохастическую теорему Фубини, получаем

$$\mathbf{E}\Big(g_t(t,X(t)) + A(t,X(t))g_x(t,X(t)) + \frac{1}{2}B^2(t,X(t))g_{xx}(t,X(t))\Big) = 0. \tag{1.7}$$

Запишем равенство (1.7) в начальной точке (t,x), оно верно и без математического ожидания, поскольку функции принимают детерминированные значения. Варьируя $t \in [0,T]$, получаем задачу (1.2) с терминальным условием $g(T,x) = \mathbf{E}^{T,x} h(X(T)) = h(x)$. □

Из теоремы 1, учитывая определение функции g через функцию плотности переходной вероятности $p(T,y|t,x)$ процесса X, получаем задачу Коши для плотности переходной вероятности $p(T,y|t,x) =: p(y|t,x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(y|t,x) + A(t,x)\frac{\partial}{\partial x} p(y|t,x) + \frac{1}{2}B^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(y|t,x) = 0, \quad t \in [0,T], \quad p(y|T,x) = \delta(x-y). \tag{1.8}$$

В заключение этого раздела сформулируем теорему о переходе от уравнения в частных производных к стохастическому дифференциальному уравнению. Переход осуществляется на основе полученного в теореме 1 прямого результата: записывается задача (1.1) с коэффициентами, определяемыми уравнением (1.2).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия существования и единственности решения задач* (1.1), (1.2) *и пусть* $g(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$, *является решением задачи Коши* (1.2). *Тогда* $\boldsymbol{E}^{t,x}[h(X(T))] = g(t,x)$, *где* X *— решение задачи Коши* (1.1) *с начальным условием, определяемым равенством* $\boldsymbol{E}^{0,\xi}[h(X(T))] = g(0,\xi)$.

2. Подход к построению задачи для плотности переходной вероятности процесса, основанный на его свойствах непрерывности, марковости и существовании моментов

Доказательство справедливости перехода от процесса, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением и, как следствие, обладающего свойствами непрерывности, марковости и существования моментов, к уравнению в частных производных для вероятностных характеристик проведем, выделяя три важных этапа.

П е р в ы й э т а п. Существование глобальных моментов для процесса — решения стохастического уравнения.

Пусть $X = X(t)$, $t \in [0,T]$, — решение стохастической задачи Коши (1.1). Проинтегрируем уравнение (1.1) от t до $t + \Delta t$:

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \int\limits_t^{t+\Delta t} A(s,X(s))ds + \int\limits_t^{t+\Delta t} B(s,X(s))dW(s).$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей равенства

$$\mathbf{E}[\Delta X(t)] = \mathbf{E}\Bigg(\int\limits_t^{t+\Delta t} A(s,X(s))ds\Bigg) + \mathbf{E}\Bigg(\int\limits_t^{t+\Delta t} B(s,X(s))dW(s)\Bigg). \tag{2.1}$$

Левую часть равенства (2.1) распишем по определению через плотность переходной вероятности процесса:

$$\mathbf{E}[\Delta X(t)] = \int (z-x)p(t+\Delta t, z|t,x)dz.$$

Учитывая, что математическое ожидание от интеграла Ито в правой части (2.1) равно нулю, получим существование следующего предела для первого момента процесса X:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int (z-z)p(t+\Delta t, z|t,x)dz = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\mathbf{E}\Bigg(\int\limits_t^{t+\Delta t} A(s,X(s))ds\Bigg) = A(t,x). \tag{2.2}$$

Аналогичные рассуждения проведем для $\mathbf{E}[\Delta X(t)^2]$. Учитывая свойства винеровского процесса W, получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int (z-x)^2 p(t+\Delta t, z|t,x)dz = B^2(t,x). \tag{2.3}$$

Таким образом, для процесса, являющегося решением стохастической задачи Коши (1.1), доказано существование пределов (2.2), (2.3) — (глобальных по $z\in\mathbb{R}$) моментов первого и второго порядков.

Второй этап. Существование локальных моментов.

На первом этапе доказательства мы показали, что для приращений процесса X, заданного уравнением (1.1), по малому промежутку времени Δt выполняются следующие условия:

$$\mathbf{E}\{\Delta X(t) - A(t,X(t))\Delta t - B(t,X(t))\Delta W(t)|X(t)=x\} = o(\Delta t),$$

$$\mathbf{E}\{[\Delta X(t) - A(t,X(t))\Delta t - B(t,X(t))\Delta W(t)]^2|X(t)=x\} = o(\Delta t).$$

Введем для случайного процесса $\Delta X(t),\in[t,T)$, определяемого задачей Коши (1.1), срезку процесса:

$$\Delta X(t)_\varepsilon \;=\; \begin{cases}\Delta X(t); & \Delta X(t)\le\varepsilon\\ 0; & \Delta X(t)>\varepsilon.\end{cases}$$

Учитывая, что случайность в поведении процесса X — решения задачи (1.1), определяется винеровским процессом W с плотностью переходной вероятности, экспоненциально убывающей на бесконечности, и следуя [11], можно показать, что для любого $\varepsilon>0$ приращения $\Delta X(t)$ удовлетворяют условиям

$$P\{|\Delta X(t)|>\varepsilon|X(t)=x\} = o(\Delta t),$$

$$\mathbf{E}\{(\Delta X(t))_\varepsilon|X(t)=x\} = A(t,x)\Delta t + o(\Delta t), \tag{2.4}$$

$$\mathbf{E}\{(\Delta X(t))^2_\varepsilon|X(t)=x\} = B^2(t,x)\Delta t + o(\Delta t). \tag{2.5}$$

Первое из этих равенств эквивалентно равенству $\lim_{\Delta t\to 0} p(t+\Delta t, y|t,x)/\Delta t = 0$, где $x,y: |x-y|>\varepsilon$, и означает непрерывность процесса X, а второе и третье эквивалентно существованию пределов

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|y-x|<\varepsilon}(y-x)p(t+\Delta t,y|t,x)dy = A(t,x)\,, \tag{2.6}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|y-x|<\varepsilon}(y-x)^2p(t+\Delta t,y|t,x)dy = B^2(t,x)\,, \tag{2.7}$$

определяющих локальные моменты.

Третий этап. Существование локальных моментов $\Longrightarrow$ уравнение для вероятностных характеристик.

Возьмем произвольную функцию $f(x)$, имеющую ограниченный носитель и дважды дифференцируемую. Следуя классическим идеям (см., например, [2; 7]), рассмотрим следующий функционал (производную по t):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)p(t,x|t',y)dx = \lim_{\Delta t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\left[\frac{p(t+\Delta t,x|t',y)-p(t,x|t',y)}{\Delta t}\right]dx =: I_y. \tag{2.8}$$

Здесь $p(t,x|t',y)$ — плотность переходной вероятности процесса решения стохастической задачи Коши (1.1). Поскольку, как было указано в первом подходе, решение задачи (1.1) обладает свойством Маркова, для плотности переходной вероятности имеет место интегральное уравнение Чепмена — Колмогорова

$$p(t+\Delta t,x|t',y) = \int\limits_{\mathbb{R}} p(t+\Delta t,x|t,z)p(t,z|t',y)dz.$$

Применяя его к $p(t+\Delta t, x|t', y)$ в правой части равенства (2.8), получим

$$I_y = \lim_{\Delta t \to 0} \Big[\iint_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{p(t+\Delta t, x|t,z) p(t,z|t',y)}{\Delta t} dz dx - \int\limits_{\mathbb{R}} f(z) \frac{p(t,z|t',y)}{\Delta t} dz \Big].$$

В первом интеграле этой формулы разобьем область интегрирования по x на две подобласти: $|x-z| < \varepsilon$ и $|x-z| \geq \varepsilon$. Во внутренней области разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора до второй производной:

$$f(x) = f(z) + f'(z)(x-z) + \frac{f''(z)}{2}(x-z)^2 + |x-z|^2 R(x,z),$$

где $R(x,z) \to 0$ при $|x-z| \to 0$.

Используя свойство непрерывности процесса X, существование пределов (2.6), (2.7), ограниченность носителя функции f и, как следствие, возможность перекинуть дифференцирование с функции f на ее сомножители, получаем уравнение

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(z) \frac{\partial p(t,z|t',y)}{\partial t} dz = \int\limits_{\mathbb{R}} f(z) \bigg(-\frac{\partial A(t,z) p(t,z|t',y)}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B^2(t,z) p(t,z|t',y)}{\partial z^2} \bigg) dz. \tag{2.9}$$

Учитывая начальные условия в момент времени t' и произвольность функции f, получаем следующую задачу Коши для плотности переходной вероятности:

$$\frac{\partial p(t,z|t',y)}{\partial t} = -\frac{\partial A(t,z) p(t,z|t',y)}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B^2(t,z) p(t,z|t',y)}{\partial z^2}, \quad t \geq t', \quad p(t',z|t',y) = \delta(z-y). \tag{2.10}$$

В обозначениях разд. 1 ($t' = t, t = T$), это задача (1.8).

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $p = p(t,z|t',y)$, $t > t'$, — плотность переходной вероятности процесса $X(t)$, являющегося единственным решением задачи* (1.1). *Тогда p является решением прямой задачи Коши* (2.10), *в которой коэффициенты определяются равенствами* (2.4), (2.5).

При дифференцировании не по будущему времени, как это было сделано при выводе прямой задачи Коши (2.10), а по t', получаем обратную задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t'} p(t,y|t',x) = -A(t',x) \frac{\partial}{\partial x} p(t,y|t',x) - \frac{1}{2} B^2(t',x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t,y|t',x), \quad t \geq t', \quad p(t,y|t,x) = \delta(x-y). \tag{2.11}$$

Отметим что, задачи Коши (2.10) и (2.11) получены в предположении существования соответствующих производных по t, t' и по z, x, а уравнение (2.9) может быть рассмотрено как обобщенное на функциях f, используемых как основные.

3. Пример

В заключение приведем пример, иллюстрирующий важность использования изучаемых в работе связей при построении стохастических уравнений, отвечающих процессам под действием случайных возмущений: модель конкретной задачи в форме стохастического уравнения строится на основе уравнения для вероятностных характеристик, полученных из статистических данных.

В отличие от аналогичных примеров, рассмотренных в [1, Ch. 5], при выводе стохастического уравнения используются дополнительные условия на поведение системы (см. ниже), в силу которых получено уравнение с “предельными” коэффициентами.

Рассмотрим векторную систему $\vec{S}(t) = [S_1(t), S_2(t)], t \geq 0$, определяемую случайными процессами $S_1(t)$ и $S_2(t)$, в предположении, что за малый промежуток времени Δt изменение каждой составляющей $\Delta S_i, i = 1, 2$, принимает одно из значений $\{-\lambda_i, 0, \lambda_i\}$, $\lambda_i > 0$, и вероятности соответствующих изменений пропорциональны Δt. Следуя [1], составим таблицу вероятностей возможных изменений системы за промежуток Δt:

Изменение системы	Вероятность изменения
$\Delta\vec{S}^1 = [-\lambda_1, 0]$	$p_1 = d_1(t, S_1, S_2)\Delta t$
$\Delta\vec{S}^2 = [\lambda_1, 0]$	$p_2 = b_1(t, S_1, S_2)\Delta t$
$\Delta\vec{S}^3 = [0, -\lambda_2]$	$p_3 = d_2(t, S_1, S_2)\Delta t$
$\Delta\vec{S}^4 = [0, \lambda_2]$	$p_4 = b_2(t, S_1, S_2)\Delta t$
$\Delta\vec{S}^5 = [-\lambda_1, \lambda_2]$	$p_5 = m_{12}(t, S_1, S_2)\Delta t$
$\Delta\vec{S}^6 = [\lambda_1, -\lambda_2]$	$p_6 = m_{21}(t, S_1, S_2)\Delta t$
$\Delta\vec{S}^7 = [-\lambda_1, -\lambda_2]$	$p_7 = m_{11}(t, S_1, S_2)\Delta t$
$\Delta\vec{S}^8 = [\lambda_1, \lambda_2]$	$p_8 = m_{22}(t, S_1, S_2)\Delta t$
$\Delta\vec{S}^9 = [0, 0]$	$p_9 = 1 - \sum_{i=1}^{8} p_i$

Здесь b_i, d_i и m_{ij} — это коэффициенты пропорциональности при определении вероятностей, отвечающих изменениям системы в результате внешнего воздействия и взаимодействия между процессами $S_1(t)$ и $S_2(t)$ за промежуток времени Δt. В такую схему вкладывается множество реальных систем под действием случайных возмущений и со случайными взаимодействиями.

Чтобы, подобно тому, как это сделано во втором подходе, получить производную по времени от $p(t, x_1, x_2)$ — вероятности принимать значения x_1, x_2 в момент времени t, составим разность $p(t + \Delta t, x_1, x_2) - p(t, x_1, x_2)$. Учитывая, что согласно модели, вероятность системы принимать значения x_1, x_2 в момент времени $t + \Delta t$ складывается из вероятности принимать значения x_1, x_2 в момент времени t и не изменить своего значения к моменту $t + \Delta t$ плюс вероятность перехода из других возможных состояний, отраженных в таблице, к значениям x_1, x_2, получаем

$$p(t + \Delta t, x_1, x_2) = p(t, x_1, x_2)\Big[1 - \Big(\sum_{i=1}^{2}(b_i(t, x_1, x_2) + d_i(t, x_1, x_2)) + \sum_{i,j=1}^{2} m_{i,j}(t, x_1, x_2)\Big)\Delta t\Big] + \Delta t \sum_{i=3}^{10} T_i. \quad (3.1)$$

Здесь

$$T_{3(4)} = p(t, x_1 \pm \lambda_1, x_2)d_1(b_1)(t, x_1 \pm \lambda_1, x_2), \quad T_{5(6)} = p(t, x_1, x_2 \pm \lambda_2)d_2(b_2)(t, x_1, x_2 \pm \lambda_2),$$

$$T_{7(8)} = p(t, x_1 \pm \lambda_1, x_2 \mp \lambda_2)m_{12(21)}(t, x_1 \pm \lambda_1, x_2 \mp \lambda_2),$$

$$T_{9(10)} = p(t, x_1 \pm \lambda_1, x_2 \pm \lambda_2)m_{11(22)}(t, x_1 \pm \lambda_1, x_2 \pm \lambda_2),$$

где верхний знак относится в номеру, указанному в скобках. Из равенства (3.1) получаем равенство для $\Delta p/\Delta t = [p(t + \Delta t, x_1, x_2) - p(t, x_1, x_2)]/\Delta t$.

В дополнение к условиям изменения $\Delta\vec{S}$ за промежуток времени Δt, будем предполагать $\lambda_{1,2} \to 0$ при $\Delta t \to 0$, существование производных $\dfrac{\partial}{\partial x_i}p(t, x_1, x_2)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}p(t, x_1, x_2)$ и существование следующих пределов

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{E}[\Delta\vec{S}]/\Delta t =: \vec{A}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{E}[\langle\Delta\vec{S}, \Delta\vec{S}\rangle]/\Delta t =: B^2(t, S_1, S_2).$$

Пределы понимаются в смысле среднеквадратической сходимости; условие их существования подобно условиям (2.4), (2.5) и (2.6), (2.7), при этом $x_i \pm \lambda_i$ играют роль значений в момент времени $t+\Delta t$. В силу сделанных предположений в равенстве для $\Delta p/\Delta t$ выражения для $T_i, i = 3, \dots 10$, содержащие приращения по пространственным переменным, можно разложить в ряд Тейлора до второй производной включительно. Переходя в равенстве для $\Delta p/\Delta t$ к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем, что $p(t, x_1, x_2)$ является решением задачи Коши:

$$\frac{\partial p(t,x_1,x_2)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}[a_i(t,x_1,x_2)p(t,x_1,x_2)]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Big[\sum_{k=1}^{2} b_{i,k}(t,x_1,x_2)b_{j,k}(t,x_1,x_2)p(t,x_1,x_2)\Big], \quad p(0,x_1,x_2) = p_0(x_1,x_2). \quad (3.2)$$

Здесь, в отличие от [1], коэффициенты уравнения (3.2) записаны через предельные соотношения: a_i — i-я компонента вектора $\vec{A} = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{j=1}^{9}\Delta\vec{S^j}p_j/\Delta t$ и $b_{i,j}$ — компоненты матрицы $B^2(t,S_1,S_2) = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{j=1}^{9}\langle\Delta\vec{S^j},\Delta\vec{S^j}\rangle p_j/\Delta t$.

От задачи (3.2), пользуясь полученными результатами о связи уравнений для вероятностных характеристик со стохастическими уравнениями, переходим к задаче Коши для стохастического дифференциального уравнения

$$d\vec{S}(t) = \vec{A}(t,S_1,S_2)dt + B(t,S_1,S_2)d\vec{W}(t), \quad \vec{S}(0) = \vec{S}_0,$$

где $\vec{W}(t) = [W_1(t), W_2(t)]$ — двумерный винеровский процесс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Allen E.** Modeling with Ito stochastic differential equations. Dordrecht: Springer, 2007. 230 p. ISBN: 978-1-4020-5953-7 .
2. **Gardiner K.** Stochastic methods. A Handbook for the natural and social sciences. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. 440 p. ISBN: 3-540-20882-8 .
3. **Gawarecki L., Mandrekar V.** Stochastic differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 291 p.
4. **Melnikova I.V.** Stochastic cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions. Boca Raton; London: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016, 300 p. ISBN: 1482210509 .
5. **Shreve S.** Stochastic calculus for finance II. Continuous-time models. N Y: Springer Verlag, 2004. 550 p. ISBN: 978-0-387-40101-0 .
6. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 612 с.
7. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей. М.: Едиториал УРСС, 2008. 448 с.
8. **Дубко В.А. Карачанская Е.В.** Стохастические первые интегралы, ядра интегральных инвариантов и уравнения Колмогорова // Дальневосточный мат. журн. 2014. Т. 14, № 2. С. 200–216.
9. **Колмогоров А.Н.** Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук. 1938. № 5. 41 с.
10. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, АСТ, 2003. 408 с.
11. **Розанов Ю. А.** Случайные процессы. М.: Наука. Главная редакция физ-мат. литературы, 1971. 228 с.

Мельникова Ирина Валерьяновна
Поступила 29.03.2018
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры мат. анализа Института естественных наук и математики
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: irina.melnikova@urfu.ru

Сметанников Даниил Ильич,
магистрант Института естественных наук и математики
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: smetannikovdi@yandex.ru

REFERENCES

1. Allen E. *Modeling with Ito Stochastic Differential Equations.* Dordrecht: Springer, 2007, 230 p. ISBN: 978-1-4020-5953-7 .
2. Gardiner K. *Stochastic methods. A Handbook for the Natural and Social Sciences.* Berlin, Heidelberg: Springer, 2004, 440 p. ISBN: 3-540-20882-8 .
3. Gawarecki L., Mandrekar V. *Stochastic differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011, 291 p. doi: 10.1007/978-3-642-16194-0 .
4. Melnikova I.V. Stochastic cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions. Boca Raton; London: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016, 300 p. ISBN: 1482210509 .
5. Shereve S. *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models.* Springer, 2004, 550 p. ISBN: 978-0-387-40101-0 .
6. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya*[Stochastic differential equations and their applications]. Kiev: Naukova dumka Publ., 1982. 612 p.
7. Gnedenko B.V. *Theory of probability.* Newark, N J: Gordon and Breach, 1997, 497 p. ISBN: 90-5699-585-5 . Original Russian text (9th ed.) published in Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostei.* Editorial URSS Publ., 2008, 448 p.
8. Dubko V.A., Karachanskaya E.V. Stochastic first integrals, kernel functions for integral invariants and the Kolmogorov equations Dal'nevost. Mat. Zh., 2014, vol. 14, no. 2, pp. 200–216.
9. Kolmogorov A.N. On the analytic methods of probability theory. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1938, no. 5, pp. 5–41 (in Russian).
10. Øksendal B. *Stochastic differential equations. an introduction with applications.* Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2000, 352 p. ISBN: 3540637206 . Translated to Russian under the title Oksendal' B. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya. Vvedenie v teoriyu i prilozheniya,* Moscow, Mir Publ., AST, 2003, 408 p.
11. Rozanov Yu.A. *Sluchainye protsessy.* [Random processes]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 228 p.

The paper was received by the Editorial Office on March 29, 2018.

Irina Valeryanovna Melnikova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Natural Sciences and Mathematics Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: irina.melnikova@urfu.ru .

Daniil Il'ich Smetannikov, graduate student, Institute of Natural Sciences and Mathematics Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: smetannikovdi@yandex.ru .