ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 519.17

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$ является $AT4$-графом. Его антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(672, 176, 40, 48)$. В обоих графах окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(176, 40, 12, 8)$. В работе получена информация об автоморфизмах указанных графов. В частности, граф Γ не является реберно симметричным. Если $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ содержит элемент порядка 11, действует транзитивно на множестве вершин Γ и $S(G)$ фиксирует каждый антиподальный класс, то полный прообраз группы $(G/S(G))'$ является расширением группы порядка 3 с помощью M_{22} или $U_6(2)$. Описаны группы автоморфизмов сильно регулярных графов с параметрами $(176, 40, 12, 8)$ и $(672, 176, 40, 48)$ в вершинно симметричном случае.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$**.**

A distance-regular graph Γ with intersection array $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$ is an $AT4$-graph. Its antipodal quotient $\bar{\Gamma}$ is a strongly regular graph with parameters $(672, 176, 40, 48)$. In both graphs the neighborhoods of vertices are strongly regular with parameters $(176, 40, 12, 8)$. We study the automorphisms of these graphs. In particular, the graph Γ is not arc-transitive. If $G = \mathrm{Aut}\,(\Gamma)$ contains an element of order 11, acts transitively on the vertex set of Γ, and $S(G)$ fixes each antipodal class, then the full preimage of the group $(G/S(G))'$ is an extension of a group of order 3 by M_{22} or $U_6(2)$. We describe automorphism groups of strongly regular graphs with parameters $(176, 40, 12, 8)$ and $(672, 176, 40, 48)$ in the vertex-symmetric case.

Keywords: strongly regular graph, distance-regular graph, graph automorphism.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-173-184

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается подграф, индуцированный множеством всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Если граф Γ связен, $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, то через $\alpha_i(g)$ обозначим число вершин $a \in \Gamma$ таких, что $\mathrm{d}(a, a^g) = i$.

Регулярный граф Γ степени k на v вершинах называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ), если для любых двух вершин $a, b \in \Gamma$ $(a \neq b)$ число общих соседей a и b равно λ, если a и b смежны, и равно μ, если не смежны.

Связный граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если бинарное отношение на множестве вершин — совпадать или находиться на расстоянии d — является отношением эквивалентности. Классы этого отношения называются *антиподальными классами.* Факторграф $\bar{\Gamma}$ по отношению антиподальности называется *антиподальным частным* графа Γ. Если каждый антиподальный класс содержит ровно r вершин, то r называется *индексом антиподальности* и Γ называется *антиподальным r-накрытием* графа $\bar{\Gamma}$.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061-П.

Связный граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным*, если существуют числа p^l_{ij} $(i,j,l=0,1,\ldots,d)$ такие, что для любых вершин a и b на расстоянии l друг от друга число вершин в $\Gamma_i(a)\cap\Gamma_j(b)$ равно p^l_{ij}. Числа p^l_{ij} называются *числами пересечений* графа Γ. Некоторые из них имеют особое обозначение: $a_i=p^i_{1i}$, $b_i=p^i_{1,i+1}$, $c_i=p^i_{1,i-1}$. Набор параметров $\{b_0,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$ называется *массивом пересечений* графа Γ. Его достаточно для вычисления всех остальных чисел пересечений Γ. В частности, $a_i=b_0-b_i-c_i$. Заметим также, что при $d=2$ граф Γ сильно регулярен с параметрами (v,b_0,a_1,c_2).

Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{176,135,32,1;1,16,135,176\}$ является $AT4(8,4,3)$-графом (см. [1]). Существование этого графа неизвестно (однако $AT4(8,4,4)$-граф существует). Антиподальное частное $\bar\Gamma$ имеет параметры $(672,176,40,48)$ и неглавные собственные значения $8,-16$. Окрестности вершины в Γ и в $\bar\Gamma$ сильно регулярны с параметрами $(176,40,12,8)$.

В работе [2] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графамии для $GQ(3,3)$. В частности, локально псевдо $GQ(3,3)$-граф является сильно регулярным графом с параметрами $(176,40,12,8)$.

В данной работе найдены возможные автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(176,40,12,8)$, $(672,176,40,48)$ и дистанционно реулярного графа с массивом пересечений $\{176,135,32,1;1,16,135,176\}$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(176,40,12,8)$*,* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p=11$*,* $\alpha_1(g)=11(12l+4)$ *и* $\alpha_2(g)=11(12-12l)$*, либо* $p=2$*,* $\alpha_1(g)=24l+8$ *и* $\alpha_2(g)=168-24l$;

(2) Ω *является* n*-кликой,* $p=3$*,* $n=3t+2$*,* $\alpha_1(g)=36l-12t+24$ *и* $\alpha_2(g)=150+9t-36l$;

(3) Ω *является* m*-кокликой,* $p=2$*,* $m=8$*,* $\alpha_1(g)=24l$ *или* $m=10$*,* $\alpha_1(g)=24l-8$;

(4) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и* $p\le 7$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *— вершинно симметричный сильно регулярный граф с параметрами* $(176,40,12,8)$*,* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\bar T$ *— цоколь группы* $\bar G=G/O_2(G)$*. Тогда либо группа* G *разрешима и* $|G|$ *делит* $2^\beta\cdot 5\cdot 11$*, либо* Γ *является графом ранга* 3 *с группой автоморфизмов* $U_5(2).Z_2$ *и стабилизатором вершины* $(Z_3\times U_4(2)).Z_2$*, либо* $\bar T\cong M_{11}$*,* $|\bar T:\bar T_a|=11,22$*, либо* $\bar T\cong M_{22}$*, группа* $\bar T_a$ *изоморфна* $L_3(4)$ *и имеет индекс* 22 *в* $\bar T$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(672,176,40,48)$*, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(176,40,12,8)$*,* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,11\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф, либо* $p=7$*,* $\alpha_1(g)=168l$ *и* $\alpha_2(g)=168(4-l)$*, либо* $p=3$*,* $\alpha_1(g)=72l-48$ *и* $\alpha_2(g)=24(30-3l)$*, либо* $p=2$*,* $\alpha_1(g)=48l$ *и* $\alpha_2(g)=48(14-l)$;

(2) Ω *является* m*-кокликой, либо* $p=11$*,* $m=1$ *и* $\alpha_1(g)=881$*,* $1=2,5$*, либо* $p=2$*,* m *четно и* $\alpha_1(g)=48l+8m$;

(3) Ω *является* n*-кликой,* $p=3$*,* $n=3t$ *и* $\alpha_1(g)=72l+24(t-2)$;

(4) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(*i*) $p=7$*,* $|\Omega|=7s$*,* $s\le 27$*,* $\alpha_1(g)=56l$ *и* $s-l$ *делится на* 3 *или* $p=5$*,* $|\Omega|=5s+2$*,* $s\le 38$*,* $\alpha_1(g)=56l$ *и* $s-l$ *делится на* 3*, либо*

(*ii*) $p=3$*,* $|\Omega|=3s$*,* $s\le 64$ *и* $\alpha_1(g)=72l+24+24s$ *или* $p=2$*,* $|\Omega|=2s$*,* $s\le 96$ *и* $\alpha_1(g)=48l+16s$.

Следствие 2. *Пусть сильно регулярный граф* Γ *с параметрами* $(672,176,40,48)$ *является вершинно симметричным,* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *содержит элемент порядка* 11*,* $S(G)=1$ *и* T *— цоколь группы* G*. Тогда* $T\cong U_6(2).Z_6$*,* $T_a\cong U_5(2).Z_6$ *и* Γ *является графом ранга* 3.

Теорема 3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) g *индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного* $\bar{\Gamma}$, $p = 3$ *и* $\alpha_4(g) = 2016$;

(2) Ω *— пустой граф*, $\alpha_4(g) = 0$, *и либо* $p = 7$, $\alpha_1(g) = 294n + 336 - 126m$, $\alpha_2(g) = 252m$, $\alpha_3(g) = -294n + 420 - 126m$, *либо* $p = 3$, $\alpha_1(g) = 126n + 378 - 54m$, $\alpha_2(g) = 108m$, $\alpha_3(g) = -126n + 378 - 54m$, *либо* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 84n + 336 - 36m$, $\alpha_2(g) = 72m$, $\alpha_3(g) = 420 - 84n - 36m$;

(3) $\bar{\Omega}$ *является* m*-кокликой, либо* $p = 11$, $m = 1$, $\alpha_0(g) = 3, \alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 792l - 99$, $l = 1, 2$ *и* $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2112 - 792l$, *либо* $p = 2$, m *четно*, $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 3m$, $\alpha_2(g) = 144l - 27m$ *и* $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 144l + 24m$;

(4) $\bar{\Omega}$ *является* n*-кликой*, $p = 3$, $n = 6, 12$, $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 3n$, $\alpha_2(g) = 27(8l - n)$ *и* $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 + 24n - 216l$;

(5) $\bar{\Omega}$ *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(*i*) $p = 7$, $\alpha_4(g) = 0$, $|\Omega| = 21s$, $s \leq 27$, $\alpha_2(g) = 504l - 189s = 63(8l - 3s)$ *и* $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 504l + 168s$ *или* $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 360l + 90 - 135s$ *и* $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 1920 - 96 + 120s - 360l$, *либо*

(*ii*) $p = 3$, $|\Omega| + \alpha_4(g) = 9s$, $s \leq 64$, $\alpha_2(g) = 216l - 81s$ *и* $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 216l + 72s$ *или* $p = 2$, $|\Omega| + \alpha_4(g) = 6s$, $s \leq 96$, $\alpha_2(g) = 144l - 54s$ *и* $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 144l + 48s$.

Следствие 3. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *содержит элемент порядка* 11 *и действует транзитивно на множестве его вершин. Если* $S(G)$ *фиксирует каждый антиподальный класс, то полный прообраз группы* $(G/S(G))'$ *является расширением группы порядка* 3 *с помощью* M_{22} *или* $U_6(2)$.

Доказательства теорем опираются на метод Г. Хигмена.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [3, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g).$$

1. Автоморфизмы графа с параметрами $(176, 40, 12, 8)$

Сначала приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* D *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - D$ *смежна точно с* $w(k - d)/(v - w)$ *вершинами из* D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение хорошо известно (см., например, §2 из [4]).

Лемма 1.2 [5, теорема 3.2]. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и неглавными собственными значениями r, s, $s < 0$. Если g — автоморфизм Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то $|\Omega| \leq v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k - r)$.*

До конца раздела будем предполагать, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(176, 40, 12, 8)$ и спектром $40^1, 8^{55}, -4^{120}$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По лемме 1.2 имеем $|\Omega| \leq 176 \cdot 12/32 = 66$. Заметим, что если a, b — две вершины из Ω и $p > 11$, то $[a] \cap [b] \subset \Omega$.

Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то по лемме 1.1 имеем $d - 8 \leq \dfrac{w(40-d)}{176-w} \leq d + 4$. Поэтому число вершин в коклике не больше 16, а в клике не больше 11, причем каждая вершина вне 16-коклики C смежна с 4 вершинами из C, а каждая вершина вне 11-клики L смежна с 2 вершинами из L.

Лемма 1.3. *Пусть χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 55. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 44)/12$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 55$ делится на p. Если $|g| = p^2$, p — простое число, то p^2 делит $\chi_1(g^p) - 55$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 55 & 11 & -11/3 \\ 120 & -12 & 8/3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_2(g)/3)/16$. Подставляя $\alpha_2(g) = 176 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 44)/12$.

Остальные утверждения леммы следуют из лемм 1, 2 [6].

Лемма 1.4. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *в Γ нет собственных сильно регулярных подграфов с параметрами $(v', k', 12, 8)$;*

(2) *если Ω — пустой граф, то либо $p = 11$, $\alpha_1(g) = 11(12l + 4)$ и $\alpha_2(g) = 11(12 - 12l)$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 24l + 8$ и $\alpha_2(g) = 168 - 24l$;*

(3) *если Ω является n-кликой, то $n > 1$, $p = 3$, $n = 3t + 2$, $\alpha_1(g) = 36l - 12t + 24$ и $\alpha_2(g) = 150 + 9t - 36l$;*

(4) *если Ω является m-кокликой, $m > 1$, то $p = 2$, $m = 2t$ и $\alpha_1(g) = 24l - 8t + 8$;*

(5) *если Ω не является кликой, кокликой или пустым графом, то Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 11$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 12, 8)$, $k' < 40$. Так как $n^2 = 16 + 4(k' - 8)$, то $n = 2u, k' = u^2 + 4$ и Δ имеет собственные значения $u + 2, -(u - 2)$. Кратность $u + 2$ равна $(u - 3)(u^2 + 4)(u^2 + u + 2)/(16u)$, поэтому $u = 4$, противоречие.

Пусть Ω — пустой граф. Так как $176 = 16 \cdot 11$, то $p \in \{2, 11\}$. Положим $\alpha_i(g) = pw_i$.

Пусть $p = 11$. Тогда число $\chi_1(g) = 11(w_1 - 4)/12$, поэтому $\alpha_1(g) = 11(12l + 4)$ и $\alpha_2(g) = 11(12 - 12l)$. В случае $l = 1$ граф Γ является объединением 16 кликовых $\langle g \rangle$-орбит $L_1, \ldots, L_{16}$ длины 11.

Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_1(g) = (w_1 - 22)/6$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g) = 2(12l + 4)$ и $\alpha_2(g) = 168 - 24l$.

Пусть Ω является n-кликой, a — вершина из Ω. Если $n = 1$, то p делит 40 и 135, поэтому $p = 5$ и число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 44)/12$ должно делиться на 5, противоречие.

Если $n > 1$, то p делит 27, 108 и $14 - n$, поэтому $p = 3$, $n = 3t + 2$, $t = 0, 1, 2, 3$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) + 12t - 36)/12$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 36l - 12t + 24$.

Пусть Ω является m-кокликой, $m > 1$. Тогда p делит 8 и $104 - m$, поэтому $p = 2$, $m = 2t$ и число $\chi_1(g) = (8t + \alpha_1(g) - 44)/12$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g) = 24l - 8t + 8$.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением $t \geq 2$ изолированных клик. Тогда p делит 27 и 8, противоречие.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь. Если $p > 11$, то Ω — сильно регулярный граф с $\lambda = 12$ и $\mu = 8$, противоречие с утверждением (1). Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть Ω содержит геодезический 2-путь. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Ω содержит вершину степени 40, то $p \leq 5$;*

(2) *p не больше 7.*

Доказательство. Пусть Ω содержит вершину a степени 40. Так как любая вершина из $\Gamma - a^{\perp}$ смежна с 8 вершинами из $[a]$, то любая $\langle g \rangle$-орбита длины p не содержит геодезических 2-путей. Если $p > 5$, то любая $\langle g \rangle$-орбита длины p является кокликой, $\chi_1(g) = 10$ и $\chi_1(g) - 55$ делится на p, противоречие.

Пусть $p = 11$. Тогда $\mu_\Omega = 8$, $\lambda_\Omega = 1, 12$, степени вершин в Ω равны $18, 29$ и $|\Omega| = 11t$, $3 \leq t \leq 6$.

Пусть a — вершина степени 29 в Ω, $u \in [a] - \Omega$ и степень графа $[a] - \Omega$ равна s, $s \leq 8$. Тогда u смежна с $12 - s$ вершинами из $\Omega(a)$, индуцирующими клику, противоречие. Итак, Ω — регулярный граф степени 18, по лемме 1.1 имеем $|\Omega| \geq 55$, причем в случае равенства каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна ровно с 10 вершинами из Ω. В этом случае каждая $\langle g \rangle$-орбита длины 11 является кликой, противоречие. Итак, $|\Omega| = 66$, $\chi_1(g) = 11(20 + w_1)/12$, $\alpha_1(g) = 11(12l + 4) = 44$ и $\alpha_2(g) = 66$. Противоречие с тем, что число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $66 \cdot 22$, но не больше $66 \cdot 8 + 44 \cdot 12$. Лемма доказана.

Из лемм 1.3–1.5 следует теорема 1.

Докажем следствие 1. До конца раздела предполагается, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(176, 40, 12, 8)$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. По теореме 1 имеем $\{2, 11\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ и $|G : G_a| = 176$.

Лемма 1.6. *Пусть f — элемент порядка 11 из G. Тогда*

(1) *если $C_G(f)$ содержит элемнт g простого порядка p, $p \leq 7$, то $|\Omega| = 11t$ и либо $p = 3$, $t = 4$, $\alpha_1(g) = 132$, либо $p = 2$, $t = 0$, $\alpha_1(g) = 176$ или $t = 2$, $\alpha_1(g) = 88$, $\alpha_2(g) = 66$, или $t = 4$, $\alpha_1(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 132$;*

(2) *$O_{11'}(G) = O_2(G)$.*

Доказательство. По теореме 1 $\mathrm{Fix}(f)$ — пустой граф, $\alpha_1(f) = 11(12l+4)$ и $\alpha_2(f) = 11(12 - 12l)$.

Пусть $C_G(f)$ содержит элемент g простого порядка p, $p \leq 7$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|\Omega| = 11t$ и $16 - t$ делится на p. Положим $\alpha_1(g) = 11pw_1$. Если $p = 7$, то $t = 2$, $\chi_1(g) = 11(4 + 7w_1)/12$, противоречие. Если $p = 5$, то $t = 6$, $\chi_1(g) = 55(4 + w_1)/12$, противоречие.

Если $p = 3$, то $t = 4$, число $\chi_1(g) = 11(4 + w_1)/4$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 33(12l + 4) = 132$. В случае $\alpha_1(f) = 176$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 8 вершинами из Ω. Противоречие с тем, что для вершины $u \in \Gamma - \Omega$ подграф $[u] \cap [u^f]$ содержит 8 вершин из Ω и 9 из $\Gamma - \Omega$. Значит, $\alpha_1(f) = 44$, $\alpha_2(f) = 132$.

Если $p = 2$, то $t = 0, 2, \ldots, 6$, число $\chi_1(g) = 11(2(t-1)+w_1)/6$ нечетно, $\alpha_1(g) = 11(24l-8-4t)$, $\alpha_2(g) = 11(24 - 24l + 3t)$.

В случае $t = 0$ имеем $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 44)/12 = 11$ и $\alpha_1(g) = 176$. В случае $t = 2$ имеем $\alpha_1(g) = 88$, $\alpha_2(g) = 66$. В случае $t = 4$ имеем $\chi_1(g) = (176 - 44)/12$, $\alpha_1(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 132$. В случае $t = 6$ имеем $\alpha_1(g) = 176$, противоречие.

Утверждение (1) доказано.

Так как $v = 176$, то $O_{11'}(G) = O_2(G)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия 1. Если группа G разрешима, то $|G|$ делит $2^\beta \cdot 5 \cdot 11$. Пусть группа G неразрешима, $\bar{G} = G/O_2(G)$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G}$. По [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(11)$, M_{11}, M_{12}, $U_5(2)$, $U_6(2)$, M_{22}, A_{11}, A_{12}, McL, HiS. Так как $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ делит 176, то либо $\bar{T} \cong M_{11}$, $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 11, 22$, либо $\bar{T} \cong M_{22}$, группа $\bar{T}_a$ изоморфна $L_3(4)$ и имеет индекс 22 в $\bar{T}$ или A_7 и имеет индекс 176 в $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong U_5(2)$, группа $\bar{T}_a$ изоморфна $Z_3 \times U_4(2)$ и имеет индекс 176 в $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong HiS$, группа $\bar{T}_a$ изоморфна $U_3(5).Z_2$ и имеет индекс 176 в $\bar{T}$.

Компьютерные вычисления [8] показывают, что в случае $O_2(G) = 1$ Γ является графом ранга 3 с группой автоморфизмов $U_5(2).Z_2$ и стабилизатором вершины $(Z_3 \times U_4(2)).Z_2$. Следствие 1 доказано.

2. Автоморфизмы графа с параметрами $(672, 176, 40, 48)$

В этом разделе предполагается, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(672, 176, 40, 48)$ и спектром $117^1, 8^{440}, -16^{231}$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(117, 36, 15, 9)$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то $d - 8 \le \dfrac{w(176-d)}{672-w} \le d + 16$. Поэтому число вершин в коклике не больше 56, а в клике — не больше 12.

Лемма 2.1. *Пусть χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности* 231*. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\chi_2(g) = (8\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/24 + 7$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_2(g) - 231$ делится на p. Если $|g| = p^2$, p — простое число, то p^2 делит $\chi_2(g^p) - 231$.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 440 & 20 & -8 \\ 231 & -21 & 7 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = (33\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/96$. Подставляя $\alpha_2(g) = 672 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/24 + 7$.

Остальные утверждения леммы следуют из лемм 1, 2 [6].

Лемма 2.2. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами* $(v', k', 40, 48)$;

(2) *если* Ω — *пустой граф, то либо* $p = 7$, $\alpha_1(g) = 168l$ *и* $\alpha_2(g) = 168(4-l)$, *либо* $p = 3$, $\alpha_1(g) = 72l - 48$ *и* $\alpha_2(g) = 24(30 - 3l)$, *либо* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 48l$ *и* $\alpha_2(g) = 48(14 - l)$;

(3) Ω *не содержит* $[a]$ *для любой вершины* a, *следовательно,* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$;

(4) *если* Ω *является* m*-кокликой, то либо* $p = 11$, $m = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 881$, $1 = 2, 5$, *либо* $p = 2$, m *четно и* $\alpha_1(g) = 48l + 8m$.

Доказательство. Пусть Δ — сильно регулярный подграф с параметрами $(v', k', 40, 48)$. Так как $n^2 = 64 + 4(k' - 48)$, то $n = 2u, k' = u^2 + 32$ и Δ имеет собственные значения $u - 4, -(u + 4)$. Кратность $u - 4$ равна $(u+3)(u^2+32)(u^2+u+36)/(96u)$, поэтому $u = 4$ и Δ имеет параметры $(56, 48, 40, 48)$ С другой стороны, между Δ и $\Gamma - \Delta$ имеется $v'(176 - k') = 56 \cdot 128$ ребер. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна по крайней мере с 2 вершинами из Δ.

Пусть Ω — пустой граф. Так как $672 = 32 \cdot 21$, то $p \in \{2, 3, 7\}$. Положим $\alpha_i(g) = pw_i$.

Пусть $p = 7$. Тогда $\chi_2(g) = -7(w_1/24 - 1)$, поэтому $\alpha_1(g) = 168l$ и $\alpha_2(g) = 168(4 - l)$;

Пусть $p = 3$. Тогда число $\chi_1(g) = -w_1/8 + 7$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 72l - 48$ и $\alpha_2(g) = 24(30 - 3l)$.

Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_1(g) = -w_1/12 + 7$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g) = 48l$ и $\alpha_2(g) = 48(14 - l)$.

Пусть Ω содержит $[a]$ для некоторой вершины a. Тогда $[u]$ содержит 48 вершин из Ω для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$. Если $b \in \Omega - a^\perp$, то Ω содержит $[b]$, противоречие. Значит, $|\Omega| = 41$, $\alpha_1(g) = 0$ и $\chi_1(g) = 41/3 + 7$, противоречие. Ввиду теоремы 1 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

Пусть Ω является m-кокликой.

Если $m = 1$, то p делит 176 и 495. Поэтому $p = 11$, $\chi_2(g) = (8 - \alpha_1(g))/24 + 7$, $\alpha_1(g) = 881$, $1 = 2, 5$.

Если $m > 1$, то p делит 48, 128 и $368 - m$. Поэтому $p = 2$, число $\chi_2(g) = (8m - \alpha_1(g))/24 + 7$ нечетно и $\alpha_1(g) = 48l + 8m$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть Ω содержит вершину a и $\alpha_i(g)'$ — число вершин из $[a]$, сдвигаемых на расстояние i под действием g. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Ω является n-кликой, $n > 1$, то $p = 3$, $n = 3t$ и $\alpha_1(g) = 72l + 24(t - 2)$;*

(2) *если $p = 7$, то $|\Omega| = 7s$, $s \le 27$, $\chi_2(g) = (56s - \alpha_1(g))/24 + 7$, $\alpha_1(g) = 56l$ и $s - l$ делится на 3, а если $p = 5$, то $|\Omega| = 5s + 2$, $s \le 38$, $\alpha_1(g) = 40l + 40$ и $s - l$ делится на 3;*

(3) *если $p = 3$, то $|\Omega| = 3s$, $s \le 64$ и $\alpha_1(g) = 72l + 24 + 24s$, а если $p = 2$, то $|\Omega| = 2s$, $s \le 96$ и $\alpha_1(g) = 48l + 16s$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω является n-кликой, $n > 1$. Ввиду теоремы 1 имеем $p = 3$, $n = 3t$. Далее, число $\chi_2(g) = t + 7 - \alpha_1(g)/24$ делится на 3. В случаях $t = 1, 4$ имеем $\alpha_1(g) = 72l - 24$, в случае $t = 2$ имеем $\alpha_1(g) = 72l$ и в случае $t = 3$ имеем $\alpha_1(g) = 72l + 24$.

Пусть $p = 7$. Тогда $\alpha_0(g) = 7s$, $s \le 27$, $\chi_2(g) = (56s - \alpha_1(g))/24 + 7$, $\alpha_1(g) = 56l$ и $s - l$ делится на 3.

Пусть $p = 5$. Тогда $\alpha_0(g) = 5s + 2$, $s \le 38$, число $\chi_2(g) = (40s + 16 - \alpha_1(g))/24 + 7$ сравнимо с 1 по модулю 5, $\alpha_1(g) = 40l + 40$ и $s - l$ делится на 3.

Пусть $p = 3$. Тогда $\alpha_0(g) = 3s$, $s \le 64$, число $\chi_2(g) = (24s - \alpha_1(g))/24 + 7$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 72l + 24 + 24s$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\alpha_0(g) = 2s$, $s \le 96$, число $\chi_2(g) = (16s - \alpha_1(g))/24 + 7$ нечетно и $\alpha_1(g) = 48l + 16s$. Лемма доказана.

Из лемм 2.1–2.3 следует теорема 2.

3. Сильно регулярный граф с параметрами $(672, 176, 40, 48)$, вершинно симметричный случай

В этом разделе предполагается, что сильно регулярный граф Γ с параметрами $(672, 176, 40, 48)$ является вершинно симметричным, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ содержит элемент порядка 11 и действует транзитивно на множестве его вершин. Тогда $|G : G_a| = 672$, и по теореме 2 $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

Лемма 3.1. *Пусть f — элемент из G порядка 11. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если g — элемент из $C_G(f)$ простого порядка $p < 11$, то либо $p = 3$, $|\Omega| = 111$, $\alpha_1(g) = 264$ или $|\Omega| = 144$, $\alpha_1(g) = 528$, либо $p = 2$;*

(2) *$S(G)$ является $\{2, 3, 7\}$-группой;*

(3) *если $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, то либо*

(i) $\bar{T} \cong L_2(11)$, $\bar{T}_a$ — расширение группы порядка 11 с помощью группы порядка 5, либо

(ii) $\bar{T} \cong M_{11}$, $\bar{T}_a \cong L_2(11)$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$, либо

(iii) $\bar{T} \cong M_{12}$, $\bar{T}_a \cong M_{11}$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$, либо

(iv) $\bar{T} \cong M_{22}$, $\bar{T}_a \cong L_2(11)$ — подгруппа индекса 672 из $\bar{T}$, либо

(v) $\bar{T} \cong U_6(2)$, $\bar{T}_a \cong U_5(2)$ — подгруппа индекса 672 из $\bar{T}$, либо

(vi) $\bar{T} \cong A_{12}$, $\bar{T}_a \cong A_{11}$.

Доказательство. Пусть f — элемент из G порядка 11, g — элемент из $C_G(f)$ простого порядка $p < 11$. Тогда $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$ — одновершинный граф, $\alpha_1(f) = 881$, $1 = 2, 5$. Из действия f на Ω следует, что $|\Omega| - 1$ делится на 11. Ввиду леммы 1.6 имеем $p < 5$.

Если $p = 3$, то $|\Omega| = 3s$, $s = 4, 15, 26, 37, 48$ и $\alpha_1(g) = 72l + 24 + 24s$ делится на 11. По лемме 1.6 имеем $|\Omega(a)| = 44$, $\alpha_1'(g) = 132$ и $\alpha_1'(f) = 44$. В случае $s = 15$ число $24(3l+5)$ делится на 11, поэтому $l = 2$, противоречие. В случае $s = 26$ число $72(l + 9)$ делится на 11, поэтому $l = -9$, противоречие с тем, что $\alpha_1'(g) = 132$. В случае $s = 37$ число $24(3l + 38)$ делится на 11, поэтому $l = -9$. В случае $s = 48$ число $24(3l + 49)$ делится на 11, поэтому $l = -9$.

Так как $v = 672$, то $S(G)$ является $\{2, 3, 7\}$-группой.

Ввиду табл. 1 из [7] цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $L_2(11)$, M_{11}, M_{12}, $U_5(2)$, $U_6(2)$, M_{22}, A_{11}, A_{12}, McL, HiS. Так как $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ делит 672, то $\bar{T} \cong L_2(11)$, $|\bar{T}_a| = 5, 10$.

Так как $\bar{T}$ содержит собственную подгруппу индекса, делящего 672, то либо $\bar{T} \cong L_2(11)$, $\bar{T}_a$ — расширение группы порядка 11 с помощью группы порядка 5, подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong M_{11}$, $\bar{T}_a \cong L_2(11)$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong M_{12}$, $\bar{T}_a \cong M_{11}$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong M_{22}$, $\bar{T}_a \cong L_2(11)$ — подгруппа индекса 672 из $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong U_6(2)$, $\bar{T}_a \cong U_5(2)$ — подгруппа индекса 672 из $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong A_{12}$, $\bar{T}_a \cong A_{11}$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Если f — элемент из G порядка 11, то $T \cong U_6(2)$, $T_a \cong U_5(2)$ и Γ является графом ранга 3.*

Доказательство. Пусть $\bar{T}_a$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$ и V — силовская 7-подгруппа из $S(G)$. Тогда элемент f порядка 11 из G действует без неподвижных точек на V и $|V : V_a| = 7$, противоречие.

По лемме 3.1 имеем $S(G) = 1$, и либо $T \cong M_{22}$ и $T_a \cong L_2(11)$ — подгруппа индекса 672 из T, либо $T \cong U_6(2)$, $T_a \cong U_5(2)$ — подгруппа индекса 672 из $\bar{T}$. Компьютерные вычисления показывают, что в обоих случаях получается один и тот же граф, являющийся графом ранга 3. Лемма доказана.

Из лемм 3.1, 3.2 получаем следствие 2.

4. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$, спектром $176^1, 44^{112}, 8^{440}, -4^{1232}, -16^{231}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 4.1. *Пусть χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 112, χ_2 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 440, и χ_4 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 231. Тогда $\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g))/144$, $\chi_2(g) = (15\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 15\alpha_4(g))/72 + 20$ и $\chi_4(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 9\alpha_4(g))/72 - 21$. Далее, $\chi_1(g) - 112$, $\chi_2(g) - 440$ и $\chi_4(g) - 231$ делятся на p.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 112 & 28 & 0 & -14 & -56 \\ 440 & 20 & -8 & 20 & 440 \\ 1232 & -28 & 0 & 14 & -616 \\ 231 & -21 & 7 & -21 & 231 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g))/144$. Далее, $\chi_2(g) = (110\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g) + 5\alpha_3(g) + 110\alpha_4(g))/504$. Подставив $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим $\chi_2(g) = (15\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 15\alpha_4(g))/72 + 20$.

Аналогично, $\chi_4(g) = 7(33\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - 3\alpha_3(g) + 33\alpha_4(g))/288$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим $\chi_4(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 9\alpha_4(g))/72 - 21$.

Последнее утверждение леммы следует из леммы 1 [6]. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Если g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, то $p = 3$ и $\alpha_4(g) = v$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $\alpha_i(g)$ не равно 0 может быть только для $i = 0, 4$. Если $u = u^g$, то $[u]$ состоит из неподвижных относительно g вершин. Поэтому g оставляет неподвижной каждую вершину из Γ, противоречие. Значит, $\alpha_4(g) = v$ и $p = 3$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Если g индуцирует нетривиальный автоморфизм графа $\bar{\Gamma}$, то выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф, $\alpha_4(g) = 0$, и либо $p = 7$, $\alpha_1(g) = 294n + 336 - 126m$, $\alpha_2(g) = 252m$, $\alpha_3(g) = -294n + 420 - 126m$, либо $p = 3$, $\alpha_1(g) = 126n + 378 - 54m$, $\alpha_2(g) = 108m$, $\alpha_3(g) = -126n + 378 - 54m$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 84n + 336 - 36m$, $\alpha_2(g) = 72m$, $\alpha_3(g) = 420 - 84n - 36m$;*

(2) $\bar{\Omega}$ *является m-кокликой, либо $p = 11$, $m = 1$, $\alpha_0(g) = 3, \alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 792l - 99$, $l = 1, 2$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2112 - 792l$, либо $p = 2$, m четно, $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 3m$, $\alpha_2(g) = 144l - 27m$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 144l + 24m$;*

(3) $\bar{\Omega}$ *является n-кликой, $p = 3$, $n = 6, 12$, $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 3n$, $\alpha_2(g) = 27(8l - n)$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - +24n - 216l$;*

(4) $\bar{\Omega}$ *содержит геодезический 2-путь и либо*

(i) $p = 7$, $\alpha_4(g) = 0$, $|\Omega| = 21s$, $s \leq 27$, $\alpha_2(g) = 504l - 189s = 63(8l - 3s)$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 504l + 168s$ или $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 360l + 90 - 135s$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 1920 - 96 + 120s - 360l$, либо

(ii) $p = 3$, $|\Omega| + \alpha_4(g) = 9s$, $s \leq 64$, $\alpha_2(g) = 216l - 81s$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 216l + 72s$ или $p = 2$, $|\Omega| + \alpha_4(g) = 6s$, $s \leq 96$, $\alpha_2(g) = 144l - 54s$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 144l + 48s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем теорему 2.

Если $\bar{\Omega}$ — пустой граф, то Ω — пустой граф и $\alpha_4(g) = 0$. В случае $p = 7$ имеем $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/72 - 21$, поэтому $\alpha_2(g) = 504m$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 504m$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 672 + 168m)/48$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 336n + 672 - 168m$, $\alpha_3(g) = -336n + 1344 - 336m$.

В случае $p = 3$ число $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/72 - 21$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 216m$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 216m$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 672 + 72m)/48$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 144n + 720 - 72m$, $\alpha_3(g) = -144n + 1296 - 144m$.

В случае $p = 2$ число $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/72 - 21$ четно, поэтому $\alpha_2(g) = 144m$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 144m$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 672 + 48m)/48$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 96n + 672 - 48m$, $\alpha_3(g) = 1344 - 96n - 96m$.

Пусть $\bar{\Omega}$ является m-кокликой. Если $p = 11$, $m = 1$, то $\alpha_4(g) = 0$, $\chi_4(g) = (27 + \alpha_2(g))/72 - 21$ и $\alpha_2(g) = 99(8l - 1)$. С другой стороны, число $\bar{\alpha}_2(g) = 671 - 88l$ равно 495 или 231 и l равно 2 или 1 соответственно.

Если $p = 2$, m четно, то число $\chi_4(g) = (27m + \alpha_2(g))/72 - 21$ нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 144l - 27m$.

Пусть $\bar{\Omega}$ является $3n$-кликой, $p = 3$. Тогда число $\chi_4(g) = (27n + \alpha_2(g))/72 - 21$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 216l - 27n = 27(8l - n)$. С другой стороны, $\bar{\alpha}_2(g) = 720 - 27n - 72t = 72l - 9n$ и n четно.

Пусть $\bar{\Omega}$ содержит геодезический 2-путь. Если $p = 7$, то $\alpha_4(g) = 0$, $|\Omega| = 21s$, $s \leq 27$, число $\chi_4(g) = (189s + \alpha_2(g))/72 - 21$ делится на 7, поэтому $\alpha_2(g) = 504l - 189s = 63(8l - 3s)$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 504l + 168s$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 672 + 168l)/48$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 336n + 672 - 168l$, $\alpha_3(g) = 1344 - 336n - 336l + 168s$.

Если $p = 5$, то $\alpha_4(g) = 0$, $|\Omega| = 15s + 6$, $s \le 38$, число $\chi_4(g) = (135s + 54 + \alpha_2(g))/72 - 21$ сравнимо с 1 по модулю 5, поэтому $\alpha_2(g) = 360l + 90 - 135s = 45(8l + 2 - 3s)$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 1920 + 120s - 360l$.

Если $p = 3$, то $|\Omega| + \alpha_4(g) = 9s$, $s \le 64$, число $\chi_4(g) = (81s + \alpha_2(g))/72 - 21$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 216l - 81s = 27(8l - 3s)$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 216l + 72s$.

Если $p = 2$, то $|\Omega| + \alpha_4(g) = 6s$, $s \le 96$, число $\chi_4(g) = (54s + \alpha_2(g))/72 - 21$ нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 144l - 54s = 18(8l - 3s)$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 2016 - 144l + 48s$.

Если $p = 5$, то $|\Omega| = 2n - \alpha_4(g)$, $n = 3, 8, 13$. Заметим, что $\alpha_4(g) = 0$. Теперь число $\chi_4(g) = (20n + \alpha_2(g))/36 - 15$ делится на 5, поэтому $\alpha_2(g) = 180l - 20n$. С другой стороны, ввиду теоремы 2 имеем $\alpha_2(g)/2 = 378 - n - 45l = 90l - 10n$ и n делится на 3. Отсюда $n = l = 3$ и $\alpha_2(g) = 480$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 810 - 180l$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 414 + 90l)/42$ сравнимо с 2 по модулю 5, поэтому $\alpha_1(g) = 210m + 210$, $\alpha_3(g) = 60 - 210m$. По теореме 1 в окрестности вершины из Ω имеем $n = 2$ и $\alpha_1'(g) = 60l + 45$, поэтому $\alpha_1(g) = 210$, $\alpha_3(g) = 60$.

Если $p = 2$, то $|\Omega| = 2n - \alpha_4(g)$, $n = 6, 8, \ldots, 14$. Заметим, что либо $\alpha_4(g) = 0$, либо $|\Omega| = 0$. Теперь число $\chi_4(g) = (20n + \alpha_2(g))/36 - 15$ нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 72l - 20n$. С другой стороны, ввиду теоремы 2 имеем $\alpha_2(g)/2 = 378 - n - 18l = 36l - 10n$, $378 + 9n$ делится на 27 и $n = 6, 12$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 756 - 72l + 18n$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 378 + 36l - 3n)/42$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g) = 84m + 420 - 36l + 3n$, $\alpha_3(g) = 336 - 84m - 36l + 15n$. В случае $n = 6$ имеем $l = 8$, $\alpha_1(g) = 84m + 150$, $\alpha_2(g) = 456$, $\alpha_3(g) = 138 - 84m$, а в случае $n = 12$ имеем $l = 9$, $\alpha_1(g) = 84m + 132$, $\alpha_2(g) = 408$, $\alpha_3(g) = 192 - 84m$.

Если $\bar{\Omega}$ является m-кокликой, то Ω — коклика, $p = 3$, $m = 3, 6, \ldots, 27$ и $\alpha_4(g) = 0$. Далее, число $\chi_4(g) = (20m + \alpha_2(g))/36 - 15$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 108l - 20m$. С другой стороны, ввиду теоремы 2 имеем $54l - 10m = 378 - m - 9l$ и $7l - m$ делится на 42. Отсюда $m = 21$, число l нечетно и делится на 3, $\alpha_2(g) = 108l - 420 = 552$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 162$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 18)/42$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 126n + 18$, $\alpha_3(g) = 144 - 126n$.

Пусть $\bar{\Omega}$ содержит геодезический 2-путь. Если $p = 3$, то $|\Omega| = 6t \le 252$ и $\alpha_4(g) = 0$. Далее, число $\chi_4(g) = (60t + \alpha_2(g))/36 - 15$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 108l - 60t$. Отсюда $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 756 - 108l + 54t$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 378 + 54l - 18t)/42$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) = 126n + 378 - 54l + 18t$, $\alpha_3(g) = 378 - 126n - 54l + 36t$.

Если $p = 2$, то $|\Omega| + \alpha_4(g) = 4t \le 252$. Далее, число $\chi_4(g) = (40t + \alpha_2(g))/36 - 15$ нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 72l - 40t$. Отсюда $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 756 - 72l + 36t$. Лемма доказана.

Из лемм 4.1–4.3 следует теорема 3.

5. Граф с массивом пересечений $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$, вершинно симметричный случай

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$ и спектром $176^1, 44^{112}, 8^{440}, -4^{1232}, -16^{231}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ содержит элемент порядка 11 и действует транзитивно на множестве его вершин, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $|G : G_a| = 2016$, и по теореме 3 $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

Лемма 5.1. *Пусть f — элемент из G порядка 11. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если g — элемент из $C_G(f)$ простого порядка $p < 11$, то $p = 3$, Ω — пустой граф и $\alpha_4(g) = 2016$;*

(2) *$S(G)$ является $\{2, 3, 7\}$-группой;*

(3) *если $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, то либо*

(i) $\bar{T} \cong L_2(11)$, $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 11 с помощью группы порядка 5, либо

(ii) $\bar{T} \cong M_{11}$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong L_2(11)$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$, либо

(iii) $\bar{T} \cong M_{12}$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong M_{11}$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$, либо

(*iv*) $\bar{T} \cong M_{22}$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong L_2(11)$ *— подгруппа индекса* 672 *из* $\bar{T}$*, либо*
(*v*) $\bar{T} \cong U_6(2)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong U_5(2)$ *— подгруппа индекса* 672 *из* $\bar{T}$*, либо*
(*vi*) $\bar{T} \cong A_{12}$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_{11}$.

Доказательство. По лемме 3.1 $\mathrm{Fix}(f) = F$ — антиподальный класс, $\alpha_2(f) = 671 - 881$, $1 = 2, 5$.

Если g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, то $p = 3$ Ω — пустой граф и $\alpha_4(g) = 2016$.

Если g индуцирует нетривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, то по лемме 3.1 имеем $p = 3$, $|\bar{\Omega}| = 111$, $\bar{\alpha}_2(g) = 407$ или $|\bar{\Omega}| = 144$, $\alpha_1(g) = 143$.

В первом случае число $\chi_4(g) = (3330 + \alpha_2(g))/36 - 15$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 108l - 3330$. С другой стороны, $\bar{\alpha}_2(g) = 231 = 36l - 1110$ и $36l = 1341$, противоречие.

Во втором случае число $\chi_4(g) = (4320 + \alpha_2(g))/36 - 15$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 108l - 4320$. С другой стороны, $\bar{\alpha}_2(g) = 495 = 36l - 1440$ и $36l = 1935$, противоречие.

Так как $v = 32 \cdot 9 \cdot 7$, то $S(G) = O_{2,3,7}(G)$.

Ввиду табл. 1 из [7] цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $L_2(11)$, M_{11}, M_{12}, $U_5(2)$, $U_6(2)$, M_{22}, A_{11}, A_{12}, McL, HiS.

Так как $|\bar{T} : \bar{T}_{\{F\}}|$ делит 672, то либо $\bar{T} \cong L_2(11)$, $|\bar{T}_{\{F\}}| = 5, 10$, либо $\bar{T} \cong M_{11}$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong L_2(11)$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong M_{12}$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong M_{11}$ — подгруппа индекса 12 из $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong M_{22}$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong L_2(11)$ — подгруппа индекса 672 из $\bar{T}$, либо $\bar{T} \cong U_6(2)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong U_5(2)$ — подгруппа индекса 672 из $\bar{T}$, либо (*vi*) $\bar{T} \cong A_{12}$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_{11}$. Лемма доказана.

Если $S(G)$ фиксирует каждый антиподальный класс, то ввиду леммы 5.1 полный прообраз группы $\bar{T}$ является расширением группы порядка 3 с помощью M_{22} или $U_6(2)$. Следствие 3 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О сильно регулярных графах с собственным значением μ и их расширениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 207–214.
2. **Гутнова А.К., Махнев А.А.** О графах, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для GQ(3,3) // Тр. ИМ НАН Беларуси. 2010. Т. 18, № 1. С. 28–35.
3. **Cameron P.J.** Permutation groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p. (London Math. Soc. Student Texts; vol. 45).
4. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407. doi: 10.1006/eujc.1993.1044 .
5. **Behbahani M., Lam C.** Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. 2011. Vol. 311, no. 2-3. P. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
6. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
7. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
8. **The GAP Group** GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.10 [e-resource]. URL: http://www.gap-system.org .

Поступила 26.12.2017

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН,
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук, глав. науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

REFERENCES

1. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. On strongly regular graphs with eigenvalue μ and their extensions. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2014, vol. 285, suppl. 1, pp. 128–135. doi: 10.1134/S0081543814050137 .
2. Gutnova A.K., Makhnev A.A. On graphs the neighbourhoods of whose verticesare pseudo-geometric graphs for GQ(3,3). *Tr. Inst. Mat.*, 2010, vol. 18, no. 1, pp. 28–35 (in Russian).
3. Cameron P.J. *Permutation Groups*. London Math. Soc. Student Texts **45**. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1999, 232 p. ISBN: 0-521-65302-9 .
4. Brouwer A.E., Haemers W.H. The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra. *Europ. J. Comb.*, 1993, vol. 14, pp. 397–407. doi: 10.1006/eujc.1993.1044 .
5. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms. *Discrete Math.*, 2011, vol. 311, no. 2-3, pp. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
6. Gavrilyuk A. L., Makhnev A.A. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .
7. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Siberian Electr. Math. Reports.*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.
8. The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.10*, 2018. Available at https://www.gap-system.org .

The paper was received by the Editorial Office on Dezember 26, 2017.

A. A. Makhnev. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

D. V. Paduchikh. Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: dpaduchikh@gmail.com