ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 512.542

ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ОБЪЕДИНЕНИЯ ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА[1]

А. В. Марцинкевич, Н. Т. Воробьёв

Пусть π — непустое множество простых чисел. Неединичный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют нормальным в классе $\mathfrak{S}_\pi$ всех конечных разрешимых π-групп или просто π-нормальным (обозначают $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой. Если π — множество всех простых чисел, то $\mathfrak{F}$ называют нормальным. Произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ назовем π-нормальным, если $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — π-нормальный класс Фиттинга. В работе доказано существование π-нормальных произведений классов Фиттинга, факторизуемых не π-нормальными сомножителями. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ — некоторый класс Фиттинга π-групп и $\omega = \sigma(\mathfrak{F})$ — множество всех простых делителей всех групп из $\mathfrak{F}$. Установлено, что если $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — класс всех π-групп, ω-цоколь которых централен, то произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является π-нормальным, а каждый из сомножителей $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ не π-нормален. Решеточным объединением $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс Фиттинга, порожденный $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ является π-нормальным классом Фиттинга, то $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ назовем π-нормальным. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга π-групп. Доказано, что решеточное объединение $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ является π-нормальным тогда и только тогда, когда хотя бы один из классов $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ — π-нормальный класс Фиттинга.

Ключевые слова: $\mathfrak{F}$-радикал, класс Фиттинга, π-нормальный класс Фиттинга, объединение классов Фиттинга.

A. V. Martsinkevich, N. T. Vorob'ev. Products and joins of locally normal Fitting classes.

Let π be a nonempty set of primes. A nontrivial Fitting class $\mathfrak{F}$ is said to be normal in the class $\mathfrak{S}_\pi$ of all finite soluble π-groups or π-normal (we write $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$) if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ and the $\mathfrak{F}$-radical of every π-group G is a $\mathfrak{F}$-maximal subgroup of G. If π is the set of all primes, then $\mathfrak{F}$ is called normal. The product $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ of Fitting classes $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ is called π-normal if $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ is a π-normal Fitting class. We prove the existence of π-normal products of Fitting classes factorizable by non-π-normal factors. Assume that $\mathbb{P}$ is the set of all primes, $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ is some Fitting class of π-groups, and $\omega = \sigma(\mathfrak{F})$ is the set of all prime divisors of all groups from $\mathfrak{F}$. It is proved that if $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ is the class of all π-groups with central ω-socle, then the product $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ is π-normal although each of the factors $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ is not π-normal. The lattice join $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ of Fitting classes $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ is the Fitting class generated by $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$. If $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ is a π-normal Fitting class, then $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ is called π-normal. Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be Fitting classes of π-groups. We prove that the lattice join $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ is a π-normal Fitting class if and only if $\mathfrak{F}$ or $\mathfrak{H}$ is a π-normal Fitting class.

Keywords: $\mathfrak{F}$-radical, Fitting class, π-normal Fitting class, join of Fitting classes.

MSC: 20D10, 20D15

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-152-157

Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны и разрешимы.

В исследовании структуры классов Фиттинга и свойств канонических подгрупп важным инструментом являются так называемые нормальные классы Фиттинга (см., например, [1, гл. IX.2, X.3]).

Пусть G — группа и $\mathfrak{F}$ — класс групп. Напомним, что если H — подгруппа группы G и $H \in \mathfrak{F}$, то H называют *$\mathfrak{F}$-подгруппой G*. Класс $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

[1]Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект Ф17М-064) и Государственной программы научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция” (2016–2020).

Из определения класса Фиттинга следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$. Ее называют $\mathfrak{F}$-*радикалом* G.

Подгруппу H группы G называют $\mathfrak{F}$-*максимальной* в G, если $H \in \mathfrak{F}$ и из условия $H \leq K \leq G$, $K \in \mathfrak{F}$, следует, что $H = K$.

Неединичный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *нормальным* [2], если для любой группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G.

В работе [3] мы локализуем понятие нормального класса Фиттинга следующим образом.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел и $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Неединичный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *нормальным в классе* $\mathfrak{S}_\pi$ *всех* π*-групп* или просто π-*нормальным* (обозначают $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G.

Заметим, что в случае, когда $\pi = \mathbb{P}$, π-нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является нормальным, хотя для каждого $\pi \subsetneqq \mathbb{P}$ класс $\mathfrak{F}$ ненормален. Действительно, ввиду [2, предложение 5.1] следует, что каждый нормальный класс Фиттинга содержит класс Фиттинга $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп, что неверно для π-нормального класса Фиттинга, если $\pi \subsetneqq \mathbb{P}$.

В алгебре нормальных классов Фиттинга основными исследуемыми операциями являются умножение и их решеточное объединение. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, то их *произведением* называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и умножение классов Фиттинга является ассоциативной операцией [1, теорема IX.1.12(a), (c)]. В теории нормальных классов Фиттинга известен результат Косси [4] о том, что если хотя бы один из классов Фиттинга нормален, то их произведение — нормальный класс Фиттинга.

Ориентиром для исследований факторизаций π-нормальных классов Фиттинга, каждый из сомножителей которых не π-нормален, служат следующие вопросы о факторизации классов групп из [5].

В о п р о с 1 [5, вопрос 9.58]. *Существуют ли локальные произведения нелокальных формаций конечных групп?*

В о п р о с 2 [5, вопрос 11.25(a)]. *Существует ли локальное произведение (отличное от класса $\mathfrak{E}$ всех групп и $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп) классов Фиттинга, каждый из которых нелокален и не является формацией?*

Положительные решения вопросов 1 и 2 были получены в работах Н. Т. Воробьёва [6], В. А. Ведерникова [7] и Н. Т. Воробьёва, А. Н. Скибы [8] (см. также работу В. В. Шпакова, Н. Т. Воробьёва [9]) соответственно.

В связи с этим естественен следующий аналог вопросов 1 и 2 для π-нормальных классов Фиттинга.

В о п р о с 3. *Существуют ли π-нормальные произведения классов Фиттинга, каждый из которых не является π-нормальным?*

Напомним, что если $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, то π-*цоколем* группы G называется подгруппа, являющаяся произведением всех минимальных нормальных π-подгрупп группы G. π-Цоколь группы G обозначают через $\mathrm{Soc}_\pi G$. В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$, π-цоколь группы G называют цоколем группы G и обозначают $\mathrm{Soc}(G)$.

Если $\mathfrak{X}$ — класс групп, то $\sigma(\mathfrak{X}) = \cup\{\sigma(X) \colon X \in \mathfrak{X}\}$, где $\sigma(X) = \{p \in \mathbb{P} \colon p \mid |X|\}$.

Напомним, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}^*$ обозначают наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Если класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта* [10].

Положительный ответ на вопрос 3 дает, доказанная в работе

Теорема 1. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга π-групп такой, что $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F} \neq \mathfrak{S}_\pi$, и класс $\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{S}_\pi : \mathrm{Soc}_\omega(G) \leq Z(G))$, где $\omega = \sigma(\mathfrak{F})$. Тогда*

1) $\mathfrak{H}$ *является классом Локетта*;

2) *произведение* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *— π-нормальный класс Фиттинга, и каждый из сомножителей* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *не π-нормален.*

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, то $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ — наименьший класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$. Решеточное объединение $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ назовем π-нормальным, если $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ — π-нормальный класс Фиттинга. Как установлено Кусаком [11, теорема 4.1], объединение $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ — нормальный класс Фиттинга в случае, когда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ нормален. Это обуславливает следующий вопрос для π-нормальных классов Фиттинга.

Вопрос 4. *Верно ли, что объединение $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ π-нормально в точности тогда, когда $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ π-нормален?*

Утвердительный ответ на вопрос 4 в настоящей работе дает

Теорема 2. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга π-групп. Решеточное объединение $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ является π-нормальным классом Фиттинга тогда и только тогда, когда хотя бы один из классов $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ π-нормален.*

Используемые в статье терминология и обозначения стандартны и соответствуют [1].

1. Предварительные сведения

Для доказательства теорем 1 и 2 мы будем использовать свойства операторов Локетта [10] “$*$” и “$_*$”. Напомним, что класс $\mathfrak{F}_*$ определяется как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$.

Лемма 1. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, то справедливы следующие утверждения*:

1) [1, теорема X.1.8(b)] *если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}^*$*;

2) [1, теоремы X.1.15 и X.1.8(a)] $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^*$;

3) [11, теорема 2.8] $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H})_* = \mathfrak{F}_* \vee \mathfrak{H}_*$;

4) [1, лемма X.1.26(b)] *если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Локетта, то произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — класс Локетта.*

Через $G \wr H$ будем обозначать регулярное сплетение групп G и H, $G^\natural$ обозначает базисную группу $G \wr H$. Символом Z_p будем обозначать циклическую группу простого порядка p.

Мы будем использовать также следующую характеризацию π-нормальных классов Фиттинга.

Лемма 2 [1, теорема X.3.7]. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга π-групп. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$;

2) *для каждого $p \in \pi$ и группы $G \in \mathfrak{F}$ существует натуральное число n такое, что* $G^n \wr Z_p \in \mathfrak{F}$;

3) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$.

По аналогии с [12, с. 350] для характеризации π-нормальных произведений классов Фиттинга определим класс Фиттинга π-групп, удовлетворяющий свойству α_π.

Определение 2. Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{X}$ — такой класс Фиттинга π-групп, что $\mathfrak{X} \ntrianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Тогда для класса $\mathfrak{X}$ выполняется условие α_π, если для всех классов Фиттинга π-групп $\mathfrak{Y}$ таких, что $\mathfrak{Y}\mathfrak{X} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$, всегда следует, что $\mathfrak{Y} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют *насыщенным гомоморфом*, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$, где $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Тогда операция замыкания R_0 сопоставляет $\mathfrak{F}$ класс групп $\mathrm{R}_0\mathfrak{F} = (G : \exists N_i \trianglelefteq G(i = 1, \dots r)$, такие что $G/N_i \in \mathfrak{F}$ и $\cap_{i=1}^{r} N_i = 1)$ (см., например, [1, II.1.5]), где 1 — единичная группа.

Заметим, что если $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{X} = (G : \mathrm{Soc}_\pi G \leq Z(G))$, тогда $\mathfrak{X}$ — R_0-замкнутый класс Фиттинга (см. [1, пример IX.2.9(a)]).

2. π-Нормальные произведения с не π-нормальными сомножителями

Пусть M — подмножество группы G. Напомним, что *централизатором* M в G называют множество $C_G(M) = \{g \in G : g^{-1}mg = m$ для всех $m \in M\}$.

Мы используем модификацию теоремы Гашюца [13, X.10/11], которую сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 3 [13, X.10/11]. *Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и G — группа. Если $K \trianglelefteq G$, то $C_K(\mathrm{Soc}_\pi K) = K \cap C_G(\mathrm{Soc}_\pi G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. 1) Докажем утверждение 1). Покажем вначале, что $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга.

Пусть $G \in \mathfrak{H}$ и $K \trianglelefteq G$. Так как $G \in \mathfrak{H}$, то по определению класса $\mathfrak{H}$ имеем $\mathrm{Soc}_\omega G \leq Z(G)$, где $\omega = \sigma(\mathfrak{F})$. Очевидно, $C_G(Z(G)) = G$. Значит, $G \leq C_G(\mathrm{Soc}_\omega G) \leq G$. Следовательно, $G = C_G(\mathrm{Soc}_\omega G)$. По лемме 3 $C_K(\mathrm{Soc}_\omega K) = K \cap C_G(\mathrm{Soc}_\omega G)$. Ввиду того, что $G = C_G(\mathrm{Soc}_\omega G)$, получаем $K = C_K(\mathrm{Soc}_\omega K)$. Значит, $\mathrm{Soc}_\omega K \leq Z(K)$ и $K \in \mathfrak{H}$. Следовательно, класс $\mathfrak{H}$ замкнут относительно нормальных подгрупп.

Пусть $K_i \trianglelefteq G$, $K_i \in \mathfrak{H}$ для $i \in \{1; 2\}$ и $G = K_1K_2$. Так как $K_i \in \mathfrak{H}$, то по ранее доказанному $K_i = C_{K_i}(\mathrm{Soc}_\omega K_i)$. По лемме 3 имеем $K_i = C_{K_i}(\mathrm{Soc}_\omega K_i) = K_i \cap C_G(\mathrm{Soc}_\omega G)$. Следовательно, по тождеству Дедекинда получаем $G = K_1K_2 = C_G(\mathrm{Soc}_\omega G) \cap (K_1 \cap C_G(\mathrm{Soc}_\omega G))K_2$. Так как $K_2 \leq C_G(\mathrm{Soc}_\omega G)$, то, используя тождество Дедекинда, имеем $(K_1 \cap C_G(\mathrm{Soc}_\omega G))K_2 = C_G(\mathrm{Soc}_\omega G) \cap K_1K_2$. Следовательно, $G = K_1K_2 = C_G(\mathrm{Soc}_\omega G) \cap G$ и $G = C_G(\mathrm{Soc}_\omega G)$. Значит, $\mathrm{Soc}_\omega G \leq Z(G)$ и $G \in \mathfrak{H}$. Таким образом, класс $\mathfrak{H}$ замкнут относительно произведений нормальных $\mathfrak{H}$-подгрупп и $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга.

Так как класс $\mathfrak{H}$ R_0-замкнут, то в силу [1, предложение X.1.25] $\mathfrak{H}$ — класс Локетта. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга такой, что $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F} \subsetneqq \mathfrak{S}_\pi$, и $\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{S}_\pi : \mathrm{Soc}_\omega(G) \leq Z(G))$, где $\omega = \sigma(\mathfrak{F})$.

Из [1, лемма X.3.1] получаем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является классом Локетта и $\mathfrak{F}^* \neq \mathfrak{S}_\pi$. Кроме того, ввиду 1) $\mathfrak{H}$ — класс Локетта. Следовательно, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^* \neq \mathfrak{S}_\pi$. Значит, по лемме 2((1) $\Leftrightarrow$ (3)) $\mathfrak{F} \ntrianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{H} \ntrianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Покажем, что произведение классов Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является π-нормальным.

Так как $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга π-групп, то, очевидно, $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$.

Докажем обратное включение. Учитывая определение произведения классов Фиттинга, покажем, что для любой π-группы G фактор $G/G_\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}$-группой. По свойству $\mathfrak{F}$-радикалов групп [1, теорема IX.1.12(b)] $(G/G_\mathfrak{F})_\mathfrak{F} = G_{\mathfrak{F}\mathfrak{F}}/G_\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}$, то $(G/G_\mathfrak{F})_\mathfrak{F} = 1$. В соответствии с [1, лемма X.3.1] получаем $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\omega$. Так как $\mathrm{Soc}_\omega(G/G_\mathfrak{F}) \in \mathfrak{S}_\omega$, то $\mathrm{Soc}_\omega(G/G_\mathfrak{F}) \leq (G/G_\mathfrak{F})_\mathfrak{F} = 1$. Следовательно, $\mathrm{Soc}_\omega(G/G_\mathfrak{F}) \leq Z(G/G_\mathfrak{F})$ и $G/G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H}$. Итак, $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$.

Следовательно, $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi$. Так как $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Локетта, то по утверждению 4) леммы 1 произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — класс Локетта. Кроме того, в силу [1, предложение X.1.25] $\mathfrak{S}_\pi$ — класс Локетта. Значит, $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}\mathfrak{H} = (\mathfrak{S}_\pi)^* = \mathfrak{S}_\pi$. Отсюда по лемме 2((1) $\Leftrightarrow$ (3)) имеем $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ — π-нормальный класс Фиттинга. Утверждение 2) доказано. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, то по утверждению 1) леммы 1 $\mathfrak{F}^* \subseteq (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H})^* \subseteq (\mathfrak{S}_\pi)^*$. Тогда с учетом π-нормальности класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ по лемме 2((1) $\Leftrightarrow$ (3)) следует $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H})^* = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, применяя снова лемму 2((1) $\Leftrightarrow$ (3)), получаем $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$.

Пусть $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Предположим от противного, что $\mathfrak{F} \ntrianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{H} \ntrianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$.

Покажем, что без ограничения общности такими классами могут быть классы Локетта. По утверждениям 2) и 3) леммы 1 $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H})_* = \mathfrak{F}_* \vee \mathfrak{H}_* \subseteq \mathfrak{F}^* \vee \mathfrak{H}^* = (\mathfrak{F}_* \vee \mathfrak{H}_*)^*$. Значит, по утверждениям 2) и 3) леммы 1 и лемме 2((1) $\Leftrightarrow$ (3)) $(\mathfrak{F}_* \vee \mathfrak{H}_*)^* = ((\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H})_*)^* = (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H})^* = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $\mathfrak{F}^* \vee \mathfrak{H}^* \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Так как $\mathfrak{F}^* \neq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{H}^* \neq \mathfrak{S}_\pi$, то по лемме 2((1) $\Leftrightarrow$ (3)) $\mathfrak{F}^* \ntrianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{H}^* \ntrianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Однако $\mathfrak{F}^* \vee \mathfrak{H}^* \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Значит, без ограничения общности в качестве таких классов можно взять классы Локетта.

Пусть σ — некоторое непустое множество простых чисел такое, что $\sigma \subseteq \pi$. Предположим, что классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{S}_\pi : G = G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}})$. Тогда ввиду [11, теорема 2.1] $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\sigma$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}_{\sigma'}$.

Если $\sigma' = \varnothing$, то $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \ntrianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Получаем противоречие с тем, что $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$.

Если $\sigma' \neq \varnothing$, то $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{S}_\sigma$, и по утверждению 1) леммы 1 $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H})^* \subseteq (\mathfrak{H}\mathfrak{S}_\sigma)^*$. По условию $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Значит, по лемме 2((1) $\Leftrightarrow$ (3)) $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H})^* = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $(\mathfrak{H}\mathfrak{S}_\sigma)^* = \mathfrak{S}_\pi$, и по лемме 2((1) $\Leftrightarrow$ (3)) получаем $\mathfrak{H}\mathfrak{S}_\sigma \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Так как класс $\mathfrak{S}_\sigma$ является насыщенным гомоморфом, то, как доказано ранее в [14], $\mathfrak{S}_\sigma$ удовлетворяет свойству α_π и $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} \neq (G \in \mathfrak{S}_\pi : G = G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}})$. Следовательно, мы можем выбрать группу $G \in \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ такую, что $G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}} < G$. Если $p \in \pi$ и $(p, |G/G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}}|) = 1$, то по лемме 2((1) $\Leftrightarrow$ (2)) существует натуральное число n и $K = G^n \wr Z_p \in \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$. По доказанному выше $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Локетта. Так как $G^n \notin \mathfrak{F}$ и $G^n \notin \mathfrak{H}$, то в силу [1, предложение X.2.1(a)] $K_{\mathfrak{F}} = ((G^n)_{\mathfrak{F}})^\natural$ и $K_{\mathfrak{H}} = ((G^n)_{\mathfrak{H}})^\natural$. Поскольку $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Локетта, то в соответствии с [1, теорема X.1.9((a)$\Leftrightarrow$(b))] $K_{\mathfrak{F}} = ((G_{\mathfrak{F}})^n)^\natural$ и $K_{\mathfrak{H}} = ((G_{\mathfrak{H}})^n)^\natural$. Значит, $K/K_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{H}} \cong (G/G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}})^n \wr Z_p$ и фактор $K/K_{\mathfrak{F}} K_{\mathfrak{H}}$ не π-нильпотентен. Следовательно, с учетом [1, теорема IX.2.1] заключаем, что $K \notin \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$ или $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin; N Y: Walter de Gruyter & Co, 1992. 891 p. (De Gruyter Expo. Math., 4.) ISBN: 978-3-11-087013-8.
2. **Blessenohl D., Gaschütz W.** Über normale Schunk- und Fittingklassen // Math. Z. 1970. Vol. 118, no. 1. S. 1–8. doi: 10.1007/BF01109888.
3. **Воробьёв Н.Т., Марцинкевич А.В.** Конечные π-группы с нормальными инъекторами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 4. С. 790–797.
4. **Cossey J.** Products of Fitting classes // Math. Z. 1975. Vol 141, no. 3. P. 289–295. doi: 10.1007/BF01247314.
5. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Изд. 11 / ИМ РАН. Новосибирск, 1990.
6. **Vorob'ev N.T.** On the factorization of local and non-local products of finite groups of non-local formations // Proc. 7th Reg. Sci. Sess. Math., Sect. Algebra and Number Theory. Kalsk (Poland), 1990. P 9–13.
7. **Ведерников В.А.** О локальных формациях конечных групп // Мат. заметки. 1989. Т. 46, вып. 6. С. 32–37.
8. **Воробьёв Н.Т., Скиба А.Н.** Локальные произведения нелокальных классов Фиттинга // Вопросы алгебры. 1995. № 8. С. 55–58.
9. **Шпаков В.В., Воробьёв Н.Т.** Локальные факторизации нелокальных классов Фиттинга // Дискрет. математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 111–118.
10. **Lockett F.P.** The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. 1974. Vol. 137, no. 2. P. 131–136. doi: 10.1007/BF01214854.
11. **Cusack E.** The join of two Fitting classes // Math. Z. 1979. Vol. 167, no. 1. P. 37–47. doi: 10.1007/BF01215242.

12. **Beidleman J.C.** On products and normal Fitting classes // Arch. Math. 1977. Vol. 28, no. 1. P. 347–356. doi: 10.1007/BF01214854 .
13. **Gaschütz W.** Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups // Notes on pure mathematics. 1979. №. 11. P. 1–100.
14. **Савельева Н.В., Воробьёв Н.Т.** Максимальные по сильному π-вложению классы Фиттинга // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2008. №. 2(47). С. 157–168.

Поступила 16.11.2017

Марцинкевич Анна Веславовна
аспирант
Витебский государственный университет имени П. М. Машерова,
г. Витебск
e-mail: hanna-t@mail.ru

Воробьёв Николай Тимофеевич
доктор физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Витебский государственный университет имени П. М. Машерова,
г. Витебск
e-mail: vorobyovnt@tut.by

REFERENCES

1. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* Berlin; New York: Walter de Gruyter & Co, 1992, Ser.: De Gruyter Expo. Math., 4, 891 p. ISBN: 978-3-11-087013-8 .
2. Blessenohl D., Gaschütz W. Über normale Schunk- und Fittingklassen. *Math. Z.*, 1970, vol. 118, no. 1, pp. 1–8. doi: 10.1007/BF01109888 .
3. Vorob'ev N.T., Martsinkevich A.V. Finite π-groups with normal injectors. *Sib. Math. J.*, 2015, vol. 56, no. 4, pp. 624–630. doi: 10.17377/smzh.2015.56.406 .
4. Cossey J. Products of Fitting classes. *Math. Z.*, 1975, vol. 141, no. 3, pp. 289–295. doi: 10.1007/BF01247314 .
5. *Kourovka notebook: Unsolved problems of group theory.* 11th ed., IM RAN, Novosibirsk, 1990, 126 p. (in Russian).
6. Vorob'ev N.T. On the factorization of local and non-local products of finite groups of non-local formations. *Proc. 7th Reg. Sci. Sess. Math., Sect. Algebra and Number Theory.* Kalsk, 1990, pp. 9–13.
7. Vedernikov V.A. Local formations of finite groups. *Math. Notes*, 1989, vol. 46, no. 6, pp. 910–913. doi: 10.1007/BF01158624 .
8. Vorob'ev N.T., Skiba A.N. Local products of non-local Fitting classses. *Voprosy algebry*, 1995, no. 8, pp. 55–58 (in Russian).
9. Shpakov V.V., Vorobyev N.T. Local factorisations of nonlocal Fitting classes. *Discrete Math. Appl.*, 2008, vol. 18, no. 4, pp. 439–446. doi: 10.1515/DMA.2008.032.
10. Lockett F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$. *Math. Z.*, 1974, vol. 137, no. 2, pp. 131–136. doi: 10.1007/BF01214854 .
11. Cusack E. The join of two Fitting classes. *Math. Z.*, 1979, vol. 167, no. 1, pp. 37–47. doi: 10.1007/BF01215242 .
12. Beidleman J.C. On products and normal Fitting classes. *Arch. Math.*, 1977, vol. 28, no. 1, pp. 347–356. doi: 10.1007/BF01223934 .
13. Gaschütz W. Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups. *Notes on pure mathematics*, 1979, no. 11, pp. 1–100.
14. Savelyeva N.V., Vorob'ev N.T. Maximal on strong π-containment Fitting classes. *Izv. Gomel. Gos. Univ. im. F. Skoriny*, 2008, no. 2(47), pp. 157–168 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on November 11, 2017.

Anna Veslavovna Martsinkevich. doctoral student, Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, 210038 Belarus, e-mail: hanna-t@mail.ru .

Nikolai Timofeevich Vorob'ev. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, 210038 Belarus, e-mail: vorobyovnt@tut.by .