ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 514.174.2

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ УПАКОВОК ИЗ КРУГОВ РАЗЛИЧНОГО ДИАМЕТРА НА ПЛОСКОСТИ[1]

П. Д. Лебедев, А. Л. Казаков

Рассматривается задача о построении оптимальной упаковки из фиксированного числа $n > 1$ кругов в общем случае различного радиуса в плоское компактное множество M. Считается, что для каждого элемента упаковки задано положительное число такое, что радиус круга равен его произведению на общий для всей упаковки параметр r. Критерием оптимальности выбран максимум r, что приводит в том числе и к увеличению плотности упаковки — отношения ее площади к площади фигуры M. Основу метода решения задачи составляет итерационное изменение координат центров элементов упаковки S_n, дающее возможность увеличивать радиусы кругов. Разработанные вычислительные процедуры реализуют имитацию отталкивания центра каждого элемента упаковки от близко лежащих других центров и от границы множества M. Исследованы дифференциальные свойства функции двух переменных (x, y), значение которой равно максимальному радиусу круга упаковки, располагающегося с центром в точке (x, y). При это координаты центров остальных элементов упаковки считаются фиксированными. При программной реализации используется конструкция чебышевского центра компактного множества. Создан программный комплекс, с его помощью рассмотрен ряд примеров для множеств M различной геометрии. Выполнена визуализация полученных результатов.

Ключевые слова: задача об упаковке кругов, оптимизация, чебышевский центр, супердифференциал, итерационный алгоритм.

P. D. Lebedev, A. L. Kazakov. Iterative methods for the construction of planar packings of circles of different size.

We consider the problem of constructing an optimal packing of a fixed number $n > 1$ of circles, generally, of different radii in a planar compact set M. It is assumed that a positive number is given for each element of the packing such that the radius of the circle equals the product of this number by a parameter r, which is common to the whole package. The optimality criterion is the maximum of r, which leads, in particular, to an increase in the packing density, which is the ratio of the area of the packing to the area of M. In the proposed solution method, we iteratively change the coordinates of the centers of the packing elements S_n, which makes it possible to increase the radii of the circles. The developed computational procedures imitate the repulsion of the center of each element of the packing from nearby centers of other elements and from the boundary of M. We study the differential properties of a function of two variables (x, y) whose value is the maximum radius of the circle of the packing centered at the point (x, y), where the centers of the remaining elements are assumed to be fixed. The software implementation employs the notion of Chebyshev center of a compact set. A software complex is created and a number of examples are considered for sets M of different geometry with the use of this complex. The results are visualized.

Keywords: circle packing problem (CPP), optimization, Chebyshev center, superdifferential, iterative algorithm.

MSC: 05B40, 28A78, 52C15, 52C26

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-141-151

Введение

При решении задач теории управления [1] часто требуется заменить множество со сложной геометрией набором более простых однотипных объектов. Одним из наиболее распространенных вариантов такой замены является аппроксимация ограниченного множества объединением заданного числа фигур определенного типа. В некотором смысле внутренней аппроксимацией множества может считаться упаковка в него фигур, т. е. размещение их на его площади при нулевой площади пересечения фигур [2]. Решению данной задачи посвящено большое число публикаций, подробный обзор представлен в [3]. Задача об упаковке возникает, в частности,

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00221, № 18-07-00604, № 16-06-00464).

в транспортной и инфраструктурной логистике [4; 5]. Авторы ранее в основном исследовали задачу о покрытии (см. работы 2014 г.), задача об упаковке рассматривалась применительно к правильным многоугольникам и кругам на плоскости [6] и правильным многогранникам в трехмерном пространстве [7], причем все элементы упаковки были одинаковы.

В данном исследовании авторы изучают задачу об упаковке, содержащей различные элементы, а именно круги разного радиуса. Различные методы решения этой задачи рассмотрены, например, в статье [8]. Она может решаться с помощью сведения к задачам глобальной оптимизации [9], эвристических подходов [10], генетических алгоритмов [11], физических аналогий [12]. Здесь мы будем полагать, что радиус входящих в упаковку кругов пропорционален параметру r в соответствии с заданным массивом коэффициентов. Критерием оптимальности является максимизация r.

1. Постановка задачи

Ограничимся рассмотрением выпуклых множеств на плоскости.

О п р е д е л е н и е 1. Упаковкой U_n компактного множества $M \subset X$ из n кругов радиуса r_i каждый называется объединение $O(\mathbf{x}_1, r_1) \cup O(\mathbf{x}_2, r_2) \cup \ldots \cup O(\mathbf{x}_n, r_n)$ из n кругов, для которых выполняются условия

$$\forall i = \overline{1, n} \quad O(\mathbf{x}_i, r) \subseteq M,$$

$$\forall i = \overline{1, n-1}, \forall j = \overline{i+1, n} \quad \operatorname{int} O(\mathbf{x}_i, r_i) \cap \operatorname{int} O(\mathbf{x}_j, r_j) = \varnothing.$$

Здесь int означает объединение внутренних точек множества. Таким образом, набор кругов является упаковкой множества M в том случае, если все они вложены в M и все попарно пересекаются только по своим границам (либо не имеют общих точек).

Обозначим множество всех упаковок множества M, состоящих из n кругов, через $\Upsilon_n(M)$. Ограничимся далее рассмотрением выпуклых множеств ненулевой площади с кусочно-гладкой границей.

З а д а ч а. Пусть задано ограниченное замкнутое выпуклое множество M, число $n \in \mathbb{N}$ и набор положительных чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$. Требуется найти упаковку

$$U_n = O(\mathbf{x}_1, \alpha_1 r) \cup O(\mathbf{x}_2, \alpha_2 r) \cup \ldots \cup O(\mathbf{x}_n, \alpha_n r) \quad (U_n \in \Upsilon_n(M)),$$

для которой число r было бы максимальным.

Задача сводится к тому, чтобы найти такой набор $S_n = \{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^n$ из n точек $\mathbf{s}_i \in M$, $i = \overline{1, n}$, при котором величина

$$R_M(S_n) = \min_{i=\overline{1,n}} \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i), \tag{1.1}$$

где

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \min\Big\{ \min_{j=\overline{1,n}(j\neq i)} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\|}{\alpha_i + \alpha_j}, \frac{\rho\,(\mathbf{x}, \partial M)}{\alpha_i} \Big\}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.2}$$

будет максимальной среди всех возможных наборов. Здесь $\rho(\mathbf{x}, M) \triangleq \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| \colon \mathbf{m} \in M\}$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до множества M, ∂M — граница множества M.

2. Свойства функций $\varphi^{(i)}(\cdot)$

Процесс отыскания множества S_n центров кругов упаковки можно свести к поэтапной максимизации функций $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, n}$, на множестве M. При этом i меняется от 1 до n, точки $S_n \setminus \{\mathbf{s}_i\}$ считаются фиксированными, а $\mathbf{s}_i$ строится как точка локального максимума функции (1.2) при заданном i.

По построению $\varphi^{(i)}(\cdot)$ есть минимум из конечного числа евклидовых расстояний до ограниченного множества, умноженных на положительные числа. Это позволяет получить аналитическое выражение некоторых дифференциальных свойств функции в точках.

О п р е д е л е н и е 2. [13, с. 37–38] Супердифференциалом функции $u(\mathbf{x})$ с областью определения $D \subseteq \mathbb{R}^2$ в точке $\mathbf{x}$ называется выпуклое компактное множество $D^+u(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^2$, для которого выполняется равенство

$$D^+u(\mathbf{x}) = \left\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 \colon \langle \mathbf{s}, \mathbf{f}\rangle - d^+u(\mathbf{x}, \mathbf{f}) \geqslant 0 \ \forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^2\right\},$$

где

$$d^+u(\mathbf{x}, \mathbf{f}) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \sup\left\{\delta^{-1}[u(\mathbf{x} + \delta \mathbf{f}') - u(\mathbf{x})] \colon \delta \in (0, \varepsilon), \|\mathbf{f} - \mathbf{f}'\|\right\},$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов.

Ключевым свойством супердифференциала является то, что он в некотором смысле дает оценку сверху дифференциальных свойств функции. Если в точке $\mathbf{x}_0$ определен супердифференциал функции $u(\mathbf{x})$ и производная функции по направлению $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$

$$\frac{du(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \frac{u(\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{g}) - u(\mathbf{x}_0)}{\varepsilon},$$

то справедливо равенство

$$\frac{du(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \min\{\langle \mathbf{g}, \mathbf{d}\rangle \colon \mathbf{d} \in D^+u(\mathbf{x}_0)\}. \tag{2.1}$$

Для функции $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ евклидового расстояния супердифференциал определен на $\mathbb{R}^2 \setminus M$:

$$D^+u(\mathbf{x}) = \mathrm{co}\left\{\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\rho(\mathbf{x}, M)} \colon \mathbf{y} \in \Omega_M(\mathbf{x})\right\}, \tag{2.2}$$

где $\Omega_M(\mathbf{x})$ — множество ближайших к $\mathbf{x}$ в евклидовой метрике точек из M, $\mathrm{co}(M)$ — выпуклая оболочка множества M (см. [14, с. 244]).

О п р е д е л е н и е 3. Множеством значимых точек $\Omega^{(i)}(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)$ для функции $\varphi^{(i)}(\cdot)$ в точке $\mathbf{x} \in M$ назовем

$$\Omega^{(i)}(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) = \left\{\mathbf{s}_j \in S_n^{(i)} \colon \|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i\| = (\alpha_i + \alpha_j)\varphi^{(i)}(\mathbf{x})\right\}$$
$$\cup \left\{\mathbf{m} \in \partial M \colon \|\mathbf{m} - \mathbf{s}_i\| = \alpha_i \varphi^{(i)}(\mathbf{x})\right\}, \quad S_n^{(i)} \triangleq S_n \setminus \{\mathbf{s}_i\}.$$

Значимые точки определяют свойства функции (1.2).

Теорема 1. *Если для точки $\mathbf{x} \in M$ выполняется оценка $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) > 0$, то супердифференциал функции $\varphi^{(i)}(\cdot)$ в ней определен и имеет вид*

$$D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathrm{co}\Bigg\{\left\{\frac{\mathbf{x} - \mathbf{s}_j}{(\alpha_i + \alpha_j)\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\|} \colon \mathbf{s}_j \in S_n^{(i)} \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)\right\}$$
$$\cup \left\{\frac{\mathbf{x} - \mathbf{m}}{\alpha_i \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|} \colon \mathbf{m} \in \partial M \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)\right\}\Bigg\}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функцию $\varphi^{(i)}(\cdot)$ можно представить в виде минимума из конечного числа евклидовых расстояний до замкнутого множества, умноженных на положительные скаляры

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \min_{j = \overline{1,n}} f_j(\mathbf{x}),$$

$$f_j(\mathbf{x}) = \chi_j \rho(\mathbf{x}, M_j), \quad j = \overline{1,n}; \quad \chi_j = \begin{cases} (\alpha_i + \alpha_j)^{-1}, & j \neq i \\ \alpha_i^{-1}, & j = i \end{cases}; \quad M_j = \begin{cases} \{\mathbf{s}_j\}, & j \neq i \\ \partial M, & j = i. \end{cases}$$

Выражение (2.2) позволяет указать форму супердифференциала функций $f_j(\mathbf{x})$ в тех точках, в которых они отличны от нуля:

$$D^+ f_j(\mathbf{x}) = \chi_j \operatorname{co}\Big\{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\rho(\mathbf{x}, M)}\colon \mathbf{y} \in \Omega_{M_j}(\mathbf{x})\Big\}. \tag{2.4}$$

Если на множестве X заданы n супердифференцируемых функций $\{f_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^n$, то и функция $f_m(\mathbf{x}) = \min\limits_{j=\overline{1,n}}\{f_j(\mathbf{x})\}$ также является супердифференцируемой на X (см. [15]). В точке $\mathbf{x} \in \operatorname{int} X$ для супердифференциала (2.2) справедлива формула

$$D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \operatorname{co} \bigcup_{j\in I(\mathbf{x})} D^+ f_j(\mathbf{x}), \tag{2.5}$$

где

$$I(\mathbf{x}) = \{j = \overline{1,n}\colon f_j(\mathbf{x}) = \varphi^{(i)}(\mathbf{x})\}$$

есть множество номеров функций, значение которых в точке равно минимуму из всех значений по набору. По построению множество $I(\mathbf{x})$ состоит из номеров j таких, что $M_j \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) \neq 0$. Поэтому, если подставить в формулу (2.5) подставить выражения (2.4) и значения множеств M_j, то получается выражение (2.3). $\square$

Теорема 2. *Функция $\varphi^{(i)}(\cdot)$ достигает максимума в точке $\mathbf{x} \in M$ только тогда, когда выполнены условия*

$$\mathbf{x} \notin (S_n^{(i)} \cup \partial M) \tag{2.6}$$

и

$$\mathbf{x} \in \operatorname{co}\Omega^{(i)}(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M). \tag{2.7}$$

Доказательство теоремы 2 основывается на том факте, что супердифференцируемая функция достигает максимума во внутренней точке множества своей области определения только в том случае, если нулевой вектор $\mathbf{0} = (0,0)$ принадлежит ее супердифференциалу (см. [16]). Действительно, если $\mathbf{0} \notin D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$, то по теореме об отделимости найдется прямая Λ, проходящая через $\mathbf{0}$, так, что $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ лежит полностью в одной из полуплоскостей, ограниченных Λ, и $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \cap \Lambda = \varnothing$. Можно построить единичный вектор $\mathbf{g}$, ортогональный Λ и направленный от начала координат в сторону той полуплоскости, где лежит множество $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$. По формуле (2.1) для производной по направлению $\mathbf{g}$ справедлива оценка

$$\frac{du(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} = \min\{\langle \mathbf{g}, \mathbf{d}\rangle\colon \mathbf{d} \in D^+u(\mathbf{x})\} > 0.$$

Значит, если рассмотреть сужение функции $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ на достаточно малый отрезок $[\mathbf{x}, \mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{g}]$, $\varepsilon > 0$, то ее значения будут возрастать при удалении от $\mathbf{x}$. В этом случае $\mathbf{x}$ не может быть для нее точкой локального максимума.

Условие (2.6) выполняется, так так только в этом случае выполняется оценка $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) > 0$. Это в свою очередь значит, что для супердифференциала $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ справедлива формула (2.3). Соответственно выполняется $\mathbf{0} \in \operatorname{co}\Xi(\mathbf{x})$, где

$$\Xi(\mathbf{x}) \triangleq \Big\{\Big\{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{s}_j}{(\alpha_i+\alpha_j)\|\mathbf{x}-\mathbf{s}_j\|}\colon \mathbf{s}_j \in S_n^{(i)} \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)\Big\}$$

$$\cup \Big\{\frac{\mathbf{x}-\mathbf{m}}{\alpha_i\|\mathbf{x}-\mathbf{m}\|}\colon \mathbf{m} \in \partial M \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)\Big\}\Big\}.$$

Согласно теореме Каратеодори (см. [17]) во множестве найдется набор из векторов $\{\mathbf{h}_j\} = H \subseteq \Xi(\mathbf{x})$ такой, что $\mathbf{0} \in \operatorname{co} H$, и число элементов k которого не превышает размерность пространства более, чем на 1, т. е. в данном случае равно 3. Можно записать $\mathbf{0}$ как выпуклую комбинацию

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \mathbf{h}_j, \quad \forall j = \overline{1,k} \ \ \beta_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{k} \beta_j = 1.$$

Рассмотрим теперь множество $\Xi^*(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)$.

Для любого элемента $\mathbf{h}_j$ множества $\Xi(\mathbf{x})$ в $\Xi^*(\mathbf{x})$ можно указать элемент $\mathbf{h}_j^*$ такой, что

$$\mathbf{h}_j^* = \lambda \mathbf{h}_j, \quad \lambda > 0.$$

Значит, и для множества H можно построить множество $H^* \subseteq \Xi^*(\mathbf{x})$ векторов, которые имеют вид $\mathbf{h}_j^* = \lambda_j \mathbf{h}_j, \ \ j = \overline{1,k}$. Рассмотрим их выпуклую комбинацию

$$\mathbf{h}_0 = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* \mathbf{h}_j^*, \quad \text{где} \ \ \beta_j^* = \frac{\beta_j}{\lambda_j} \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{\beta_l}{\lambda_l} \right)^{-1}.$$

По построению имеет место

$$\mathbf{h}_0 = \sum_{j=1}^{k} \left(\beta_j \mathbf{h}_j \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{\beta_l}{\lambda_l} \right) \right) = \mathbf{0} \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{\beta_l}{\lambda_l} \right) = \mathbf{0}.$$

Рассмотрим теперь точки $\mathbf{g}_j \triangleq \mathbf{h}_j^* + \mathbf{x}, j = \overline{1,k}$. По построению $\forall j = \overline{1,k} \ \mathbf{g}_j \in \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)$. Если взять их выпуклую комбинацию с коэффициентами β_j^*, то получим

$$\sum_{j=1}^{k} \beta_j^* \mathbf{g}_j = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* \mathbf{h}_j^* + \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* \mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Как видим, точка $\mathbf{x}$ может быть представлена как выпуклая комбинация набора точек из $\Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)$, а значит, выполняется и (2.7). □

З а м е ч а н и е. Условия теоремы не являются достаточными. Рассмотрим, например? случай, когда $i = 3$ и точка $\mathbf{x}$ находится на отрезке $[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2]$, так что выполняется соотношение

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_1\|}{\alpha_1 + \alpha_3} = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_2\|}{\alpha_2 + \alpha_3} = \varphi^{(3)}(\mathbf{x}).$$

Пусть при этом в $\Omega^{(3)}(\mathbf{x}, S_n^{(3)}, M)$ не содержится точек за исключением $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$. Тогда выполняется условие (2.7), а в случае $\varphi^{(3)}(\mathbf{x}) > 0$ — (2.6). Супердифференциал (2.3) имеет вид

$$D^+ \varphi^{(3)}(\mathbf{x}) = \left[\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2}{\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|}, \frac{-1}{\alpha_1 + \alpha_3} \frac{\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2}{\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|} \right],$$

а значит, $\mathbf{0} \in D^+ \varphi^{(3)}(\mathbf{x})$.

Однако если рассмотреть перпендикуляр к отрезку $[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2]$ в точке $\mathbf{x}$, то в любой малой окрестности $\mathbf{x}$ найдутся точки $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{s}^*$, где $\mathbf{s}^*$ — единичный по норме вектор такие, что $\varphi^{(3)}(\mathbf{x}^*) > \varphi^{(3)}(\mathbf{x})$. Следовательно, $\mathbf{x}$ не является точкой максимума функции $\varphi^{(3)}(\cdot)$. □

Теоремы 1 и 2 позволяют создать алгоритм итерационного сдвига точек S_n по направлениям из супердифференциалов функций (1.2), обеспечивающих увеличение радиуса кругов упаковки (если это возможно). Однако важным условием является генерация начального расположения $S_n^{(0)}$ центров элементов упаковки, поскольку возможно существование нескольких положений $\mathbf{s}_i$ в точках локального максимума функций $\varphi^{(i)}(\cdot)$, $i = \overline{1,n}$, которые, однако, дают различные значения показателя качества (1.1).

3. Итерационные алгоритмы улучшения упаковки

Для поэтапного увеличения величины $R_M(S_n)$ авторы реализовали алгоритм, который в некотором смысле имитирует отталкивание точки $\mathbf{s}_i$ от ближайших к ней элементов из $S_n^{(i)}$ и от границы ∂M выпуклого компакта M.

Определение 4. Чебышевским центром [18] множества $M \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^2$ называется такая точка $\mathbf{c}(M)$, что

$$\sup_{\mathbf{m}\in M} \|\mathbf{c}(M)-\mathbf{m}\| = \inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \sup_{\mathbf{m}\in M} \|\mathbf{x}-\mathbf{m}\|. \tag{3.1}$$

Величина (3.1) называется чебышевским радиусом $r(M)$ компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$.

Пусть задан некоторый массив S_n центров кругов. Схема алгоритма итерационного увеличения показателя качества (1.1) упаковки U_n в выпуклый компакт M при заданных параметрах D_r (радиус слоя точек, которые участвуют в формировании сдвига), k_r (коэффициент величины сдвига) и номере i может быть следующей.

Алгоритм (итерационного увеличения радиуса кругов упаковки).

1. Строится множество $P = \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{p}$ ортогональных проекций $\mathbf{s}_i$ на кривую границу ∂M.
2. Вычисляется значение функции $\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$ по формуле (1.2).
3. Строится массив точек из $S_n^{(i)}$, которые расположены близко к $\mathbf{s}_i$

$$S^* = \left\{\mathbf{s}_j \in S_n^{(i)} \colon \|\mathbf{s}_j-\mathbf{s}_i\|/(\alpha_i+\alpha_j) \leqslant \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)+D_r\right\}.$$

4. Строится массив точек из P, которые расположены близко к $\mathbf{s}_i$

$$P^* = \left\{\mathbf{p}_k \in P \colon \|\mathbf{p}_k-\mathbf{s}_i\|/\alpha_i \leqslant \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)+D_r\right\}.$$

5. Строится массив векторов, направленных от близких точек к $\mathbf{s}_i$, с учетом расстояния

$$W = \left\{\frac{\mathbf{s}_i-\mathbf{s}_j}{(\alpha_i+\alpha_j)\|\mathbf{s}_i-\mathbf{s}_j\|}\Big(\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)+D_r-\frac{\|\mathbf{s}_i-\mathbf{s}_j\|}{\alpha_i+\alpha_j}\Big) \colon \mathbf{s}_j \in S^*\right\}$$
$$\cup \left\{\frac{\mathbf{s}_i-\mathbf{p}_k}{\alpha_i\|\mathbf{s}_i-\mathbf{p}_k\|}\Big(\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)+D_r-\frac{\|\mathbf{s}_i-\mathbf{p}_k\|}{\alpha_i}\Big) \colon \mathbf{p}_k \in P^*\right\}.$$

6. Вычисляется новая точка по формуле

$$\widehat{\mathbf{s}}_i = \mathbf{s}_i + k_r\mathbf{c}(W). \tag{3.2}$$

7. Вычисляется значение функции $\varphi^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i)$, и если $\varphi^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) > \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$, то в качестве новой точки n-сети берется

$$\mathbf{s}_i := \widehat{\mathbf{s}}_i.$$

Данный алгоритм применяется ко всем точкам сети, после чего выполняется оценка того, насколько сильно они сдвинулись. Заметим, что формула (3.2) имитирует механическое отталкивание центра круга упаковки от ближайших к нему кругов и точек границы компакта M, но не при сложении векторов сил, а при нахождении их чебышевского центра. Множество W можно рассматривать как построенное на базе супердифференциала (2.3), но содержащее в общем случае большее количество векторов. При этом W содержит векторы, сонаправленные $\mathbf{x}-\mathbf{s}_j$ при $\mathbf{s}_j \in \Omega^{(i)}(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) \cap S_n^{(i)}$ и $\mathbf{x}-\mathbf{m}$ при $\mathbf{m} \in \Omega^{(i)}(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) \cap S_n^{(i)}$, при этом их норма равна D_r. Радиус D_r слоя точек, участвующих в формировании сдвига, а также коэффициент сдвига k_r выбирались эмпирически, для обеспечения, с одной стороны, устойчивости работы алгоритма, с другой — высокую скорость. Оптимальными значениями оказались при заданном множестве M и начальной итерации S_n^0 массива точек значения $D_r = 0.5R_M(S_n^0) \div R_M(S_n^0)$, $k_r = 0.25 \div 0.5$.

По результатам процесса применения алгоритма программный комплекс выдает некоторое значение массива центров кругов упаковки S_n и значение величины $R_M(S_n)$, которой пропорциональны радиусы кругов. Естественно, конкретные результаты могут не совпадать с глобальным максимумом. Поэтому предусмотрена возможность повторного запуска программного комплекса, в котором в качестве начальной итерации $\widetilde{S}_n = \{\widetilde{\mathbf{s}}_i\}_{i=1}^n$ берется конечный результат предыдущего запуска с внесением стохастического возмущения. Координаты точек рассчитываются по формуле

$$\widetilde{\mathbf{s}}_i = \mathbf{s}_i + 0.25 R_M(S_n)\Big(\max_{j=\overline{1,n}} \alpha_j\Big)^{-1} \mathbf{x}_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.3}$$

где компоненты векторов $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ — случайные числа, равномерно распределенные на отрезке $[-1, 1]$. Формула (3.3) гарантирует, что будет выполняться вложение $\widetilde{S}_n \subset M$ и все точки массива $\widetilde{S}_n$ будут попарно различными. Это означает, что для $\widetilde{S}_n$ можно многократно применять алгоритм, а затем результаты относительно радиусов полученных кругов сравнить с исходными и выбрать оптимальный вариант.

Косвенным показателем близости упаковки к оптимальной можно считать ее плотность $\sigma(U_n)$ — отношение суммы площадей всех ее элементов к площади компакта M. В случае кругов равного радиуса и компактного множества при $n > 1$ выполняется оценка $\sigma(U_n) < \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}$ (подробнее см. [19, с. 111]).

4. Результаты моделирования

Авторами создан программный комплекс в пакете MATLAB, реализующий представленные выше конструкции. Его основу составляет многократное выполнение алгоритма для различных начальных позиций центров упаковки. В нем предусмотрена генерация начального положения центров элементов упаковки на базе гексагональной решетки со случайным изменением координат. Он позволяет вычислять аппроксимации наилучших упаковок для плоских множеств и проводить их визуализацию. В процессе выполнения предусмотрены возможность коррекции параметров алгоритма, в частности D_r и k_r, и условий остановки его работы (по достаточно малому изменению координат точек либо по малому изменению параметра r).

П р и м е р 1. Требуется решить задачу 1 для множества $M = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$, при $n = 10$ и массиве $\alpha_i = 2$ при $i = 1, \ldots, 5$, $\alpha_i = 1$ при $i = 6, \ldots, 10$.

При решении наибольшее найденное значение $r \approx 0.1706$. Плотность упаковки $\sigma(U_{10}) \approx 0.7276$. Круги упаковки, их центры, множество M представлены на рис. 1. Координаты центров

$$S_{10} \approx \big\{(-0.1870 - 0.6306), (-0.6462, -0.1229), (0.5698, -0.3305), (-0.4067, 0.5177),$$
$$(0.2253, 0.2589), (0.8213, 0.1156), (0.7053, 0.4364), (0.3067, -0.7702),$$
$$(-0.1293, -0.1168), (0.0813, 0.8070)\big\}.$$

П р и м е р 2. Требуется решить задачу 1 для множества $M = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$, при $n = 12$ и массиве $\alpha_i = 1.5$ при $i = 1, \ldots, 6$, $\alpha_i = 1$ при $i = 7, \ldots, 12$.

При решении наибольшее найденное значение $r \approx 0.1944$. Плотность упаковки $\sigma(U_{12}) \approx 0.737$. Круги упаковки, их центры, множество M представлены на рис. 2. Координаты центров

$$S_{12} \approx \big\{(-0.4603 - 0.5367), (-0.4703, 0.5290), (-0.7073, -0.0057), (0.6987, 0.1162),$$
$$(0.0871, 0.7029), (-0.0479, 0.0876), (-0.0511, -0.8031), (0.3820, -0.6747),$$
$$(0.0130, -0.4180), (0.7150, -0.3702), (0.5577, 0.5814), (0.3528, -0.2265)\big\}.$$

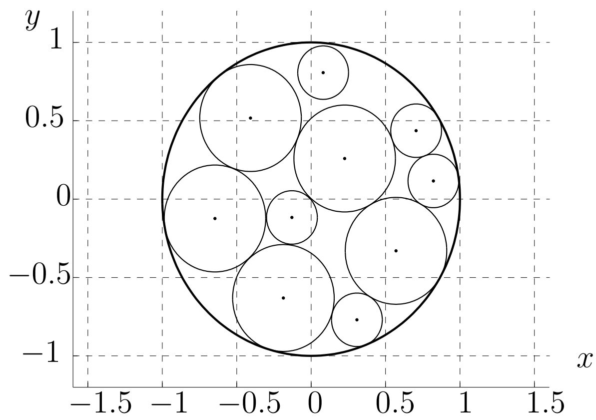

Рис. 1. Аппроксимация U_{10} наилучшей упаковки круга M 10 кругами в примере 1.

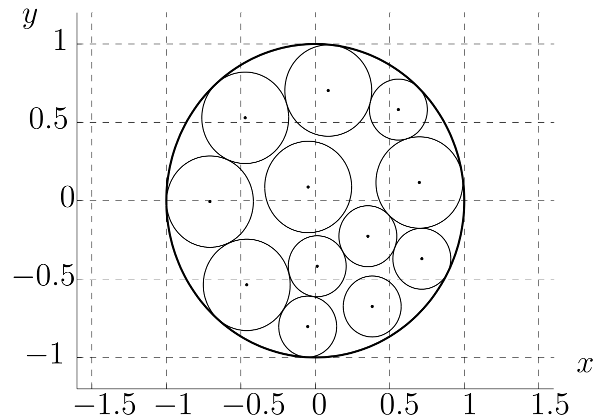

Рис. 2. Аппроксимация U_{12} наилучшей упаковки круга M 12 кругами в примере 2.

П р и м е р 3. Требуется решить задачу 1 для множества $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$, при $n = 9$ и массиве $\alpha_i = 2$ при $i = 1, \ldots, 4$, $\alpha_i = 1$ при $i = 5, \ldots, 9$.

При решении наибольшее найденное значение $r \approx 0.2087$. Плотность упаковки $\sigma(U_9) \approx 0.7185$. Круги упаковки, их центры, множество M представлены на рис. 3. Координаты центров

$$S_9 \approx \big\{(0.5488, 0.5826), (-0.2864, -0.5678), (-0.5813, 0.4662),$$

$$(0.5772, -0.5827), (-0.7836, -0.1511), (0.3341, -0.0056),$$

$$(0.0113, 0.2598), (0.7913, 0.0055), (-0.0436, 0.7907)\big\}.$$

П р и м е р 4. Требуется решить задачу 1 для множества $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$, при $n = 13$ и массиве $\alpha_i = 1.5$ при $i = 1, \ldots, 5$, $\alpha_i = 1$ при $i = 6, \ldots, 13$.

При решении наибольшее найденное значение $r \approx 0.2124$. Плотность упаковки $\sigma(U_{13}) \approx 0.6818$. Круги упаковки, их центры, множество M представлены на рис. 4. Координаты центров

$$S_{13} \approx \big\{(0.6811, 0.4962), (-0.1148, 0.0301), (0.6806, -0.1422),$$

$$(-0.2755, 0.6473), (-0.6807, -0.2656), (0.7536, -0.7536),$$

$$(0.2100, -0.3917), (0.0493, -0.7867), (-0.7645, 0.3173),$$

$$(-0.3687, -0.6993), (-0.7876, 0.7876), (0.2368, 0.7875), (-0.7871, -0.7871)\big\}.$$

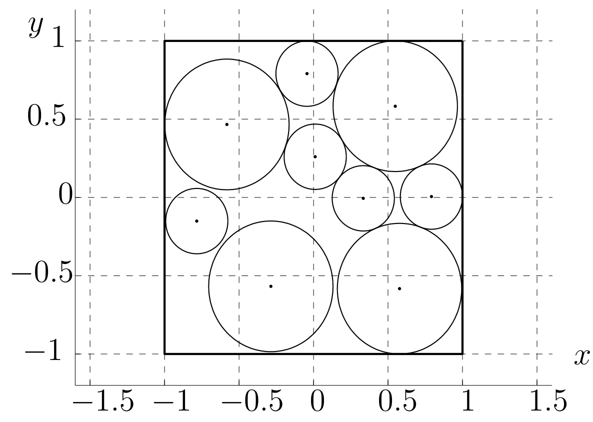

Рис. 3. Аппроксимация U_9 наилучшей упаковки квадрата M 9 кругами в примере 3.

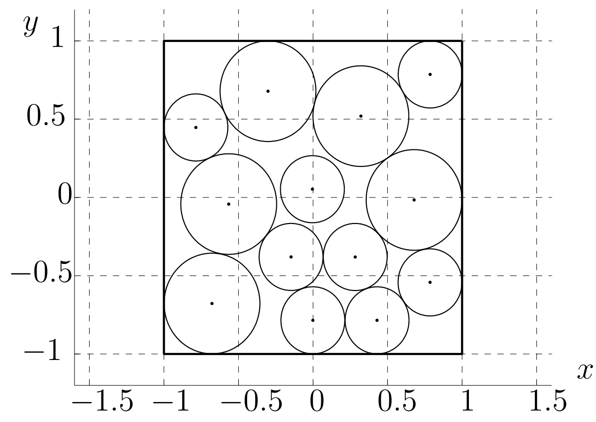

Рис. 4. Аппроксимация U_{13} наилучшей упаковки квадрата M 13 кругами в примере 4.

5. Заключение

В работе разработаны алгоритмы решения задачи об упаковке кругов различного радиуса в компактное множество на плоскости на базе ранее изученных процедур для упаковок конгруэнтных кругов. Их основным элементом является имитация отталкивания центров элементов упаковок от соседних центров и от границы множества. Проведено обоснование корректности работы алгоритмов.

Предложенные алгоритмы реализованы в виде программного комплекса. Многократный запуск вычислительного комплекса при различных начальных условиях, сгенерированных стохастическим методами, обеспечивает радиус кругов упаковки, достаточно близкий к максимально возможному. Проведены оценка качества результатов путем вычисления плотности упаковки и их визуализация.

Дальнейшее развитие исследований в данном направлении может быть связано, с одной стороны, с совершенствованием программно-алгоритмического аппарата, что позволит эффективно решать задачи для множеств более сложной геометрии (включая невыпуклые) и при большем количестве (и большем разнообразии) упаковываемых кругов. С другой стороны, предполагается в рамках предложенного подхода изучить более сложные постановки: увеличить размерность задачи и/или рассматривать различные неевклидовы метрики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Conway J., Sloane N.** Sphere packing. Lattices and groups. N Y: Springer Science and Business Media, 1999. 706 p. doi 10.1007/978-1-4757-2016-7.
3. **Hifi M., M'Hallah R.** A literature review on circle and sphere packing problems: Models and methodologies // Advances Oper. Research. 2009. Vol. 2009. P. 1–22. doi 10.1155/2009/150624.
4. **Казаков А.Л., Лемперт А.А.** Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. С. 50–57.
5. **Kazakov A., Lempert A.** On mathematical models for optimization problem of logistics infrastructure Intern. J. of Artificial Intelligence. 2015. Vol. 13, iss. 1, pp. 200–210.
6. **Казаков А.Л., Лебедев П.Д.** Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости // Вычислит. методы и программирование. Т. 16, вып. 3. 2015. С. 307–317.
7. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Алгоритмы построения оптимальных упаковок в трехмерном евклидовом пространстве // Modern Problems in Math. and its Appl.: Proc. 47th Intern. Youth School-Conf. Yekaterinburg, 2016. CEUR Workshop Proc. Vol. 1662. С. 84–93.
8. **Яськов Г.Н.** Метод решения задачи упаковки разных кругов с выбором перспективных начальных точек // Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил. 2010. №3 (25). С. 119–122.
9. **Lopez C., Beasley J.** A formulation space search heuristic for packing unequal circles in a fixed size circular container // European J. Oper. Research. Vol. 251, no. 1. P. 64–73. doi 10.1016/j.ejor.2015.10.062.
10. **Kubach T., Bortfeldt A., Gehring H.** Parallel greedy algorithms for packing unequal circles into a strip or a rectangle // Central European J. Oper. Research. 2009. Vol. 17, no. 4. P. 461–477. doi 10.1007/s10100-009-0103-5.
11. **Zeng Z., Yu X., Chen M., Liu Yu.** A memetic algorithm to pack unequal circles into a square // Comput. Oper. Research. 2018. Vol. 92. P. 47–55. doi: 10.1016/j.cor.2017.09.013.
12. **Kazakov A.L., Lempert A.A., Le Q.M.** An Algorithm for packing circles of two types in a fixed size container with non-euclidean metric // CEUR Workshop Proc. 2017. Vol. 1975. P. 286–297.
13. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных технологий, 2003. 336 с.
14. **Демьянов В.Ф. Васильев Л.В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
15. **Демьянов В.Ф. Рубинов. А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.

16. **Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.** Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 326 с.
17. **Лейхтвейс К.** Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
18. **Гаркави А.Л.** О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 6. С. 139–145.
19. **Тот Л. Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. 365 с.

Поступила 15.03.2018

Лебедев Павел Дмитриевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: pleb@yandex.ru

Казаков Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
г. Иркутск
e-mail: kazakov@icc.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Conway J., Sloane N. *Sphere Packing. Lattices and Groups.* N Y: Springer Science and Business Media, 1999, 706 p. doi: 10.1007/978-1-4757-2016-7 .
3. Hifi M., M'Hallah R. A literature review on circle and sphere packing problems: Models and methodologies. *Advances Oper. Research*, 2009, vol. 2009, pp. 1–22. doi: 10.1155/2009/150624 .
4. Kazakov A.L., Lempert A.A. An Approach to optimization in transport logistics. Autom. Remote Control., 2011, vol. 72, no. 7, pp. 1398–1404. doi: 10.1134/S0005117911070071 .
5. Kazakov A., Lempert A. On mathematical models for optimization problem of logistics infrastructure. *Intern. J. Artificial Intelligence*, 2015, vol. 13, no. 1, pp. 200–210.
6. Kazakov A.L., Lebedev P.D. Algorithms of optimal packing construction for planar compact sets. *Vychisl. Metody Programm.*, 2015, vol. 16, no. 2, pp. 307–317 (in Russian).
7. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Algorithms of optimal packing construction in a 3-dimensional Euclidian space. *MPMA 2016 – Proc. 47th Intern. Youth School-Conf. "Modern Problems in Mathematics and its Applications", CEUR Workshop Proceedings*, 2016, vol. 1662, pp. 84–93 (in Russian).
8. Yas'kov G.N., Method of decision of task of packing of different circles with choice of perspective initial points, *Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил*, 2010, №3 (25), pp. 119–122 (in Ukrainian). ISSN 2073-7378;
9. Lopez C., Beasley J. A formulation space search heuristic for packing unequal circles in a fixed size circular container. *European J. Oper. Research*, 2016, vol. 251, no. 1, pp. 64–73. doi: 10.1016/j.ejor.2015.10.062 .
10. Kubach T., Bortfeldt A., Gehring H. Parallel greedy algorithms for packing unequal circles into a strip or a rectangle. *Central European J. Oper. Research*, 2009, vol. 17, no. 4, pp. 461–477. doi: 10.1007/s10100-009-0103-5 .
11. Zeng Z., Yu X., Chen M., Liu Yu. A memetic algorithm to pack unequal circles into a square. *Computers Oper. Research*, 2018, vol. 92, pp. 47–55. doi: 10.1016/j.cor.2017.09.013 .
12. Kazakov A.L., Lempert A.A., Le Q.M. An algorithm for packing circles of two types in a fixed size container with Non-Euclidean metric. *CEUR Workshop Proc.*, 2017, vol. 1975, pp. 286–297.
13. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective.* Boston: Birkhäuser, 1995, 312 p. ISBN 978-1-4612-0847-1 . Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka. Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii.* Moscow; Izhevsk: Institut Komp'yuternykh Tekhnologii Publ., 2003, 336 p.

14. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nondifferentiable optimization.* N Y: Springer-Verlag, 1985, 452 p. ISBN: 978-0-387-90951-6 . Original Russian text published in Dem'yanov V.F. Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya.* Moscow: Nauka Publ., 1981, 384 p.
15. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. *Foundations of Nonsmooth Analysis and Quasi-Differential Calculus* (Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferentsial'noe ischislenie). Moscow: Nauka Publ., 1990, 432 p. ISBN: 5-02-014241-7 .
16. Sukharev A.G., Timokhov A.V., and Fedorov V.V. *Kurs metodov optimizatsii* [Course of optimization methods]. Moscow: Nauka Publ., 1986, 326 p. ISBN(2nd ed.): 978-5-9221-0559-0 .
17. Leichtweiss K. *Konvexe Mengen.* Berlin: Springer, 1980, 330 p. ISBN: 978-3-540-09071-7 . Translated to Russian under the title *Vypuklye mnozhestva.* Moscow: Nauka Publ., 1985, 335 p.
18. Garkavi A.L. On the Chebyshev center and convex hull of a set. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 1964, vol. 19, no. 6 (120), pp. 139–145 (in Russian).
19. Töth L.F. *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.* Berlin: Springer, 1953, 197 p. ISBN(2nd ed.): 3540054774 . Translated to Russian under the title *Raspolozheniya na ploskosti, na sfere i v prostranstve.* Moscow: Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., 1958, 365 p.

The paper was received by the Editorial Office on March 15, 2018.

Pavel Dmitrievich Lebedev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: pleb@yandex.ru

Aleksandr Leonidovich Kazakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: kazakov@icc.ru