Том 24 № 2 2018

УДК 517.988.68

К ВОПРОСУ О ГЛОБАЛЬНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЛИНИЙ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

Рассматривается некорректно поставленная задача локализации (определения положения) линий разрыва функции двух переменных. Вне линий разрыва функция двух переменных гладкая, а в каждой точке на линии имеет разрыв первого рода. Для равномерной сетки с шагом τ предполагается, что в каждом узле известны средние значения на квадрате со стороной τ от возмущенной функции. Возмущенная функция приближает точную функцию в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Уровень возмущения δ известен. Для решения рассматриваемой задачи на основе процедур усреднения конструируются и исследуются глобальные дискретные алгоритмы аппроксимации множества линий разрыва множеством точек равномерной сетки. Основным результатом работы является формирование подхода к проблеме глобального изучения алгоритмов локализации. Для этого формулируются условия на точную функцию (класс корректности), проводится теоретическое изучение построенных алгоритмов на данном классе, вводятся характеристики алгоритмов, которые необходимо оценивать (понятие аппроксимации множества линий разрыва множеством точек равномерной сетки), и разрабатываются методы получения оценок. Для достижения поставленной цели используется упрощенная постановка: линии разрыва являются отрезками и предлагаемый алгоритм локализации имеет простейший блок прореживания. Устанавливается, что предложенный алгоритм позволяет получить точность локализации порядка $O(\delta)$. Также приводятся оценки других важных параметров, характеризующих работу алгоритма локализации.

Ключевые слова: некорректная задача, метод регуляризации, линии разрыва, глобальная локализация, дискретизация, порог разделимости.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. On the problem of global localization of discontinuity lines for a function of two variables.

We consider the ill-posed problem of localizing (finding the position of) the discontinuity lines of a function of two variables that is smooth outside the discontinuity lines and has a discontinuity of the first kind at each point of such lines. A uniform square grid with step τ is considered, and it is assumed that the mean values of a perturbed function over squares with side τ are known at each node of the grid. The perturbed function approximates the exact function in the space $L_2(\mathbb{R}^2)$. The perturbation level δ is known. To solve the problem under consideration, we design and study global discrete algorithms that are based on averaging procedures and approximate the discontinuity lines by a set of points of a uniform grid. The main result of the paper is the development of an approach to the problem of the global study of localization algorithms. We formulate conditions for the exact function, thus defining a class of correctness. Within this class, we perform a theoretical study of the proposed algorithms, introduce the characteristics to be estimated, and develop methods for deriving the estimates. To achieve this goal, we use a simplified statement: the discontinuity lines are straight line segments, and the proposed localization algorithm has the simplest thinning block. It is established that the localization error of the algorithm has order $O(\delta)$. Estimates of other important parameters characterizing the localization algorithm are given.

Keywords: ill-posed problems, regularization method, discontinuity lines, global localization, discretization, separability threshold.

MSC: 65J20, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-12-23

Введение

В некоторых прикладных задачах возникает проблема локализации (определения положения) линий, вне которых измеряемая функция f двух переменных гладкая, а в каждой точке линии терпит разрыв первого рода (линии разрыва). Такого рода задачи часто возникают при обработке изображений, где линии разрыва являются границами объектов на изображении. Рассматривается случай, когда вместо точной функции f известна информация о функции f^δ : $\|f^\delta - f\|_{L_2} \le \delta,\ L_2 := L_2(\mathbb{R}^2)$. Легко видеть, что линии разрыва функции f^δ могут не аппроксимировать линии разрыва точной функции f. Следовательно, задача аппроксимации линий разрыва является некорректно поставленной [1–3] и для ее решения необходимо строить регуляризирующие алгоритмы.

Различные алгоритмы, позволяющие локализовать линии разрыва зашумленной функции двух переменных, их численную реализацию и ссылки на литературу можно найти, например, в [4; 5] (см. также [6, гл. 10]). Насколько известно авторам, первые строгие теоретические результаты (оценки точности аппроксимации) по этой тематике были получены в [7; 8] (см. также работу [9], где изучались вопросы дискретизации упомянутых алгоритмов). Однако эти оценки имели локальный характер и были справедливы при дополнительных условиях. Практически для алгоритмов, используемых при решении реальных задач, анализировались только некоторые блоки без полного обоснования. Поэтому вопрос о глобальном исследовании алгоритмов локализации оставался открытым.

В настоящей работе предполагается, что в узлах заданной равномерной сетки известны средние значения на квадрате (ячейке сетки) от возмущенной функции $f^\delta : \|f^\delta - f\|_{L_2} \le \delta$ и уровень возмущения δ. Требуется построить алгоритм, который по этой информации определяет дискретное множество точек, аппроксимирующее в каком-либо смысле множество линий разрыва функции f. Основным результатом работы является формирование подхода к проблеме глобального изучения алгоритмов локализации. Он включает следующие пункты: формулировку условий на точную функцию (класс корректности), для которых проводится теоретическое изучение построенных алгоритмов; введение характеристик алгоритмов, которые необходимо оценивать (понятие аппроксимации); разработку методики получения оценок. Все остальные построения (алгоритм, теорема с оценками и т. п.) показывают работоспособность предложенного подхода. Для достижения поставленной цели авторы сознательно ввели некоторые упрощения: линии разрыва точной функции являются отрезками и рассматриваемый алгоритм локализации имеет простейший блок прореживания (подробнее см. “Заключение”). Эти дополнительные условия упрощают обозначения и сильно облегчают все рассмотрения.

Для решения рассматриваемой задачи в работе на основе процедур усреднения конструируется глобальный алгоритм аппроксимации множества отрезков разрыва множеством точек равномерной сетки. Получены оценки порядка $O(\delta)$ точности локализации и других важных параметров, характеризующих работу предложенного алгоритма.

В первом разделе сформулирована точная постановка задачи. Во втором разделе доказаны предварительные оценки. В третьем разделе приведен метод локализации и получены оценки его параметров. В заключении обсуждаются полученные результаты и направления дальнейших исследований.

1. Постановка задачи и построение вспомогательных функций

Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ в квадрате $\mathfrak{D} = \{(x,y)\colon |x| \le d, |y| \le d\}$, $d > 0$, имеет конечное число l линий разрыва $\{\Gamma_k\}_1^l$ (рис. 1), которые являются отрезками (вместо термина “линия разрыва” далее будем писать “отрезок разрыва”); вне этих отрезков функция $f(x,y)$ гладкая. Предполагаем, что отрезки $\{\Gamma_k\}_1^l$ образуют замкнутые контуры[1]; у контуров могут быть общие границы. Отрезки, имеющие общие концы, назовем смежными. Пусть отрезки Γ_k, Γ_j смежные, через $\gamma_{k,j}$ обозначим наименьший угол между направляющими этих отрезков. Обозначим $\Gamma = \cup_{k=1}^l \Gamma_k$, $|\Gamma_k|$ — длина отрезка Γ_k.

Можно считать, что отрезки $\{\Gamma_k\}_1^l$ заданы параметрически: $x_k(t) = a_{x,k}t + b_{x,k}$, $y_k(t) = a_{y,k}t + b_{y,k}$, $0 \le t \le |\Gamma_k|$, $a_{x,k}$, $b_{x,k}$, $a_{y,k}$, $b_{y,k} \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \cdots, l$. Предполагается, что на каждом отрезке функция f испытывает скачок первого рода: для $(x,y) \in \Gamma_k$, $k = 1, 2, \cdots, l$, $(x = x_k(t), y = y_k(t))$ существуют конечные пределы функции $f(x \pm 0, y)$, $f(x, y \pm 0)$. Тогда назовем

[1]Условие замкнутости контуров в доказательствах не используется. Это условие гарантирует существование функции f, удовлетворяющей всем условиям.

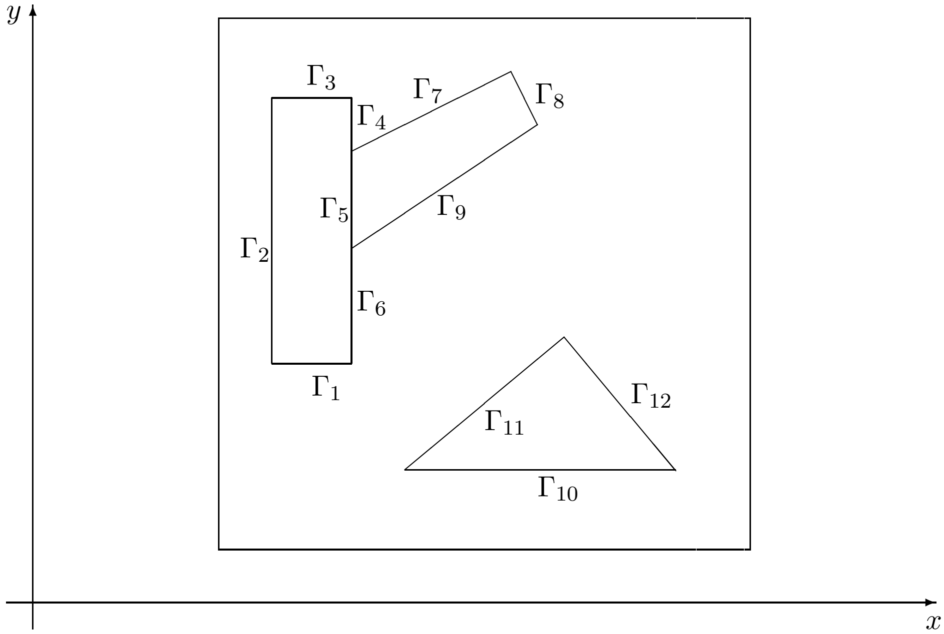

Рис. 1. Локализация отрезков разрыва функции двух переменных: Γ_k — отрезки разрыва функции f.

функцию[2] $\Delta_k(t) = f(x+0,y) - f(x-0,y) = f(x,y+0) - f(x,y-0)$ скачком функции f на отрезке Γ_k для $0 < t < |\Gamma_k|$ (т. е. без конечных точек).

Рассмотрим условия гладкости для функции $f(x,y)$ вне отрезков Γ. Введем линейное множество $MV(\mathbb{R})$ функций $g(s)$ одной переменной с конечным числом разрывов первого рода: на любом отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва, функция g абсолютно непрерывна; функция g ограничена на $\mathbb{R}$; функция g' почти всюду ограничена на $\mathbb{R}$.

Для простоты будем рассматривать множество функций f, которые вне области $\mathfrak{D}$ равны нулю и при этом не имеют скачка на границе области $\mathfrak{D}$. Это условие не принципиальное и может быть снято. Определим линейное множество $MV(\mathbb{R}^2)$, состоящее из функций двух переменных, для которых в области $\mathfrak{D}$ выполнены следующие условия: для почти всех y функция $f(\cdot,y)$ принадлежит множеству $MV(\mathbb{R})$, для почти всех x функция $f(x,\cdot)$ принадлежит множеству $MV(\mathbb{R})$.

Введем класс функций $\mathfrak{M}$, на котором будет проводиться исследование алгоритмов локализации. Класс $\mathfrak{M}$ состоит из функций $f \in MV(\mathbb{R}^2)$, которые дополнительно удовлетворяют следующим условиям[3]:

(i) для всех $(x,y) \in \mathfrak{D}$ имеем $|f(x,y)| \le r$; для $(x,y) \notin \Gamma_k$ почти всюду выполнены неравенства $|f'_x(x,y)| \le r$, $|f'_y(x,y)| \le r$; для $(x,y) \in \Gamma_k$ $|f'_x(x \pm 0,y)| \le r$, $|f'_y(x,y \pm 0)| \le r$ (без ограничения общности можно считать, что $r = 1$);

(ii) заданы положительные числа L, $\Delta^{\min}$:

$$0 < l \le L, \quad \min_{k,t} |\Delta_k(t)| \ge \Delta^{\min};$$

(iii) заданы положительные числа $\gamma^{\min} \le \pi$ и $S^{\min}$:

$$\min\{\gamma_{k,j} \colon \Gamma_k, \Gamma_j \text{ — смежные}\} \ge \gamma^{\min}, \quad \min_k |\Gamma_k| \ge S^{\min}$$

[2]По одному из направлений скачка может не быть, если отрезок параллелен одной из осей координат.

[3]В работах [7; 8] определение множества $MV(\mathbb{R}^2)$ включает дополнительные условия, которые в настоящей работе перенесены в определение множества $\mathfrak{M}$.

($\gamma^{\min}$ — наименьший возможный угол между направляющими смежных отрезков, $S^{\min}$ — наименьшая возможная длина отрезка).

Заметим, что из условия $f \in MV(\mathbb{R}^2)$ следует непрерывность функции скачка $\Delta_k(t)$ для $0 < t < |\Gamma_k|$, $k = 1, 2, \cdots, l$.

Введем в квадрате $\mathfrak{D}$ равномерную сетку $T = \{(x^n, y^m)\}$ с шагом τ ($\tau \ll d$), т. е. $x^n = -d + (n - 1/2)\tau$, $y^m = -d + (m - 1/2)\tau$, где $n = 1, 2, \ldots, M$, $m = 1, 2, \ldots, M$, $M = 2d/\tau$. (Без ограничения общности будем считать, что M — целое число, поскольку всегда можно подходящим образом увеличить d.)

Постановка задачи. Пусть функция $f \in \mathfrak{M}$, функция f^δ такова, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \le \delta$. По уровню погрешности δ и значениям $f^\delta_{n,m}$ в точках равномерной сетки $T = \{(x^n, y^m)\}$ с заданным шагом τ, которые связаны с функцией f^δ следующим образом:

$$f^\delta_{n,m} = \frac{1}{\tau^2} \int\limits_{y^m-\tau/2}^{y^m+\tau/2} \int\limits_{x^n-\tau/2}^{x^n+\tau/2} f^\delta(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

требуется аппроксимировать множество Γ подмножеством точек сетки T с оценкой точности приближения.

Для построения регулярных методов локализации с целью подавления шума используется идея усреднения возмущенных значений $f^\delta_{n,m}$. Сначала введем и исследуем вспомогательные функции (две непрерывные функции и две их дискретизации).

Для проведения усреднения по каждой переменной определим два класса непрерывных усредняющих функций одной переменной. В качестве одного класса выберем множество ΦF, состоящее из финитных функций $\phi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

(a) ϕ дважды непрерывно дифференцируема и C_1 — положительная константа такая, что $|\phi''(t)| \le C_1$;

(b) существуют $0 < b < 1$, $0 < a \le 1$ такие, что $a \le \phi(t) \le 1$ для $t \in [-b, b]$;

(c) $\phi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$.

Второе множество усредняющих функций Ψ также состоит из финитных функций $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

(a') ψ непрерывно дифференцируема и C_2 — положительная константа такая, что $|\psi'(t)| \le C_2$;

(b') $\displaystyle\int_{-1}^{1} \psi(t) dt = 1$;

(c') $\psi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$; $\psi(t) \ge 0$ для $t \in [-1, 1]$.

Ясно, что для $\phi \in \Phi F$ имеем $|\phi'(t)| \le C_1$ и $\phi \in W^1_1(\mathbb{R})$ (здесь $W^1_1(\mathbb{R})$ — соболевское пространство функций), а для $\psi \in \Psi$ имеем $\psi(t) \le C_2$. Через $\|\cdot\|_{L_1}$ будем обозначать $\|\cdot\|_{L_1(\mathbb{R})}$. Положим

$$\phi_{\lambda_1}(t) = \phi\left(\frac{t}{\lambda_1}\right), \quad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2}\psi\left(\frac{t}{\lambda_2}\right), \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Для упрощения записи вместо $(\phi_{\lambda_1}(t))'_t|_{t=u}$ будем писать $\phi'_{\lambda_1}(u)$.

Дискретные значения усредняющей функции для функции двух переменных будем вычислять по формуле $\Lambda^{ij}_{\lambda_1\lambda_2} = \phi'_{\lambda_1}(i\tau)\psi_{\lambda_2}(j\tau)\tau^2$, где $-n_1 \le i \le n_1$, $-n_2 \le j \le n_2$. Параметры n_1, n_2 будут определены ниже как функции уровня погрешности δ и шага сетки τ. Вспомогательные дискретные функции G^δ_x, G^δ_y вычисляются в точках (x^n, y^m) сетки T по формулам

$$G^\delta_x(x^n, y^m) = G^{\delta, n_1 n_2}_{x, \lambda_1\lambda_2}(x^n, y^m) = \sum_{j=-n_2}^{n_2} \sum_{i=-n_1}^{n_1} \Lambda^{ij}_{\lambda_1\lambda_2} f^\delta_{n+i, m+j},$$

$$G^\delta_y(x^n,y^m)=G^{\delta,n_1n_2}_{y,\lambda_1\lambda_2}(x^n,y^m)=\sum_{i=-n_2}^{n_2}\sum_{j=-n_1}^{n_1}\Lambda^{ij}_{\lambda_1\lambda_2}\,f^\delta_{n+i,m+j}.$$

Обозначим вспомогательные функции непрерывного аргумента при отсутствии возмущений через

$$F_x(x,y)=F_{x,\lambda_1\lambda_2}(x,y)=\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1}f(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\xi d\eta,\quad (x,y)\in\mathfrak{D},\tag{1.1}$$

$$F_y(x,y)=F_{y,\lambda_1\lambda_2}(x,y)=\int\limits_{x-\lambda_2}^{x+\lambda_2}\int\limits_{y-\lambda_1}^{y+\lambda_1}f(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(y-\eta)\psi_{\lambda_2}(x-\xi)d\eta d\xi,\quad (x,y)\in\mathfrak{D}.\tag{1.2}$$

Поясним смысл этих функций и используемые обозначения. Первая функция $F_x(x,y)$ есть усреднение точной функции f по переменной y с помощью $\psi_{\lambda_2}(y)$ и по переменной x с помощью $\phi'_{\lambda_1}(x)$. Дискретизация этой функции, когда вместо точной функции используется приближенная функция f^δ, обозначается через $G^\delta_x(x^n,y^m)$. Функции $F_y(x,y)$ и $G^\delta_y(x^n,y^m)$ получаются, если переменные x и y поменять местами.

Лемма 1. *Пусть зафиксированы функции $\phi\in\Phi F$ и $\psi\in\Psi$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи при*

$$\lambda_1=\frac{2n_1+1}{2}\tau,\quad \lambda_2=\frac{2n_2+1}{2}\tau$$

для $(x^n,y^m)\in T$ справедливы следующие оценки:

$$\left|G^\delta_x(x^n,y^m)-F_x(x^n,y^m)\right|\le\frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}}+A_0\tau\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right),$$

$$\left|G^\delta_y(x^n,y^m)-F_y(x^n,y^m)\right|\le\frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}}+A_0\tau\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right),\quad A_0=4C_1C_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 1 [9].

2. Вспомогательные оценки

Пусть U, V — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Введем стандартную метрику в $\mathbb{R}^2$

$$\rho(U;V)=\inf\left\{\sqrt{(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2}\colon (x_1,y_1)\in U,(x_2,y_2)\in V\right\}$$

— расстояние между множествами U, V. В следующей лемме приведены оценки сверху для функций F_x, F_y, определенных формулами (1.1), (1.2), вне окрестности отрезков разрыва. Ниже параметры будут выбраны таким образом, что $0<\lambda_2\le\lambda_1$.

Лемма 2. *Пусть зафиксированы функции $\phi\in\Phi F$ и $\psi\in\Psi$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для $(x,y)\in\mathfrak{D}$ при выполнении условия $\rho((x,y);\Gamma)\ge\sqrt{2}\lambda_1$ имеют место оценки*

$$|F_x(x,y)|\le A_1\lambda_1,\quad |F_y(x,y)|\le A_1\lambda_1,\quad A_1=\|\phi\|_{L_1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 2 [9].

Для $\varepsilon>0$ введем Γ^ε_k — подмножество Γ_k для $\varepsilon\le t\le|\Gamma_k|-\varepsilon$, $k=1,2,\cdots,l$. Ясно что при достаточно малом ε множество Γ^ε_k будет не пусто. Величина ε будет введена ниже как функция уровня погрешности δ, причем функция $\varepsilon(\delta)$ стремится к нулю при δ, стремящемся к нулю (следовательно, звенья ломаной Γ_k^ε будут не пусты при достаточно малом δ). Обозначим $\Gamma^\varepsilon = \cup_{k=1}^{l}\Gamma_k^\varepsilon$.

Перейдем от двойного интеграла в правой части (1.1) к повторному

$$F_x(x,y) = \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2} \Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi \Bigg) \psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta. \tag{2.1}$$

Для внутреннего интеграла в выражении (2.1) при некоторых условиях может быть применена лемма 1 работы [8]. Для удобства читателя приведем соответствующее соотношение.

Положим $\beta = 3\sqrt{2}\lambda_1,\ \varepsilon = p\beta$, где

$$p = \begin{cases} 1/\sin\gamma^{\min}, & 0 < \gamma^{\min} < \pi/2, \\ 1, & \pi/2 \le \gamma^{\min} < \pi; \end{cases}$$

здесь $\gamma^{\min}$ — константа из условия (iii) на функцию f. Напомним, что $a_{x,k}, b_{x,k}, a_{y,k}, b_{y,k}$ — коэффициенты в параметрическом задании отрезка Γ_k. Пусть $(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma_k^\varepsilon$ и $a_{y,k} \ne 0$. Рассмотрим внутренний интеграл в выражении (2.1) для точек $(x,\eta) \in \mathfrak{D}\colon |x-\bar{x}| \le b\lambda_1,\ b_{y,k}-\varepsilon \le \eta \le a_{y,k}|\Gamma_k| + b_{y,k} - \varepsilon$. Поскольку при выполнении условия разделимости $\min\limits_{k\ne j}\rho(\Gamma_k^\varepsilon;\Gamma_j^\varepsilon) \ge \beta$ в пределах интегрирования находится только одна линия разрыва Γ_k, то имеет место разложение [8, лемма 1]

$$\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi = \Delta_k(t(\eta))\phi_{\lambda_1}(x - x_k(t(\eta))) + \int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f'_\xi(\xi,\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi, \tag{2.2}$$

где $t(\eta) = (\eta - b_{y,k})/a_{y,k}$, Δ_k, x_k — скачок на линии разрыва Γ_k и положение этого скачка соответственно.

В случае, когда $a_{x,k} \ne 0$, аналогичное разложение можно выписать для внутреннего интеграла при переходе от двойного интеграла (1.2) к повторному.

В следующей лемме получены оценки снизу для функций F_x, F_y, определенных формулами (1.1), (1.2), в окрестности Γ^ε. Напомним, что величины a, b, C_1 введены в условиях (a), (b) на функцию ϕ, величина $\Delta^{\min}$ — в условии (ii) на функцию f, τ — шаг сетки T. Нам также понадобятся константы $A_1 = \|\phi\|_{L_1},\ A_2 = 2\max\{C_1, 1\}$.

Лемма 3. *Пусть зафиксированы функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для $\tau \le b\lambda_1$ при выполнении условия разделимости $\min\limits_{1\le k,j\le l,\ k\ne j}\rho(\Gamma_k^\varepsilon;\Gamma_j^\varepsilon) \ge \beta$ имеют место оценки:*

(1) *если $|a_{x,k}/a_{y,k}| \le 1$, то для точек $(x,y) \in \mathfrak{D}\colon \rho((x,y);\Gamma_k^\varepsilon) \le \tau$,*

$$|F_x(x,y)| \ge a\Delta^{\min} - A_1\lambda_1 - A_2\frac{\lambda_2+\tau}{\lambda_1};$$

(2) *если $|a_{y,k}/a_{x,k}| \le 1$, то для точек $(x,y) \in \mathfrak{D}\colon \rho((x,y);\Gamma_k^\varepsilon) \le \tau$,*

$$|F_y(x,y)| \ge a\Delta^{\min} - A_1\lambda_1 - A_2\frac{\lambda_2+\tau}{\lambda_1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем справедливость оценки в п. (1) леммы (оценка в п. (2) получена аналогично). Благодаря выбору $\varepsilon = p\beta$ расстояние между отрезками Γ_k^ε, Γ_j^ε, в случае, когда отрезки Γ_k, Γ_j являются смежными, будет не меньше β (равенство будет достигаться, когда угол между смежными отрезками Γ_k^ε, Γ_j^ε равен $\gamma^{\min}$). Поскольку $\beta = 3\sqrt{2}\lambda_1$, то условие

$$\min_{1\le k,j\le l,\ k\ne j}\rho(\Gamma_k^\varepsilon;\Gamma_j^\varepsilon) \ge \beta$$

гарантирует, что в окружности с центром в точке $(x,y)\colon \rho((x,y);\Gamma_k^\varepsilon)\le\tau$, радиусом $\sqrt{2}\lambda_1$ функция f имеет разрывы только на линии Γ_k (напомним, что $0<\lambda_2\le\lambda_1$). Следовательно, при вычислении функции F_x в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k. Применяя для внутреннего интеграла (2.1) разложение (2.2), имеем равенство

$$F_x(x,y)=\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta$$

$$=\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_k(t(\eta))\phi_{\lambda_1}(x-x_k(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta+\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f'_\xi(\xi,\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta, \quad (2.3)$$

где $t(\eta)=(\eta-b_{y,k})/a_{y,k}$.

Второе слагаемое было рассмотрено в лемме 2.

$$\Bigg|\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Bigg(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f'_\xi(\xi,\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\Bigg)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\Bigg|\le A_1\lambda_1.$$

Используя формулу Лагранжа, первое слагаемое в правой части (2.3) можно представить в виде

$$\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_k(t(\eta))\phi_{\lambda_1}(x-x_k(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta=\phi_{\lambda_1}(x-\bar{x})\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_k(t(\eta))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta$$

$$+\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_k(t(\eta))\phi'_{\lambda_1}(\theta)\cdot(\bar{x}-x_k(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta, \quad (2.4)$$

где $\theta\in(x-\bar{x},x-x_k(t(\eta)))$. Поскольку функция $\Delta_k(t(\eta))$ непрерывна, то она сохраняет знак для всех η. Так как $|x-\bar{x}|\le\tau\le b\lambda_1$, то в силу условия (b) на функцию ϕ и условий (b$'$), (c$'$) на функцию ψ для первого слагаемого в правой части (2.4) имеем оценку снизу

$$\Bigg|\phi_{\lambda_1}(x-\bar{x})\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_k(t(\eta))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\Bigg|\ge a\Delta^{\min}.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.4). Учитывая условие (i) на функцию f, имеем $|\Delta_k(t(\eta))|\ge 2$. Поскольку $\bar{x}=x_k(t(\bar{y}))$, где $t(\bar{y})=(\bar{y}-b_{y,k})/a_{y,k}$, то $|\bar{x}-x_k(t(\eta))|\le|(\bar{y}-\eta)a_{x,k}/a_{y,k}|\le(\lambda_2+\tau)|a_{x,k}/a_{y,k}|$. Так как $\phi\in\Phi F$, и $\psi\in\Psi$, то для второго слагаемого в правой части (2.4) имеем

$$\Bigg|\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_k(t(\eta))\phi'_{\lambda_1}(\theta)\cdot(\bar{x}-x_k(t(\eta)))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\Bigg|\le\frac{2C_1(\lambda_2+\tau)}{\lambda_1}\left|\frac{a_{x,k}}{a_{y,k}}\right|.$$

Таким образом, получаем требуемую оценку. Лемма 3 доказана.

Напомним, что величины a, b, C_1 введены в условиях (a), (b) на функцию ϕ, величина C_2 — в условии (a$'$) на функцию ψ, величина $\Delta^{\min}$ — в условии (ii) на функцию f; $A_0=4C_1C_2$, $A_1=\|\phi\|_{L_1}$, $A_2=2\max\{C_1,1\}$. Введем константы

$$P=\frac{a\Delta^{\min}}{2},\quad D_1=\frac{4A_0}{P}\Big(\frac{18A_2}{P}\Big)^{1/2},\quad D_2=\frac{4A_0}{P}\Big(\frac{P}{18A_2}\Big)^{1/2},$$

$$B_0=\min\Big\{bD_1,\ D_2,\ \frac{P}{6A_0}\Big(\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}\Big)^{-1}\Big\},\quad \delta_0=\frac{P}{8A_1D_1}.$$

Обозначим $\lceil z\rceil=[z]+1$, где $[z]$ — целая часть числа z. Положим

$$n_1=n_1(\tau,\delta)=\Big\lceil\frac{D_1\delta}{\tau}-\frac{1}{2}\Big\rceil,\quad n_2=n_2(\tau,\delta)=\Big\lceil\frac{D_2\delta}{\tau}-\frac{1}{2}\Big\rceil. \tag{2.5}$$

Напомним, что (см. формулировку леммы 1)

$$\lambda_1=\frac{2n_1+1}{2}\tau,\quad \lambda_2=\frac{2n_2+1}{2}\tau. \tag{2.6}$$

Поскольку $D_1>D_2$, то $\lambda_1\geq\lambda_2$.

Ниже нам понадобятся следующие очевидные оценки, которые сформулируем в виде отдельного утверждения.

Утверждение. *Если шаг τ заданной равномерной сетки $T=\{(x^n,y^m)\}$ удовлетворяет условию $\tau\leq\tau_0(\delta)=B_0\delta$, то $\tau\leq b\lambda_1$ и для λ_1, λ_2 выполнены следующие оценки сверху и снизу:*

$$D_1\delta\leq\lambda_1\leq D_1\delta+\tau\leq(1+b)D_1\delta\leq 2D_1\delta,$$

$$D_2\delta\leq\lambda_2\leq D_2\delta+\tau\leq 2D_2\delta.$$

В точках сетки $T=\{(x^n,y^m)\}$ определим функцию

$$H^\delta(x^n,y^m)=\max\{|G_x^\delta(x^n,y^m)|,|G_y^\delta(x^n,y^m)|\}. \tag{2.7}$$

Лемма 4. *Пусть зафиксированы функции $\phi\in\Phi F$ и $\psi\in\Psi$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta\leq\delta_0$, $\tau\leq\tau_0(\delta)$ при связи параметров* (2.5), (2.6) *и при выполнении условия разделимости $\min\limits_{1\leq k,j\leq l,\,k\neq j}\rho(\Gamma_k^\varepsilon;\Gamma_j^\varepsilon)\geq\beta$ для значения функции H^δ в точке $(x^n,y^m)\in T$ имеют место оценки*

(1) *$H^\delta(x^n,y^m)<P$, если $\rho((x^n,y^m);\Gamma)>\sqrt{2}\lambda_1$;*

(2) *$H^\delta(x^n,y^m)>P$, если $\rho((x^n,y^m);\Gamma^\varepsilon)\leq\tau$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Для точек сетки (x^n,y^m) таких, что $\rho((x^n,y^m);\Gamma)>\sqrt{2}\lambda_1$, используя оценки лемм 1 и 2, получаем

$$|G_x^\delta(x^n,y^m)|\leq\frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}}+A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\Big)+A_1\lambda_1.$$

При данном выборе параметров, используя оценки из утверждения перед формулировкой леммы, имеем неравенство $A_0\delta/(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}\leq P/4$; используя дополнительно условие на τ, получаем $A_0\tau(1/\lambda_1+1/\lambda_2)\leq P/6$; учитывая, что $\delta\leq\delta_0$, имеем $A_1\lambda_1\leq P/4$. Следовательно, для (x^n,y^m): $\rho((x^n,y^m);\Gamma)>\sqrt{2}\lambda_1$,

$$|G_x^\delta(x^n,y^m)|\leq\frac{2}{3}P<P.$$

Аналогичная оценка имеет место для функции G_y^δ в точках сетки (x^n,y^m): $\rho((x^n,y^m);\Gamma)>\sqrt{2}\lambda_1$. Следовательно, для (x^n,y^m): $\rho((x^n,y^m);\Gamma)>\sqrt{2}\lambda_1$

$$H^\delta(x^n,y^m)<P.$$

(2) Пусть Γ_k: $|a_{x,k}/a_{y,k}|\leq 1$. Для точек (x^n,y^m): $\rho((x^n,y^m);\Gamma^\varepsilon)\leq\tau$, используя оценки лемм 1 и 3, получаем

$$|G_x^\delta(x^n,y^m)|\geq a\Delta^{\min}-\frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}}-A_0\tau\Big(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\Big)-A_1\lambda_1-\frac{A_2(\lambda_2+\tau)}{\lambda_1}.$$

При данном выборе параметров, используя оценки из утверждения, получаем $A_2(\lambda_2+\tau)/\lambda_1 \le P/6$. Следовательно, учитывая оценки из доказательства п. (1), имеем

$$|G_x^\delta(x^n,y^m)| \ge a\Delta^{\min} - \frac{5}{6}P = \frac{7}{6}P > P.$$

Аналогичная оценка имеет место для функции G_y^δ в точках сетки $(x^n,y^m)\colon \rho((x^n,y^m);\Gamma^\varepsilon) \le \tau$ при $\Gamma_k\colon |a_{y,k}/a_{x,k}| \le 1$.

Поскольку для отрезка Γ_k имеем $|a_{x,k}/a_{y,k}| \le 1$ и/или $|a_{y,k}/a_{x,k}| \le 1$, то $H^\delta(x^n,y^m) > P$ для точек $(x^n,y^m)\colon \rho((x^n,y^m);\Gamma^\varepsilon) \le \tau$. Лемма 4 доказана.

3. Исследование алгоритма локализации линий разрыва

Для формулировки основных результатов зафиксируем функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$ (до конца статьи) и положим $n_1 = n_1(\tau,\delta)$, $n_2 = n_2(\tau,\delta)$, $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\delta)$ в соответствии с формулами (2.5), (2.6). Напомним, что функция H^δ определена в (2.7). Изложенный ниже метод локализации определяет множество Q^δ точек сетки, аппроксимирующих отрезки Г. Алгоритм однозначно не определен. Чтобы выбрать конкретный алгоритм, нужно определить правило перебора точек сетки. Обозначим через $N = N(Q^\delta)$ количество точек множества Q^δ. Договоримся, если $Q^\delta = \varnothing$, считать $\rho((x^n,y^m);Q^\delta) = \infty$ для любой точки (x^n,y^m) сетки T. Приведенный ниже алгоритм локализации в своей работе использует параметры n_1, n_2 и величину порога $P = a\Delta^{\min}/2$.

А л г о р и т м $\Pi D(\delta, f_{n,m}^\delta)$

Подготовка к циклу. Положим $N = 0$; $Q^\delta = \varnothing$.

Цикл перебора точек (x^n,y^m) *сетки* T. Если в процессе перебора не рассмотренных точек сетки T не осталось, то конец цикла. Пусть (x^n,y^m) — текущая точка. Если $H^\delta(x^n,y^m) > P$ и $\rho((x^n,y^m);Q^\delta) > 4\sqrt{2}\lambda_1$, то $N := N+1$; $Q^\delta := Q^\delta \cup (x^n,y^m)$ и продолжаем цикл;
иначе — продолжаем цикл.

Пусть U, V — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Введем меру близости множества U к множеству V :

$$\mu(U;V) = \sup_{(x_1,y_1)\in U} \inf_{(x_2,y_2)\in V} \sqrt{(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2}.$$

Напомним, что $\beta = 3\sqrt{2}\lambda_1$, $\varepsilon = p\beta$. Введем константы и функцию

$$D = \sqrt{2}D_1, \quad \bar\delta_0 = \min\big\{\delta_0,\ \frac{S^{\min}}{6p(4+5b)D}\big\}, \quad h(\delta) = 6D\delta.$$

Заметим, что $h(\delta) \ge \beta$.

Теорема. *В условиях рассматриваемой задачи для всех* $\delta \le \bar\delta_0$, $\tau \le \tau_0(\delta)$ *при связи параметров* (2.5), (2.6) *и выполнении условия разделимости* $\min\limits_{1\le k,j\le l,\, k\ne j} \rho(\Gamma_k^\varepsilon;\Gamma_j^\varepsilon) \ge h(\delta)$ *алгоритм* $\Pi D(\delta, f_{n,m}^\delta)$ *построит множество точек* Q^δ *такое, что:*

(1) $\mu(Q^\delta;\Gamma) \le 2D\delta$;

(2) $\mu(\Gamma;Q^\delta) \le (4+5b+6p)D\delta$;

(3) *для всех различных точек* $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in Q^\delta$ *справедливо неравенство*

$$\rho((x_1,y_1);(x_2,y_2)) > 4D\delta;$$

(4) *множество* $Q^\delta \ne \varnothing$ *и справедливы оценки*

$$\frac{1}{2(4+5b)}\frac{|\Gamma|}{D}\frac{1}{\delta} - \frac{3pL}{2} \le N(Q^\delta) \le \frac{|\Gamma|}{2D}\frac{1}{\delta}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Заметим, что условие разделимости в теореме гарантирует выполнение условия разделимости в леммах за счет выбора функции $h(\delta)$. Из оценки в п. (1) леммы 4 следует, что $\mu(Q^\delta;\Gamma) \le \sqrt{2}\lambda_1$. Используя оценку сверху для λ_1 из утверждения, получаем требуемое неравенство.

(2) Очевидно, что все Γ^ε можно покрыть окружностями с центром в точках из множества Q^δ диаметром $2\sqrt{2}(4\lambda_1+\tau)$. Если это не так, то согласно п. (2) леммы 4, обязательно найдется точка сетки T, не принадлежащая множеству Q^δ, в которой функция H^δ больше порога P. Этого не может быть, поскольку в ходе работы алгоритма ΠD перебираются все точки сетки T.

Следовательно, $\mu(\Gamma^\varepsilon;Q^\delta) \le \sqrt{2}(4\lambda_1+\tau)$. Значит, $\mu(\Gamma;Q^\delta) \le \sqrt{2}(4\lambda_1+\tau)+\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon = p\beta \le 6pD\delta$, то, учитывая условия на параметры, получаем требуемую оценку.

(3) Пусть $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in Q^\delta$. По построению множества Q^δ в алгоритме ΠD справедливо неравенство $\rho((x_1,y_1);(x_2,y_2)) > 4\sqrt{2}\lambda_1$. Учитывая условия на параметры, получаем требуемую оценку.

(4) Согласно оценке в п. (1) леммы 4 окружность с центром в точке из множества Q^δ радиусом $\sqrt{2}\lambda_1$ обязательно содержит точку из Γ. Пусть $(x^n,y^m) \in Q^\delta$, тогда существует $(x,y) \in \Gamma\colon \rho((x^n,y^m);(x,y)) \le \sqrt{2}\lambda_1$. Аналогично для $(x^{\bar n},y^{\bar m}) \in Q^\delta$ существует $(\bar x,\bar y) \in \Gamma\colon \rho((x^{\bar n},y^{\bar m});(\bar x,\bar y)) \le \sqrt{2}\lambda_1$. Ясно, что $\rho((x,y);(\bar x,\bar y)) \ge \rho((x^{\bar n},y^{\bar m});(x^n,y^m)) - 2\sqrt{2}\lambda_1$. Используя оценку для первого слагаемого из доказательства п. (3) теоремы, имеем $\rho((x,y);(\bar x,\bar y)) \ge 2\sqrt{2}\lambda_1$. Следовательно, справедлива оценка сверху

$$N(Q^\delta) \le \frac{|\Gamma|}{2\sqrt{2}\lambda_1} \le \frac{|\Gamma|}{2\sqrt{2}D_1\delta}.$$

Получим оценку снизу. В доказательстве п. (2) показано, что все Γ^ε можно покрыть окружностями с центром в точках из множества Q^δ диаметром $2\sqrt{2}(4\lambda_1+\tau)$. Количество таких окружностей на Γ^ε_k должно быть не меньше

$$\frac{|\Gamma^\varepsilon_k|}{2\sqrt{2}(4\lambda_1+\tau)} \ge \frac{|\Gamma|-2\varepsilon}{2\sqrt{2}(4\lambda_1+\tau)}.$$

Так как $\varepsilon = p\beta \le 6pD\delta$, то, используя условия на параметры, получаем оценку

$$\frac{|\Gamma^\varepsilon_k|}{2\sqrt{2}(4\lambda_1+\tau)} \ge \frac{|\Gamma_k|}{2(4+5b)D\delta} - \frac{3p}{2}.$$

Следовательно,

$$N(Q^\delta) \ge l\Big(\frac{|\Gamma_k|}{2(4+5b)D\delta} - \frac{3p}{2}\Big) \ge \frac{|\Gamma|}{2(4+5b)D\delta} - \frac{3pL}{2}.$$

Получили требуемую оценку. Выбор $\bar\delta_0$ гарантирует, что множество $Q^\delta \ne \varnothing$. Теорема доказана.

4. Заключение

Напомним, что основным результатом настоящей работы является формирование подхода к проблеме глобального изучения алгоритмов локализации, включающего следующие пункты: формулировку условий на точную функцию (класс корректности), для которых проводится теоретическое изучение построенных алгоритмов, введение характеристик алгоритмов, которые необходимо оценивать (понятие аппроксимации) и разработку методики получения оценок. Все остальные построения должны иллюстрировать работоспособность предложенного подхода.

В этом разделе сначала обсуждается наиболее неясный вопрос: какие характеристики глобальных алгоритмов нужно оценивать? Затем анонсируются возможные обобщения полученных результатов, которые будут предметом дальнейших исследований. Для удобства чтения обсуждение разбивается на подпункты.

1. Сначала прокомментируем наличие в алгоритме ΠD условия $\rho((x^n, y^m); Q^\delta) > 4\sqrt{2}\lambda_1$, наличие которого значительно уменьшает количество точек в аппроксимирующем множестве Q^δ. Назовем это условие *прореживанием.* Если убрать прореживание, то может случиться, что число $N(Q^\delta)$ точек множества Q^δ будет порядка $2|\Gamma|\lambda_1(\delta)\tau$. Это значит, что, например, для фиксированного δ при уменьшении шага сетки в десять раз число $N(Q^\delta)$ также увеличивается в десять раз. При этом поскольку δ фиксировано, то точность локализации практически не изменяется. То есть одну точку Γ может аппроксимировать избыточное количество точек множества Q^δ, большая часть которых не добавляет новой информации. С другой стороны, для дальнейшего использования желательно, чтобы число $N(Q^\delta)$ было поменьше при сохранении (или незначительном уменьшении) точности аппроксимации Γ.

Ввиду вышесказанного в теореме введены пп. (3) и (4), чтобы характеризовать "избыточность" количества точек множества Q^δ для аппроксимации Γ. Ясно, что для аппроксимации Γ с точностью $D\delta$ и без потери информации необходимо не менее $|\Gamma|/(2D\delta)$ точек (наименьшее количество окружностей радиуса $D\delta$, покрывающих Γ), т. е. $O(1/\delta)$ точек. Отметим, что полученные в теореме оценки показывают, что предложенный в настоящей работе алгоритм дает тот же порядок $O(1/\delta)$ количества точек.

2. Отметим, что оценка в п. (2) теоремы в несколько раз хуже, чем оценка в п. (1). При этом если не накладывать дополнительных условий на Γ, то для точек $\Gamma \setminus \Gamma^\varepsilon$ трудно надеяться, что оценка в п. (2) может быть лучше ε, так как для любого метода локализации без привлечения дополнительной априорной информации нельзя гарантировать наличие точек из Q^δ, которые хорошо аппроксимируют угловые точки. Однако, по-видимому, можно получить оценку для величины $\mu(\Gamma^\varepsilon; Q^\delta)$ существенно лучше оценки для $\mu(\Gamma; Q^\delta)$ в п. (2) теоремы. Одновременно можно показать, что большинство точек Q^δ аппроксимируют множество Γ^ε. Причина, по которой это авторам не удалось, заключается в использовании слишком грубой процедуры прореживания. Заметим, что в практических алгоритмах (например, см. метод Кэнни в гл. 10 [6]) обычно применяются более сложные, но необоснованные алгоритмы прореживания, связанные с оценкой нормали к кривым. Исследование алгоритмов такого рода планируется провести в дальнейшем.

3. Кроме глобального исследования новых методов локализации возможно ослабление условий на точную функцию f, т. е. расширение класса, на котором производится исследование метода. Анализ доказательств показывает, что разработанная в настоящей работе методика допускает такое ослабление в двух направлениях. Во-первых, возможно вместо отрезков рассматривать линии разрыва с условием на их кривизну. Во-вторых, возможно вместо констант в условии (iii) $\gamma^{\min} \leq \pi$ и $S^{\min} > 0$ рассматривать функции от δ, т. е., например, ввести условие на минимальную длину линии $|\Gamma_k| \geq S^{\min} > 0$ аналогично введению порога разделимости $h = h(\delta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
2. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. **Vasin V. V., Ageev A. L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 c.
4. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
5. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
6. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений. (Изд. 3-е исправл. и допол.). М.: Техносфера, 2012. 1104 с.
7. **Антонова Т.В.** Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.
8. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1(49). С. 3–13.

9. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Дискретный алгоритм локализации линий разрыва функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 4(72). С. 3–12. doi: 10.17377/sibjim.2017.20.401 .

Поступила 22.12.2017

Агеев Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Антонова Татьяна Владимировна
д-р физ.-мат. наук
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin, V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for the solution of ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 223 p.
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Utrecht: VSP, 2002, 281 p. ISBN: 9789067643672 . Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 206 p.
3. Vasin V.V., Ageev A.L. *Ill-posed problems with a priori information.* Utrecht: VSP, 1995, 255 p. ISBN: 9789067641913 .
4. Mallat S. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way.* New York: Academic Press, 1999, 620 p. ISBN: 0-12-466606-X . Translated to Russian inder the title Malla S. *Veivlety v obrabotke signalov.* Moscow: Mir Publ., 2005, 671 p.
5. Furman Ya.A. (ed.). *Vvedenie v konturnyi analiz i ego prilozheniya k obrabotke izobrazhenii i signalov* (Introduction to Contour Analysis and its Application to Image and Signal Processing). Moscow: Fizmatlit Publ., 2002, 596 p. ISBN: 5-9221-0255-9 .
6. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital image processing (3rd Ed.).* NJ: Pearson Prentice Hall, 2006, 976 p. ISBN: 978-0131687288 . Translated to Russian under the title *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii.* (*Izd. 3-e ispravlennoe i dopolnennoe*). Moscow: Tekhnosfera, 2012, 1104 p.
7. Antonova T.V. A method for localization of discontinuity lines of an approximately defined function of two variables. *Numerical Anal. Appl.*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 285–296. doi: 10.1134/S1995423912040015 .
8. Ageev A.L., Antonova T.V. Approximation of discontinuity lines of a noisy function of two variables. *J. Appl. Industrial Math.*, 2012, vol. 6, no. 3, pp. 269–279. doi: 10.1134/S1990478912030015 .
9. Ageev A.L., Antonova T.V. A Discrete algorithm for localizing the discontinuity lines of a function of two variables. *J. Appl. Industrial Math.*, 2017, vol. 11, no. 4, pp. 463–471. doi: 10.1134/S1990478917040019 .

The paper was received by the Editorial Office on Dezember 22, 2017.

Aleksandr Leonidovich Ageev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: ageev@imm.uran.ru .

Tat'yana Vladimirovna Antonova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: tvantonova@imm.uran.ru .