ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 517.55+519.117

# О ВЫЧИСЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛОВ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ПАРАМЕТРАМИ И ОСОБЕННОСТЯМИ НА КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРПЛОСКОСТЯХ[1]

**В. П. Кривоколеско**

В статье приведен алгоритм вычисления интегралов вида

$$\int_{|\xi_1|=1}\cdots\int_{|\xi_n|=1}\frac{f(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{m}(a_{j,1}z_1\xi_1+\ldots+a_{j,n}z_n\xi_n+c_j)^{t_j}}\frac{d\xi_1}{\xi_1}\cdots\frac{d\xi_n}{\xi_n},$$

где интегрирование происходит по остову единичного полицилиндра в $\mathbb{C}^n$, функция $f(\xi)$ голоморфна в его окрестности, а $\prod_{j=1}^{m}(a_{j,1}z_1\xi_1+\ldots+a_{j,n}z_n\xi_n+c_j)\neq 0$ для точек $z=(z_1,\ldots,z_n)$ связного $n$-кругового множества $G\subset\mathbb{C}^n$. Для точек остова $|\xi_1|=1,\ldots,|\xi_n|=1$ множество $\{V_j\}=\{(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n : a_{j,1}z_1\xi_1+\ldots+a_{j,n}z_n\xi_n+c_j=0\}$ является $n$-круговым, и взаимное расположение $n$-круговых множеств в $\mathbb{C}^n$ удобно изучать с помощью проекции $\pi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}^n_+$, где $\pi(z_1,\ldots,z_n)=(|z_1|,\ldots,|z_n|)$. Связное множество $\pi(\{V_j\})$ "разбивает" $\mathbb{R}^n_+$ не более чем на $n+1$ непустых непересекающихся частей, и $\pi(G)$ принадлежит одной из них. Получается, что число вариантов взаимного расположения в $\mathbb{C}^n$ множеств $G$ и $\{V_1\},\ldots,\{V_m\}$, влияющих на ответ при вычислении данного интеграла, не превосходит $(n+1)^m$. В теоремах 1 и 2 вычисляются два типа таких интегралов (два варианта). В работе приводится пример вычисления двойного интеграла с помощью его параметризации и применения одной из теорем.

Ключевые слова: интегральное представление, $n$-круговое множество, комплексная гиперплоскость.

**V. P. Krivokolesko. On computing a class of integrals of rational functions with parameters and singularities on complex hyperplanes.**

We give an algorithm for computing the integral

$$\int_{|\xi_1|=1}\cdots\int_{|\xi_n|=1}\frac{f(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{m}(a_{j,1}z_1\xi_1+\ldots+a_{j,n}z_n\xi_n+c_j)^{t_j}}\cdot\frac{d\xi_1}{\xi_1}\cdots\frac{d\xi_n}{\xi_n},$$

where the integration set is the distinguished boundary of the unit polydisk in $\mathbb{C}^n$, the function $f(\xi)$ is holomorphic in a neighborhood of this set, and $\prod_{j=1}^{m}(a_{j,1}z_1\xi_1+\ldots+a_{j,n}z_n\xi_n+c_j)\neq 0$ for points $z=(z_1,\ldots,z_n)$ of a connected $n$-circular set $G\subset\mathbb{C}^n$. For points of the distinguished boundary, whose coordinates satisfy the relations $|\xi_1|=1$, …, $|\xi_n|=1$, the sets $\{V_j\}=\{(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n\colon a_{j,1}z_1\xi_1+\ldots+a_{j,n}z_n\xi_n+c_j=0\}$ are $n$-circular, and it is convenient to study their mutual arrangement in $\mathbb{C}^n$ by using the projection $\pi\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}^n_+$, where $\pi(z_1,\ldots,z_n)=(|z_1|,\ldots,|z_n|)$. A connected set $\pi(\{V_j\})$ divide $\mathbb{R}^n_+$ at most $n+1$ disjoint nonempty parts, and $\pi(G)$ belongs to one of them. Therefore the number of variants of the mutual arrangement of the sets $G$ and $\{V_1\},\ldots,\{V_m\}$ in $\mathbb{C}^n$, which influences the value of the integral, does not exceed $(n+1)^m$. In Theorems 1 and 2 we compute the integral for two of these variants. An example of computing a double integral by applying its parameterization and one of the theorem is given.

Keywords: integral representation, $n$-circular domain, complex plane.

**MSC:** 32A07, 32A26, 05A19

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2018-24-2-123-140

[1]Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-9149.2016.1 и при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006).

## Введение

Интегралы от мероморфных функций с параметрами возникают и исследуются в различных задачах анализа и применяются в комбинаторном анализе [1–3] и математической физике [4; 5]. В данной работе рассматривается класс интегралов вида

$$J(z_1,\ldots,z_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{m}(a_{j,1}z_1\xi_1+\ldots+a_{j,n}z_n\xi_n+c_j)^{t_j}}\frac{d\xi}{\xi}, \tag{0.1}$$

где точка $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ (параметры $z_1,\ldots,z_n$) принадлежит ограниченному связному $n$-круговому множеству $G$ и комплексные гиперплоскости

$$V_j=\{z\in\mathbb{C}^n\colon a_{j,1}z_1+\ldots+a_{j,n}z_n+c_j=0\},\quad j=1,\ldots,m,$$

не пересекают $G$.

Здесь приняты следующие обозначения:

$d\xi/\xi=d\xi_1/\xi_1\ldots d\xi_n/\xi_n$;

$\{|\xi|=1\}=\{\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n\colon|\xi_1|=1,\ldots,|\xi_n|=1\}$ — остов единичного полицилиндра;

числа $t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{N}^n$;

$f(\xi)$ — функция, голоморфная в $n$-круговой окрестности остова единичного полициндра.

Данная работа тесно связана с [3; 6; 7]. В [3; 6] рассматриваются интегралы вида (0.1), в которых коэффициенты $a_{j,k}$ комплексных гиперплоскостей $V_j$ зависят от координат $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in\partial G$, т. е. $a_{j,k}=a_{j,k}(\zeta)$. При этом вместо $f(\xi)$ рассматривается функция, голоморфная в $n$-круговой окрестности остова единичного полицилиндра, которая зависит от точек $\zeta\in\partial G$ и имеет специфический вид $f(\zeta\xi)=f(\zeta_1\xi_1,\ldots,\zeta_n\xi_n)$.

Рассмотрению интеграла (0.1) помогают следующие факты: если комплексная гиперплоскость $V=\{z\in\mathbb{C}^n:a_1z_1+\ldots+a_nz_n+c=0\}$ не пересекает связное $n$-круговое множество $G\in\mathbb{C}^n$, то и семейство коплексных гиперплоскостей

$$\{V\}=\{z\in\mathbb{C}^n\colon a_1z_1e^{-i\varphi_1}+\ldots+a_nz_ne^{-i\varphi_n}+c=0,\ 0\leqslant\varphi_l<2\pi,\ l=1,\ldots,n\}$$

не пересекает связное $n$-круговое множество $G\in\mathbb{C}^n$ и является связным $n$-круговым множеством в $\mathbb{C}^n$. Причем при проектировании $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{R}^n_+$ по правилу $\pi:(z_1,\ldots,z_n)\to(|z_1|,\ldots,|z_n|)$, каждая гиперплоскость семейства $\{V\}$ имеет одну и ту же проекцию в $\mathbb{R}^n_+$, т. е. $\pi(V)=\pi(\{V\})$. Поэтому если плоскость $V_j$ не пересекает $G$, то соответствующий ей множитель в знаменателе подынтегрального выражения (0.1) отличен от нуля при интегрировании по остову единичного полицилиндра.

Решается следующая з а д а ч а: для фиксированного ограниченного связного $n$-кругового множества $G$ описать множество значениий параметров $a_{j,k}$, $c_j$, $z_j$, $k=1,\ldots,n$, для которых комплексные гиперплоскости $V_j$, $j=1,\ldots,m$, не пересекают $G$, и для этих параметров вычислить интеграл (0.1).

Используя свойства проекции $V_j$ в $\mathbb{R}^n_+$, определим $\mathbb{N}^m$-значную вектор-функцию $T(V_1,\ldots,V_m;G)=(k_1,\ldots,k_m)$, где $1\leqslant k_j\leqslant n+1$, $n$ — размерность пространства $\mathbb{C}^n$. С помощью этой вектор-функции в настоящей статье формулируется алгоритм вычислений интегралов (0.1).

В теореме 1 получен результат вычисления интеграла (0.1) для функции $f(\xi)$ — голоморфной в $n$-круговой окрестности остова единичного полициндра в случае, когда значения вектор-функции $T(V_1,\ldots,V_m;G)=(n+1,\ldots,n+1)$.

В теореме 2 получен результат вычисления интеграла (0.1) для функции $f(\xi)$, голоморфной в $n$-круговой окрестности остова единичного полициндра в случае, когда значения вектор-функции $T(V_1,V_2;G)=(k,n+1)$, $1\leqslant k\leqslant n$. Доказательство теоремы 2 основано на доказательстве четырех лемм, имеющих самостоятельный интерес.

При $n=2$ приведено вычисление интеграла вида (0.1) с помощью его параметризации.

Основными результатами работы являются теоремы 1 и 2.

## 1. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим проекцию $\mathbb{C}^n$ на $(\mathbb{R}^n_+)$:

$$\pi : (z_1, \ldots, z_n) \to (|z_1|, \ldots, |z_n|).$$

Обозначим $|G| = \pi(G)$ — образ в $\mathbb{R}^n_+$ множества $G \subset \mathbb{C}^n$ при проектировании $\pi$.

Рассмотрим комплексную гиперплоскость в $\mathbb{C}^n$:

$$V = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + c = 0\}. \tag{1.1}$$

В [8, предложение 4.3] дано описание проекции (1.1) в $\mathbb{R}^n_+$, т.е. $|V| = \pi(V)$. Она задается системой неравенств

$$|V| = \begin{cases} +|a_1||z_1| - |a_2||z_2| - |a_3||z_3| - \ldots - |a_n||z_n| - |c| \leqslant 0, \\ -|a_1||z_1| + |a_2||z_2| - |a_3||z_3| - \ldots - |a_n||z_n| - |c| \leqslant 0, \\ \vdots \\ -|a_1||z_1| - |a_2||z_2| - |a_3||z_3| - \ldots - |a_n||z_n| + |c| \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Система неравенств (1.2) “разбивает” точки $\mathbb{R}^n_+$ на $n+1$ непересекающихся частей:

$$\begin{array}{lr} +|a_1||z_1| - |a_2||z_2| - |a_3||z_3| - \ldots - |a_n||z_n| - |c| > 0, & (\Pi_1) \\ -|a_1||z_1| + |a_2||z_2| - |a_3||z_3| - \ldots - |a_n||z_n| - |c| > 0, & (\Pi_2) \\ \quad\ \ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots & \ldots \\ -|a_1||z_1| - |a_2||z_2| - |a_3||z_3| - \ldots + |a_n||z_n| - |c| > 0, & (\Pi_n) \\ -|a_1||z_1| - |a_2||z_2| - |a_3||z_3| - \ldots - |a_n||z_n| + |c| > 0. & (\Pi_{n+1}) \end{array}$$

Если в (1.1) $a_k = 0$, то $\Pi_k = \varnothing$. Если в (1.1) $c = 0$, то $\Pi_{n+1} = \varnothing$. На рис. 1–4 приведены примеры возможного расположения непустых частей $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$, $\Pi_{n+1}$ в $\mathbb{R}^n_+$ при $n = 2$ при разных значениях коэффициентов $a_1, a_2, c$. На рис. 1 часть $\Pi_3$ задается неравенством $-|a_1||z_1| - |a_2||z_2| + |c| > 0$.

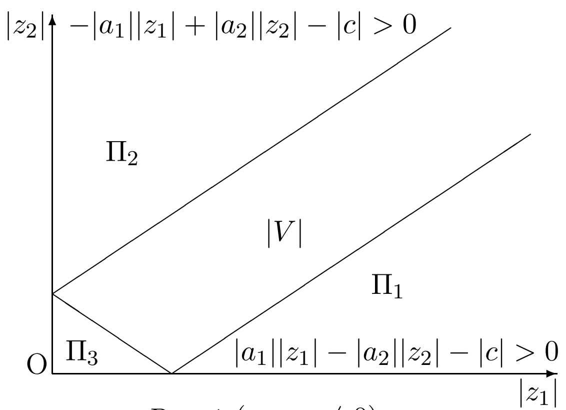


Рис. 1 ($a_1 a_2 c \neq 0$).

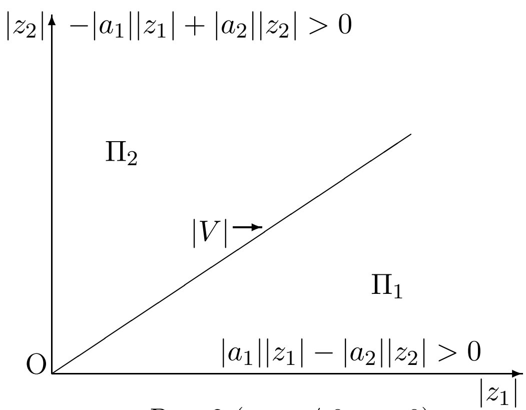


Рис. 2 ($a_1 a_2 \neq 0$, $c = 0$).

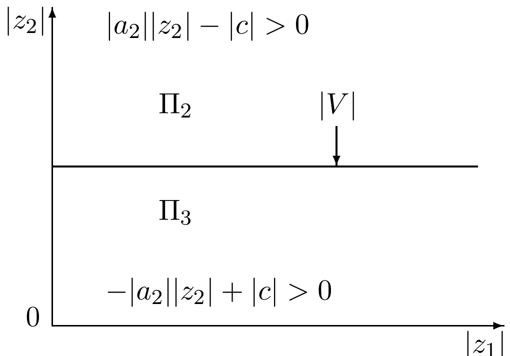


Рис. 3 ($a_2 c \neq 0$, $a_1 = 0$).

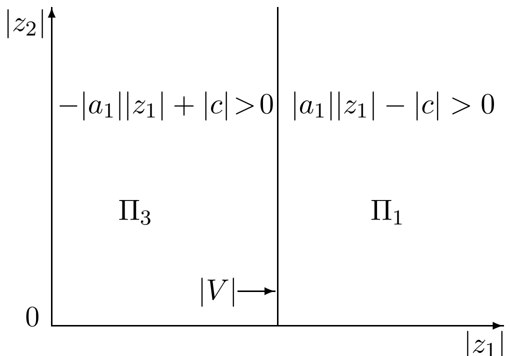


Рис. 4 ($a_1 c \neq 0, a_2 = 0$).

**Лемма 1.** *Если* $z = (z_1, \dots, z_n) \notin V$ *и* $|z| = \pi(z) = (|z_1|, \dots, |z_n|) \in \Pi_k$, *то при* $1 \leqslant k \leqslant n$ *справедливо равенство*

$$\frac{1}{(a_1\tilde{z}_1 + \ldots + a_n\tilde{z}_n + c)^t} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \binom{r+t-1}{r} \frac{c^r}{(a_1\tilde{z}_1 + \ldots + a_n\tilde{z}_n)^{r+t}}\,. \tag{1.3}$$

*При* $k = n+1$ *справедливо равенство*

$$\frac{1}{(a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + c)^t} = \frac{1}{c^t}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \binom{r+t-1}{r} \left(\frac{a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n}{c}\right)^r. \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполняются условия леммы и $1 \leqslant k \leqslant n$ при $c \neq 0$. Тогда $-|a_1||z_1| - |a_2||z_2| - \ldots - |a_{k-1}||z_{k-1}| + |a_k||z_k| - |a_{k+1}||z_{k+1}| - \ldots - |a_n||z_n| - |c| > 0$. Отсюда получаем, что $a_k \neq 0$ и

$$|a_k||z_k| - (|a_1||z_1| + |a_2||z_2| + \ldots + |a_{k-1}||z_{k-1}| + |a_{k+1}||z_{k+1}| + \ldots + |a_n||z_n|) > |c|. \tag{1.5}$$

Следовательно,

$$\left|\frac{c}{a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n}\right| < \frac{|c|}{||a_k||z_k| - (|a_1||z_1| + \ldots + |a_{k-1}||z_{k-1}| + |a_{k+1}||z_{k+1}| + \ldots + |a_n||z_n|)|} < 1,$$

и, применяя биномиальное разложение в ряд, получим

$$\frac{1}{(a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + c)^t} = \frac{1}{(a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n)^t}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \binom{r+t-1}{r} \left(\frac{c}{a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n}\right)^r.$$

Полученное равенство справедливо и при $c = 0$. Подчеркнем, что в силу (1.5) выполняется неравенство

$$\frac{|a_1 z_1 + \ldots + a_{k-1} z_{k-1} + a_{k+1} z_{k+1} + \ldots + a_n z_n|}{|a_k z_k|} < 1,$$

и аналогично

$$\frac{1}{(a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n)^r} = \frac{1}{(a_k z_k)^r \left(1 + \dfrac{a_1 z_1 + \ldots + a_{k-1} z_{k-1} + a_{k+1} z_{k+1} + \ldots + a_n z_n}{a_k z_k}\right)^r}$$

$$= \frac{1}{(a_k z_k)^r}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \binom{l+r-1}{l} \left(\frac{a_1 z_1 + \ldots + a_{k-1} z_{k-1} + a_{k+1} z_{k+1} + \ldots + a_n z_n}{a_k z_k}\right)^l. \tag{1.6}$$

Пусть выполняются условия леммы и $k = n+1$. Тогда $-|a_1||z_1| - |a_2||z_2| - \ldots - |a_n||z_n| + |c| > 0$ и справедливы неравенство

$$\left|\frac{a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n}{c}\right| < \frac{|a_1||z_1| + \ldots + |a_n||z_n|}{|c|} < 1$$

и следующее разложение:

$$\frac{1}{(a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + c)^t} = \frac{1}{c^t}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \binom{r+t-1}{r} \left(\frac{a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n}{c}\right)^r. \qquad \square$$

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим семейство комплексных гиперплоскостей

$$\{V\} = \left\{z \in \mathbb{C}^n \colon a_1 z_1 e^{-i\varphi_1} + \ldots + a_n z_n e^{-i\varphi_n} + c = 0,\ 0 \leqslant \varphi_l < 2\pi,\ l = 1, \ldots, n\right\}. \tag{1.7}$$

Очевидно, $V \in \{V\}$. Если комплексная гиперплоскость (1.1) проходит через точку $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, то комплексная гиперплоскость $a_1 z_1 e^{-i\varphi_1} + \ldots + a_n z_n e^{-i\varphi_n} + c = 0$ проходит через точку $(z_1^0 e^{-i\varphi_1}, \ldots, z_n^0 e^{-i\varphi_n})$. То есть множество (1.7) является $n$-круговым множеством с центром в начале координат (множеством Рейнхарта [9, с. 266]) и его $\pi$-проекция на $\mathbb{R}^n_+$ задается системой неравенств (1.2), т.е. $|V| = |\{V\}|$.

Пусть $G$ — связное ограниченное $n$-круговое множество в $\mathbb{C}^n$, комплексная гиперплоскость $V$ (см. (1.1)) не пересекает $G$ и каждая из комплексных гиперплоскостей (1.7) не пересекает $G$. Следовательно, не пересекаются множества $|G|$ и $|V|$ в $\mathbb{R}^n_+$ и наоборот. При этом $|G|{=}\pi(G)$ принадлежит одной из непустых частей $\Pi_1, \ldots, \Pi_n, \Pi_{n+1}$, которые являются дополнением $|V|$ до $\mathbb{R}^n_+$. □

Пусть дан набор комплексных гиперплоскостей

$$(V_j) \quad a_{j,1} z_1 + \ldots + a_{j,n} z_n + c_j = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.8}$$

Обозначим $(\Pi_k)_j$ множество точек $\mathbb{R}^n_+$, задаваемое неравенством

$$-|a_{j,1}||z_1| - |a_{j,2}||z_2| - \ldots - |a_{j,(k-1)}||z_{k-1}| + |a_{j,k}||z_k| - |a_{j,(k+1)}||z_{k+1}| - \ldots - |a_{j,n}||z_n| - |c| > 0.$$

Если для $n$-кругового множества $G$ его $|G|$-проекция в $\mathbb{R}^n_+$ принадлежит $(\Pi_{k_1})_1 \cap \ldots \cap (\Pi_{k_m})_m$, то набору $(V_1, \ldots, V_m; G)$ соответствует набор $(k_1, \ldots, k_m)$, где $1 \leqslant k_j \leqslant n+1$.

О п р е д е л е н и е. Пусть дано связное $n$-круговое множество $G$ и комплексные гиперплоскости $V_j$, $j = 1, \ldots, m$, не пересекают $G$. Определим $\mathbb{N}^m$-значную вектор-функцию

$$T(\{V_1\}, \ldots, \{V_m\}; G) = T(V_1, \ldots, V_m; G) := (k_1, \ldots, k_m),$$

если $|G| \subset (\Pi_{k_j})_j$ и $\Pi_{k_j} \neq \varnothing$, где $j = 1, \ldots, m$.

Отметим, что значения вектор-функции $T(V_1, \ldots, V_m; G) = (k_1, \ldots, k_m)$ всегда существуют, а при $m = 1$ получаем функцию $T(V; G) = k$, где $1 \leqslant k \leqslant n+1$.

Будем говорить, что комплексная гиперплоскость $V_j$ и семейство $\{V_j\}$ относительно $n$-кругового множества $G$ имеет *характеристику* $k_j$, $j = 1, \ldots, m$. Также будем говорить, что и дробь вида $1/(a_{j,1} z_1 \xi_1 + \ldots + a_{j,n} z_n \xi_n + c_j)^{r_j}$ относительно $n$-кругового множества $G$ имеют *характеристику* $k_j$ при $|\xi_1| = 1, \ldots, |\xi_n| = n$ для целых неотрицательных чисел $t_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Далее понадобятся некоторые факты, позволяющие сформулировать алгоритм вычисления интегралов (0.1).

**Лемма 2.** *Пусть $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $Q(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — однородные полиномы степеней $p$ и $q$ соответственно, где $p$ и $q$ — натуральные числа. Тогда*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi_1|=\rho_1} \cdots \int\limits_{|\xi_n|=\rho_n} \frac{P(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{Q(\xi_1, \ldots, \xi_n)} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \cdots \frac{d\xi_n}{\xi_n} = 0 \quad \textit{при} \quad p \neq q.$$

Для д о к а з а т е л ь с т в а этой леммы достаточно воспользоваться формулой Стокса и следующим утверждением (см. [10, лемма, р. 149]): если $P(z)$ и $Q(z)$ — дифференциальные формы в $\mathbb{C}^n$ степеней $p$ и $q$ соответственно и $p \neq q$, то дифференциальная форма $\dfrac{P(z)}{Q(z)} \dfrac{dz}{z}$ точна. □

З а м е ч а н и е 2. Представим непосредственное и краткое доказательство леммы 2, которое привел А. К. Цих на одном из семинаров.

После замены переменных $\xi_j = w_j\, e^{\varphi}$, $j = 1, \ldots, n$, получим равенство

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi_1|=\rho_1} \cdots \int\limits_{|\xi_n|=\rho_n} \frac{P(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{Q(\xi_1, \ldots, \xi_n)} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \cdots \frac{d\xi_n}{\xi_n} = I\, e^{(p-q)\varphi},$$

из которого и следует утверждение леммы.

В частности, если $Q(\xi_1,\dots,\xi_n)=\xi_1^{s_1}\dots\xi_n^{s_n}$,

$$P(\xi_1,\dots,\xi_n)=\sum_{t_1+\ldots+t_n=s_1+\ldots+s_n}\alpha(t_1,\dots,t_n)\,\xi_1^{t_1}\dots\xi_n^{t_n},$$

то

$$\int\limits_{|\xi_1|=\rho_1}\dots\int\limits_{|\xi_n|=\rho_n}\frac{\sum\limits_{t_1+\ldots+t_n=s_1+\ldots+s_n}\alpha(t_1,\dots,t_n)\,\xi_1^{t_1}\dots\xi_n^{t_n}}{(2\pi i)^n\,\xi_1^{s_1}\dots\xi_n^{s_n}}\frac{d\xi_1}{\xi_1}\dots\frac{d\xi_n}{\xi_n}=\alpha(s_1,\dots,s_n). \tag{1.9}$$

## 2. Алгоритм вычисления интегралов вида (0.1)

Сказанное выше позволяет сформулировать алгоритм вычисления интеграла (0.1).

**1.** Для набора комплексных гиперплоскостей (1.8), не пересекающих данное связное $n$-круговое множество $G$, найдем значение вектор-функции

$$T(V_1,\dots,V_m;G)=(k_1,\dots,k_m),\ \text{где}\quad 1\leqslant k_j\leqslant(n+1),\quad j=1,\dots,m.$$

Из чисел $(k_1,\dots,k_m)$ выделим $(k_{i_1},\dots,k_{i_l})$, $l\leqslant m$, для которых $1\leqslant k_{i_1}\leqslant n,\dots,1\leqslant k_{i_l}\leqslant n$.

**2.** Подынтегральные дроби (0.1) для натуральных значений $t,\dots,t_m$

$$\frac{1}{(a_{j,1}z_1\xi_1+\ldots+a_{j,n}z_n\xi_n+c_j)^{t_j}}$$

с характеристиками $k_j=n{+}1$ представим по формулам (1.4), а с характеристиками $k_j<n+1$ — по формулам (1.3) и перейдем к сумме интегралов вида

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi_1|=1}\dots\int\limits_{|\xi_n|=1}\frac{f(\xi)\,P(\xi_1,\dots,\xi_n)}{Q(\xi_1,\dots,\xi_n)}\frac{d\xi_1}{\xi_1}\dots\frac{d\xi_n}{\xi_n},$$

где $P(\xi_1,\dots,\xi_n)$ и $Q(\xi_1,\dots,\xi_n)$ — однородные полиномы степеней $p$ и $q$ для целых неотрицательных чисел $p$ и $q$ соответственно.

**3.** После реализации п. 2 для сомножителей однородного полинома $Q(\xi_1,\dots,\xi_n)$ с характеристиками $k_{i_1},\dots k_{i_l}$ применим равенство (1.6) леммы 1 и получим сумму интегралов вида

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi_1|=1}\dots\int\limits_{|\xi_n|=1}\frac{f(\xi)\,\tilde P(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\xi_{k_{i_1}}^{s_{k_{i_1}}}\dots\xi_{k_{i_l}}^{s_{k_{i_l}}}}\frac{d\xi_1}{\xi_1}\dots\frac{d\xi_n}{\xi_n}, \tag{2.1}$$

где $\tilde P(\xi_1,\dots,\xi_n)$ однородный полином целой неотрицательной степени $\tilde p$, $\xi_{k_{i_1}},\dots,\xi_{k_{i_l}}\in\mathbb{Z}_+^n$, а $f(\xi)$ — функция, голоморфная в $n$-круговой окрестности остова единичного полицилидра.

Заметим, что такая функция $f(\xi)$ обычно записывается в виде

$$f(\xi)=f(\xi_1,\dots,\xi_n)=\sum_{(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{Z}^n}\alpha(t_1,\dots,t_n)\,\xi_1^{t_1}\dots\xi_n^{t_n}.$$

Однако для $f(\xi)$ будем применять следующую запись:

$$f(\xi)=\sum_{\omega=1}^{n}\sum_{1\leqslant j_1<\ldots j_\omega\leqslant n}\sum_{s_1,\dots,s_n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\alpha(s_1,\dots,s_n)\,\xi_{j_1}^{s_{j_1}}\dots\xi_{j_\omega}^{s_{j_\omega}}}{\xi[j_1,\dots,j_\omega]^{s[j_1,\dots,j_\omega]}}+\sum_{s_1,\dots,s_n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\beta(s_1,\dots,s_n)}{\xi_1^{s_1}\dots\xi_n^{s_n}}, \tag{2.2}$$

где $\xi[j_1,\dots,j_\omega]^{s[j_1,\dots,j_\omega]}=\xi_1^{s_1}..[\xi_{j_1}^{s_{j_1}}\dots\xi_{j_\omega}^{s_{j_\omega}}]..\xi_n^{s_n}$ — произведение мономов $\xi_1^{s_1},\dots,\xi_n^{s_n}$, среди которых пропущены мономы $\xi_{j_1}^{s_{j_1}},\dots,\xi_{j_\omega}^{s_{j_\omega}}$.

**4.** После реализации п. 3 подставим в формулу (2.1) представление для $f(\xi)$ в виде (2.2) и получим сумму интегралов вида

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi_1|=1}\dots\int\limits_{|\xi_n|=1}\frac{\xi_{j_1}^{s_{j_1}}\dots\xi_{j_\omega}^{s_{j_\omega}}\,\tilde{P}(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\xi[j_1,\dots,j_\omega]^{s[j_1,\dots,j_\omega]}\,\xi_{k_{i_1}}^{s_{k_{i_1}}}\dots\xi_{k_{i_l}}^{s_{k_{i_l}}}}\frac{d\xi_1}{\xi_1}\dots\frac{d\xi_n}{\xi_n}. \tag{2.3}$$

Ответ для (2.3) найдем по формуле (1.9).

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что интеграл (2.3) равен нулю, если

$$\xi[j_1,\dots,j_\omega]^{s[j_1,\dots,j_\omega]}\,\xi_{k_{i_1}}^{s_{k_{i_1}}}\dots\xi_{k_{i_l}}^{s_{k_{i_l}}}\neq\xi_1^{\tilde{s}_1}\dots\xi_n^{\tilde{s}_n}.$$

## 3. Основные результаты

Далее для $s=(s_1,\dots,s_n)$ и $m=(m_1,\dots,m_n)$, принадлежащи[ $\mathbb{R}_+^n$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ применим следующие обозначения:

$$z^s=z_1^{s_1}\dots z^{s_n},$$

$$s!=s_1!\dots s_n!,\ |\,s\,|=s_1+\dots+s_n,\ s[k]=(s_1,\dots,s_{k-1},s_{k+1},\dots,s_n),$$

$$s[k]\,!=s_1!..[s_k!]..s_n!=s_1!\dots s_{k-1}!s_{k+1}!\dots\cdot s_n!,$$

$$|\,s[k]\,|=s_1+[k]+s_n=s_1+\dots+s_{k-1}+s_{k+1}+\dots+s_n,$$

где запись $a_1+[k]+a_n$ означает пропуск $k$-го слагаемого.

$$\text{Положим:}\quad|\varnothing|=0,\ \text{где}\ \varnothing-\text{пустое множество.} \tag{3.1}$$

**Лемма 3.** *Если $r_1+\dots+r_m=s_1+\dots+s_n$, то*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\prod\limits_{j=1}^m(a_{j,1}z_1\xi_1+\dots+a_{j,n}z_n\xi_n)^{r_j}}{\xi^s}\frac{d\xi}{\xi}$$

$$=z^s\prod_{j=1}^m\prod_{k=1}^n\sum_{l_{j,1}+\dots+l_{j,n}=r_j}\ \sum_{l_{1,k}+\dots+l_{m,k}=s_k}\frac{r_j!}{l_{j,1}!\dots l_{j,n}!}\,a_{j,1}^{l_{j,1}}\dots a_{j,n}^{l_{j,n}}\ ,$$

*и этот интеграл равен нулю, если $r_1+\dots+r_m\neq s_1+\dots+s_n$, где $r_1,\dots,r_m$, $s_1,\dots,s_n$ — целые неотрицательные числа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2 интеграл

$$J=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\prod\limits_{j=1}^m(a_{j,1}z_1\xi_1+\dots+a_{j,n}z_n\xi_n)^{r_j}}{\xi^s}\frac{d\xi}{\xi}=0,$$

если $r_1+\dots+r_m\neq s_1+\dots+s_n$. Пусть для целых неотрицательных чисел $r_1,\dots,r_m$, $s_1,\dots,s_n$ выполняется равенство $r_1+\dots+r_m=s_1+\dots+s_n$. Так как

$$\prod_{j=1}^m(a_{j,1}z_1\xi_1+\dots+a_{j,n}z_n\xi_n)^{r_j}$$

$$= \sum_{l_{1,1}+\ldots+l_{1,n}=r_1} \cdots \sum_{l_{m,1}+\ldots+l_{m,n}=r_m} \frac{r_1!}{l_{1,1}!\ldots l_{1,n}!} \cdots \frac{r_m!}{l_{m,1}!\ldots l_{m,n}!}\, a_{1,1}^{l_{1,1}} \ldots a_{1,n}^{l_{1,n}} \ldots a_{m,1}^{l_{m,1}} \ldots a_{m,n}^{l_{m,n}}$$

$$\times z_1^{l_{1,1}+\ldots+l_{m,1}} \xi_1^{l_{1,1}+\ldots+l_{m,1}} \ldots z_n^{l_{1,n}+\ldots+l_{m,n}} \xi_n^{l_{1,n}+\ldots+l_{m,n}},$$

то

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi_1|=1} \cdots \int\limits_{|\xi_n|=1} \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} (a_{j,1} z_1 \xi_1 + \ldots + a_{j,n} z_n \xi_n)^{r_j}}{\xi_1^{s_1} \ldots \xi_n^{s_n}} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \cdots \frac{d\xi_n}{\xi_n}$$

$$= z^s \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \sum_{l_{j,1}+\ldots+l_{j,n}=r_j} \sum_{l_{1,k}+\ldots+l_{m,k}=s_k} \frac{r_j!}{l_{j,1}!\ldots l_{j,n}!}\, a_{j,1}^{l_{j,1}} \ldots a_{j,n}^{l_{j,n}}. \qquad \square$$

Полагая $a_{j,1}z_1\xi_1 + \ldots + a_{j,n}z_n\xi_n = a_1 z_1 \xi_1 + \ldots + a_n z_n \xi_n$ для $j = 1, \ldots, m$ и применяя лемму 3 при $r_1 + \ldots + r_m = s_1 + \ldots + s_n$ получим полиномиальное тождество, аналогичное тождествам, полученным в [2]:

$$\prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \sum_{l_{j,1}+\ldots+l_{j,n}=r_j} \sum_{l_{1,k}+\ldots+l_{m,k}=s_k} \frac{r_j!}{l_{j,1}! \cdot \ldots \cdot l_{j,n}!} = \frac{(s_1 + \ldots + s_n)!}{s_1! \ldots s_n!}; \tag{3.2}$$

которое далее будет обобщено. Лемма 3 позволяет доказать следующую теорему.

**Теорема 1.** *Если комплексные гиперплоскости* $V_j = \{z \in \mathbb{C}^n : a_{j,1}z_1 + \ldots + a_{j,n}z_n + c_j = 0\}$, $j = 1, \ldots, m$, *не пересекают связное ограниченное n-круговое множество* $G \subset \mathbb{C}^n$ *и* $T(V_1, \ldots, V_m; G) = (n+1, \ldots, n+1)$, *то для натуральных* $t_1, \ldots, t_m$ *и функции* $f(\xi)$, *голоморфной в n-круговой окрестности остова единичного полицилиндра, заданной* (2.2), *интеграл* (0.1) *вычисляется следующим образом*:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{m} (a_{j,1} z_1 \xi_1 + \ldots + a_{j,n} z_n \xi_n + c_j)^{t_j}} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \sum_{s \in \mathbb{Z}_+^n} \beta(s)\, z^s \frac{(-1)^{s_1+\ldots+s_n}}{c_1^{t_1} \ldots c_m^{t_m}} \sum_{r_1+\ldots r_m = s_1+\ldots+s_n} \frac{1}{c_1^{r_1} \ldots c_m^{r_m}}$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \sum_{l_{j,1}+\ldots+l_{j,n}=r_j} \sum_{l_{1,k}+\ldots+l_{m,k}=s_k} \frac{(t_j + r_j - 1)!}{l_{j,1}! \ldots l_{j,n}!(t_j - 1)!}\, a_{j,1}^{l_{j,1}} \ldots a_{j,n}^{l_{j,n}}.$$

Доказательство. Применим равенство (1.4) леммы 1, и тогда

$$\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{m} (a_{j,1} z_1 \xi_1 + \ldots + a_{j,n} z_n \xi_n + c_j)^{t_j}}$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j^{t_j}} \sum_{r_j=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{c_j}\right)^{r_j} \frac{(t_j + r_j - 1)!}{r_j!(t_j - 1)!} (a_{j,1} z_1 \xi_1 + \ldots + a_{j,n} z_n \xi_n)^{r_j} = \frac{1}{c_1^{t_1} \ldots c_m^{t_m}}$$

$$\times \sum_{r_1+\ldots+r_M=0}^{\infty} (-1)^{r_1+\ldots+r_m} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{c_j}\right)^{r_j} \frac{(t_j + r_j - 1)!}{r_j!(t_j - 1)!} (a_{j,1} z_1 \xi_1 + \ldots + a_{j,n} z_n \xi_n)^{r_j}. \tag{3.3}$$

Значит, из (3.3) и леммы 2 следует, что для функции $f(\xi)$, голоморфной в $n$-круговой окрестности остова единичного полицилиндра, заданной (2.2), в силу замечания 3 имеем

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{m} (a_{j,1} z_1 \xi_1 + \ldots + a_{j,n} z_n \xi_n + c_j)^{t_j}} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{Z}^n_+} \beta(s) \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{1}{\xi^s \prod\limits_{j=1}^{m} (a_{j,1}z_1\xi_1 + \ldots + a_{j,n}z_n\xi_n + c_j)^{t_j}} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{Z}^n_+} \beta(s) \frac{(-1)^{s_1+\ldots+s_n}}{c_1^{t_1}\ldots c_m^{t_m}} \sum_{r_1+\ldots+r_m=s_1+\ldots+s_n} \frac{(t_1+r_1-1)!}{r_1!(t_1-1)!}\frac{1}{c_1^{r_1}} \cdots \frac{(t_m+r_m-1)!}{r_m!(t_m-1)!}\frac{1}{c_m^{r_m}}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} (a_{j,1}z_1\xi_1 + \ldots + a_{j,n}z_n\xi_n)^{r_j}}{\xi^s} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$\overset{\text{с учетом леммы 3}}{=} \sum_{s\in\mathbb{Z}^n_+} \beta(s) z^s \frac{(-1)^{s_1+\ldots+s_n}}{c_1^{t_1}\ldots c_m^{t_m}} \sum_{r_1+\ldots+r_m=s_1+\ldots+s_n} \frac{1}{c_1^{r_1}} \cdots \frac{1}{c_m^{r_m}}$$

$$\times \prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n} \sum_{l_{j,1}+\ldots+l_{j,n}=r_j} \sum_{l_{1,k}+\ldots+l_{m,k}=s_k} \frac{(t_j+r_j-1)!}{(t_j-1)!l_{j,1}!\ldots l_{j,n}!} a_{j,1}^{l_{j,1}}\ldots a_{j,n}^{l_{j,n}}. \qquad \square$$

З а м е ч а н и е 4. Полагая $a_{j,1}z_1\xi_1+\ldots+a_{j,n}z_n\xi_n = a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n$ для $j=1,\ldots,m$, из теоремы 1 получим полиномиальное тождество для натуральных $t_1,\ldots,t_m$, которое является обобщением (3.2):

$$\sum_{r_1+\ldots r_m=s_1+\ldots+s_n} \prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n} \sum_{l_{j,1}+\ldots+l_{j,n}=r_j} \sum_{l_{k,1}+\ldots+l_{k,n}=s_k} \frac{(t_j+r_j-1)!}{l_{j,1}!\cdot\ldots\cdot l_{j,n}!\cdot(t_j-1)!}$$

$$= \frac{(t_1+\ldots+t_m+s_1+\ldots+s_n-1)!}{s_1!\ldots s_n!(t_1+\ldots+t_m-1)!}.$$

**Лемма 4.** *Если при $n>1$ для натуральных значений $r$, $q$, $s_1+1,\ldots,s_n+1$ выполняются условия $r+q=s_1+\ldots+s_n=|\,s|$ и $q\geqslant s_k$, то*

$$\int\limits_{|\xi|=1} \frac{(a_1z_1\xi_1+[k]+a_nz_n\xi_n)^r(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^{(|s|-r)}}{(2\pi i)^n\xi^s}\frac{d\xi}{\xi} = z^s \sum_{|m[k]|=|s[k]|-r} \frac{(|s|-r)!}{s_k!\,m[k]!}$$

$$\times \frac{r!}{(s-m)[k]!} b_1^{m_1}\ldots b_{k-1}^{m_{k-1}} b_k^{s_k} b_{k+1}^{m_{k+1}}\ldots b_n^{m_n} a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n},$$

*где $m_1\leqslant s_1$, $..[k]..$, $m_n\leqslant s_n$. Если $q+r\neq s_1+\ldots+s_k$ или $q<s_k$, то рассматриваемый интеграл равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполняется условие $q+r\neq s_1+\ldots+s_k$, то интеграл

$$\int\limits_{|\xi|=1} \frac{(a_1z_1\xi_1+[k]+a_nz_n\xi_n)^r(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^q}{(2\pi i)^n\xi^s}\frac{d\xi}{\xi} = 0 \ \text{ в силу леммы 2.}$$

Пусть при $n>1$ выполняется условие $q+r=s_1+\ldots+s_k=|\,s|$, но $q<s_k$. Представим

$$(a_1z_1\xi_1+[k]+a_nz_n\xi_n)^r(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^q = \sum_{t_1+\ldots+t_n=|s|+r} \alpha(t_1,\ldots,t_n)\,\xi_1^{t_1}\ldots\xi_n^{t_n}.$$

Так как $q<s_k$, то $\alpha(s_1,\ldots,s_n)=0$ и рассматриваемый интеграл равен нулю.

Исследуем случай $r+q=s_1+\ldots+s_n=|\,s|$ и $q\geqslant s_k$ при $n>1$ для натуральных значений $r$, $q$, $s_1+1,\ldots,s_n+1$. Отметим, что условие $q\geqslant s_k$ равносильно условию $s[k]\geqslant r$. Так как

$$(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^q(a_1z_1\xi_1+[k]+a_nz_n\xi_n)^r$$

$$= \sum_{m_1+\ldots+m_n=q} \sum_{h_1+[k]+h_n=r} \frac{q!}{m_1!\ldots m_n!} \frac{r!}{h_1!..[h_k!]..h_n!} b_1^{m_1}\ldots b_n^{m_n} a_1^{h_1}..[a_k]..a_n^{h_n}$$
$$\times (z_1\xi_1)^{m_1+h_1}..[z_k\xi_k]..(z_n\xi_n)^{m_n+h_n}(z_k\xi_k)^{m_k}. \tag{3.4}$$

то из (3.4) при $q = |s| - r$

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi_1|=1} \cdots \int\limits_{|\xi_n|=1} \frac{(a_1z_1\xi_1 + [k] + a_nz_n\xi_n)^r (b_1z_1\xi_1 + \ldots + b_nz_n\xi_n)^q}{\xi_1^{s_1}\ldots\xi_n^{s_n}} \frac{d\xi_1}{\xi_1}\cdots\frac{d\xi_n}{\xi_n}$$
$$= z_1^{s_1}\ldots z_n^{s_n} \sum_{m_1+..[m_k]..+m_n=q-s_k} \frac{q!}{s_k!\,m_1!..[m_k]..m_n!} \frac{r!}{(s_1-m_1)!..[(s_k-m_k)!]..(s_n-m_n)!}$$
$$\times\, b_1^{m_1}\ldots b_{k-1}^{m_{k-1}} b_k^{s_k} b_{k+1}^{m_{k+1}}\ldots b_n^{m_n} a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}$$
$$= z^s \sum_{|m[k]|=|s[k]|-r} \frac{(|s|-r)!}{s_k!\,m[k]!} \frac{r!}{(s-m)[k]!} b_1^{m_1}\ldots b_{k-1}^{m_{k-1}} b_k^{s_k} b_{k+1}^{m_{k+1}}\ldots b_n^{m_n} a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}.$$

(Этот интеграл отличен от нуля только при $q \geqslant s_k$, т. е. при $m_k = s_k$, $m_1 + h_1 = s_1, \ldots, m_{k-1} + h_{k-1} = s_{k-1}$, $m_{k+1} + h_{k+1} = s_{k+1}, \ldots, m_n + h_n = s_n$ ). □

**Лемма 5.** *Пусть комплексная гиперплоскость $V = \{z\colon a_1z_1 + \ldots + a_nz_n = 0\}$ не пересекает связное ограниченное $n$-круговое множество $G \subset \mathbb{C}^n$ и $T(V;G) = k$ для некоторого $1 \leqslant k \leqslant n$. Если для натуральных $q$, $t$ выполняется условие $q = t + |s|$, где $s \in \mathbb{Z}_+^n$, то*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{(b_1z_1\xi_1 + \ldots + b_nz_n\xi_n)^q}{(a_1z_1\xi_1 + \ldots + a_nz_n\xi_n)^t\,\xi^s} \frac{d\xi}{\xi} = z^s b_k^{s_k} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^t \frac{(t+|s|)!}{(t-1)!} \sum_{r=0}^{|s[k]|} (-1)^r \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^r$$
$$\times \sum_{|m[k]|=|s[k]|-r} \frac{(r+t-1)!}{(t+s_k+r)!\,m[k]!\,((s-m)[k])!} b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}\, a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}, \tag{3.5}$$

*где $m_1 \leqslant s_1$, $..[k]..$, $m_n \leqslant s_n$ и $r$, $q$ — натуральные числа.*

*При $q \neq t + |s|$ рассматриваемый интеграл будет равен нулю.*

Доказательство. При $n = 1$ равенство (3.5) выполняется в силу (3.1), т. е. в силу определения $|\varnothing| = 0$. В силу леммы 2 интеграл равен нулю при условии $q \neq s_1 + \ldots + s_n + t$.

Пусть при $n > 1$ выполняется условие $q \neq s_1 + \ldots + s_n + t = |s| + t$ и комплексная гиперплоскость $V = \{z : a_1z_1 + \ldots + a_nz_n = 0\}$ не пересекает ограниченное $n$-круговое связное множество $G \subset \mathbb{C}^n$ и $T(V;G) = k$ для некоторого $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда для точек $(z_1, \ldots, z_n) \in G$ выполняется неравенство $-|a_1||z_1| - \ldots - |a_{k-1}||z_{k-1}| + |a_k||z_k| - |a_{k+1}||z_{k+1}| - \ldots - |a_n||z_n| > 0$. Следовательно, при $n > 1$ и $|\xi_1| = 1, \ldots, |\xi_n| = 1$ выполняется неравенство $|a_kz_k\xi_k| > |a_1z_1\xi_1 + ..[a_kz_k\xi_k].. + a_nz_n\xi_n|$ и

$$\frac{1}{(a_1z_1\xi_1 + \ldots + a_nz_n\xi_n)^t} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{r+t-1}{r} \frac{(a_1z_1\xi_1 + ..[a_kz_k\xi_k]..a_nz_n\xi_n)^r}{(a_kz_k\xi_k)^{r+t}}. \tag{3.6}$$

С учетом (3.6) получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi_1|=1} \cdots \int\limits_{|\xi_n|=1} \frac{(b_1z_1\xi_1 + \ldots + b_nz_n\xi_n)^{t+s_1+\ldots+s_n}}{(a_1z_1\xi_1 + \ldots + a_nz_n\xi_n)^t\,\xi_1^{s_1}\ldots\xi_n^{s_n}} \frac{d\xi_1}{\xi_1}\cdots\frac{d\xi_n}{\xi_n} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{r+t-1}{r}$$
$$\times \int\limits_{|\xi_1|=1} \cdots \int\limits_{|\xi_n|=1} \frac{(a_1z_1\xi_1 + ..[a_kz_k\xi_k]..a_nz_n\xi_n)^r\,(b_1z_1\xi_1 + \ldots + b_nz_n\xi_n)^{t+|s|}}{(2\pi i)^n\,(a_kz_k)^{t+r}\,(\xi_k)^{s_k+t+r}\,\xi_1^{s_1}..[\xi_k]..\xi_n^{s_n}} \frac{d\xi_1}{\xi_1}\cdots\frac{d\xi_n}{\xi_n}$$

(интеграл не равен нулю только при $t+|s|\geqslant s_k+t+r$ или при условии $s_1+[s_k]+s_n\geqslant r$)

$$=\sum_{r=0}^{|s[k]|}\frac{(-1)^r(r+t-1)!}{r!(t-1)!}$$

$$\times\int\limits_{|\xi_1|=1}\cdots\int\limits_{|\xi_n|=1}\frac{(a_1z_1\xi_1+[a_kz_k\xi_k]+a_nz_n\xi_n)^r\,(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^{t+|s|}}{(2\pi i)^n(a_kz_k)^{t+r}\,(\xi_k)^{s_k+t+r}\,\xi_1^{s_1}..[\xi_k]..\xi_n^{s_n}}\frac{d\xi_1}{\xi_1}\cdots\frac{d\xi_n}{\xi_n}$$

(применим лемму 4 при условии: показатель $\xi_k$ равен $s_k+t+r$)

$$=\sum_{r=0}^{|s[k]|}\frac{(-1)^r(r+t-1)!}{r!(t-1)!}\frac{z_1^{s_1}..[z_k]..z_n^{s_n}\,z_k^{t+r+s_k}}{a_k^{t+r}\,z_k^{t+r}}\sum_{|m[k]|=|s[k]|-r}\frac{(t+|s|)!}{(t+r+s_k)!\,m_1!..[m_k]..m_n!}$$

$$\times\frac{r!}{(s_1-m_1)!..[k]..(s_n-m_n)!}\,b_1^{m_1}\ldots b_{k-1}^{m_{k-1}}\,b_k^{s_k+t+r}\,b_{k+1}^{m_{k+1}}\ldots b_n^{m_n}\,a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}$$

$$=z^sb_k^{s_k}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)^t\frac{(t+|s|)!}{(t-1)!}\sum_{r=0}^{|s[k]|}(-1)^r\left(\frac{b_k}{a_k}\right)^r\sum_{|m[k]|=|s[k]|-r}\frac{(r+t-1)!}{(t+s_k+r)!\,m[k]!}$$

$$\times\frac{1}{(s-m)[k]!}\,b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}\,a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}.\qquad\square$$

**Лемма 6.** *Пусть комплексная гиперплоскость $V=\{z\colon a_1z_1+\ldots+a_nz_n=0\}$ не пересекает связное ограниченное $n$-круговое множество $G\subset\mathbb{C}^n$ и $T(V;G)=k$ для некоторого $1\leqslant k\leqslant n$. Если для натуральных $t$, $q$ выполняется условие $q+s_k=t+|s[k]|$, где $s\in\mathbb{Z}_+^n$, то*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^q\,\xi_k^{s_k}}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n)^t\,\xi^{s[k]}}\frac{d\xi}{\xi}$$

$$=\frac{z_1^{s_1}..[z_k]..z_n^{s_n}}{z_k^{s_k}}\frac{1}{a_k^{s_k}}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)^q\frac{q!}{(t-1)!}\sum_{r=0}^{|s[k]|}(-1)^r\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{|s[k]|-r}\sum_{|m[k]|=|s[k]|-r}\frac{(r+t-1)!}{(q-|s[k]|+r)!\,m[k]!}$$

$$\times\frac{1}{(s-m)[k]!}\,b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}\,a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}.$$

*При $q+s_k\neq t+|s[k]|$ рассматриваемый интеграл равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n=1$ равенство (3.5) выполняется в силу (3.1), т.е. в силу определения $|\varnothing|=0$. В силу леммы 2 интеграл равен нулю при условии $q+s_k\neq t+|s[k]|$.

Пусть $q+s_k=t+|s[k]|$. Из условий леммы следует, что при $n>1$ выполняется равенство (3.6). Применяя (3.6), получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi_1|=1}\cdots\int\limits_{|\xi_n|=1}\frac{(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^q\,\xi_k^{s_k}}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n)^t\,\xi_1^{s_1}..[\xi_k^{s_k}]..\xi_n^{s_n}}\frac{d\xi_1}{\xi_1}\cdots\frac{d\xi_n}{\xi_n}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{r+t-1}{r}$$

$$\times\int\limits_{|\xi_1|=1}\cdots\int\limits_{|\xi_n|=1}\frac{(a_1z_1\xi_1+..[a_kz_k\xi_k]..a_nz_n\xi_n)^r(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^q\,\xi_k^{s_k}}{(2\pi i)^n\,(a_kz_k)^{t+r}\,(\xi_k)^{t+r}\,\xi_1^{s_1}..[\xi_k]..\xi_n^{s_n}}\frac{d\xi_1}{\xi_1}\cdots\frac{d\xi_n}{\xi_n}$$

(интеграл равен нулю только при $t+r+|s[k]| \neq r+q+s_k$. Пусть $t+r+|s[k]| = r+q+s_k$, т. е. $t = q+s_k-|s[k]|$)

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{r+t-1}{r}$$

$$\times \int\limits_{|\xi_1|=1} \cdots \int\limits_{|\xi_n|=1} \frac{(a_1z_1\xi_1+..[a_kz_k\xi_k]..a_nz_n\xi_n)^r(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^q\,\xi_k^{s_k}}{(2\pi i)^n\,(a_kz_k)^{q+s_k-|s[k]|+r}\,(\xi_k)^{q+s_k-|s[k]|+r}\,\xi_1^{s_1}..[\xi_k]..\xi_n^{s_n}} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \cdots \frac{d\xi_n}{\xi_n}$$

(интеграл может быть отличен от нуля только при $q \geqslant q-|s[k]|+r$ или при условии $s_1+[s_k]+s_n \geqslant r$)

$$= \sum_{r=0}^{|s[k]|} \frac{(-1)^r(r+t-1)!}{r!(t-1)!}$$

$$\times \int\limits_{|\xi_1|=1} \cdots \int\limits_{|\xi_n|=1} \frac{(a_1z_1\xi_1+..[a_kz_k\xi_k]..a_nz_n\xi_n)^r(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^q}{(2\pi i)^n\,(a_kz_k)^{q+s_k-|s[k]|+r}\,(\xi_k)^{q-|s[k]|+r}\,\xi_1^{s_1}..[\xi_k]..\xi_n^{s_n}} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \cdots \frac{d\xi_n}{\xi_n}$$

(применим лемму 4 при условии: показатель $\xi_k$ равен $q-|s[k]|+r$)

$$= \sum_{r=0}^{|s[k]|} \frac{(-1)^r(r+t-1)!}{r!(t-1)!} \frac{z_1^{s_1}..[z_k]..z_n^{s_n}\,z_k^{q-|s[k]|+r}}{(a_kz_k)^{q+s_k-|s[k]|+r}} \sum_{|m[k]|=|s[k]|-r} \frac{q!}{(q-|s[k]|+r)!\,m_1!..[m_k]..m_n!}$$

$$\times \frac{r!}{(s_1-m_1)!..[k]..(s_n-m_n)!}\, b_1^{m_1}\ldots b_{k-1}^{m_{k-1}}\, b_k^{q-|s[k]|+r}\, b_{k+1}^{m_{k+1}}\ldots b_n^{m_n}\, a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}$$

$$= \frac{z_1^{s_1}..[z_k]..z_n^{s_n}}{z_k^{s_k}} \frac{1}{a_k^{s_k}} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^q \frac{q!}{(t-1)!} \sum_{r=0}^{|s[k]|} (-1)^r \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{|s[k]|-r} \sum_{|m[k]|=|s[k]|-r} \frac{(r+t-1)!}{(q-|s[k]|+r)!\,m[k]!}$$

$$\times \frac{1}{(s-m)[k]!}\, b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}\, a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}. \qquad \square$$

Опираясь на леммы 4–6, докажем следующую теорему.

**Теорема 2.** *Пусть комплексные гиперплоскости* $V = \{z : a_1z_1+\ldots+a_nz_n = 0\}$, $\tilde{V} = \{z : a_1z_1+\ldots+a_nz_n = 0\}$ *не пересекают связное ограниченное n-круговое множество* $G \subset C^n$ *и для некоторого* $1 \leqslant k \leqslant n$ *вектор-функция* $T(V,\tilde{V};G) = (k, n+1)$. *Тогда для натуральных значений* $u$, $v$ *и функции* $f(\xi)$, *голоморфной в n-круговой окрестности остова единичного полицилиндра, заданной* (2.2), *интеграл*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{f(\xi)}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n+c)^u(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n+d)^v} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \frac{1}{d^v\cdot(u-1)!(v-1)!} \sum_{s\in\mathbb{Z}_+^n} \sum_{s_k-|s[k]|=0}^{u} \frac{\alpha(s)\,z[k]^{s[k]}}{z_k^{s_k}\,a_k^{s_k}} \frac{(-1)^{u+|s[k]|-s_k}}{d^{u+|s[k]|-s_k}}$$

$$\times \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^{u+|s[k]|-s_k} \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^{\tau} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^{\tau} \frac{(\tau+u+|s[k]|-s_k+v-1)!}{\tau!} \sum_{r=0}^{|s[k]|} (-1)^r \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{|s[k]|-r}$$

$$\times \sum_{|m[k]|=|s[k]|-r} \frac{(r+\tau+u-1)!}{(\tau+u-s_k+r)!\,m[k]!} \frac{1}{(s-m)[k]!}\, b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}\, a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}$$

$$+ \frac{1}{d^v(u-1)!(v-1)!} \sum_{s\in\mathbb{Z}_+^n} \sum_{s_k-|s[k]|=u+1}^{\infty} \frac{\alpha(s)\,z[k]^{s[k]}\,(-1)^{s_k-|s[k]|-u}}{z_k^{s_k}\,a_k^{s_k}}$$

$$\times\,(-c)^{s_k-|s[k]|-u}\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{c}{d}\right)^q\left(\frac{b_k}{a_k}\right)^q\frac{(q+v-1)!}{(q+s_k-u-|s[k]|)!}\sum_{r=0}^{|s[k]|}(-1)^r\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{|s[k]|-r}$$

$$\times\sum_{|m[k]|=|s[k]|-r}\frac{(r+q+s_k-|s[k]|-1)!}{(q-|s[k]|+r)!\,m[k]!}\frac{1}{(s-m)[k]!}\,b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}\,a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}$$

$$+\frac{(-1)^u}{d^{u+v}(u-1)!(v-1)!}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)^u\sum_{s\in\mathbb{Z}_+^n}\beta(s)\,z^s b_k^{s_k}\frac{(-1)^{|s|}}{d^{|s|}}\sum_{\tau=0}^{\infty}\left(\frac{c}{d}\right)^\tau\left(\frac{b_k}{a_k}\right)^\tau$$

$$\times\sum_{r=0}^{|s[k]|}(-1)^r\left(\frac{b_k}{a_k}\right)^r\sum_{|m[k]|=|s[k]|-r}\frac{(\tau+u+|s|+v-1)!(r+\tau+u-1)!}{\tau!(\tau+u+s_k+r)!\,m[k]!\,(s-m)[k]!}$$

$$\times\,b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n},\ \text{где}\quad m_1\leqslant s_1,\ ..[k]..,m_n\leqslant s_n. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $T(V,\tilde V;G)=(k,n+1)$ для некоторого $1\leqslant k\leqslant n$, то при $|\xi_1|=1,\dots,|\xi_n|=1$, применяя формулы (1.3) и (1.4) леммы 1, получим

$$\frac{1}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n+c)^u(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n+d)^v}=\frac{1}{d^v}\sum_{\tau=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^\tau c^\tau\binom{\tau+u-1}{\tau}$$

$$\times\frac{(-1)^q}{d^q}\binom{q+v-1}{q}\frac{(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^q}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n)^{\tau+u}}. \tag{3.8}$$

(1) С учетом (3.8) получаем, что для монома $\xi_k^{s_k}/\xi[k]^{s[k]}$, где $s_1,\dots,s_n\in\mathbb{Z}_+$,

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi^s}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n+c)^u(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n+d)^v}\frac{d\xi}{\xi}$$

$$=\frac{1}{d^v}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{\tau=0}^{\infty}\frac{(-1)^{q+\tau}\,c^\tau}{d^q\,(2\pi i)^n}\frac{(q+v-1)!}{q!(v-1)!}\frac{(\tau+u-1)!}{\tau!(u-1)!}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi_k^{s_k}\cdot(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^q}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n)^{\tau+u}\,\xi[k]^{s[k]}}\frac{d\xi}{\xi}. \tag{3.9}$$

Если $s_k+q\neq\tau+u+|s[k]|$, то интеграл (3.9) равен нулю.

Пусть $s_k+q=\tau+u+|s[k]|$. Рассмотрим два случая: (а) $0\leqslant u+|s[k]|-s_k$. При этом $0\leqslant\tau<\infty$, $u+|s[k]|-s_k\leqslant q<\infty$. (б) $0\leqslant s_k-(u+|s[k]|)$. При этом $0\leqslant q<\infty$, $s_k-(u+|s[k]|)\leqslant\tau<\infty$.

(а) Интеграл (3.9) при условии $0\leqslant u+|s[k]|-s_k$ вычисляется как

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi^s}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n+c)^u(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n+d)^v}\frac{d\xi}{\xi}$$

$(q=\tau+u+|s[k]|-s_k)$

$$=\frac{1}{d^v}\sum_{\tau=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tau+u+|s[k]|-s_k+\tau}\,c^\tau}{d^{\tau+u+|s[k]|-s_k}}\frac{(\tau+u+|s[k]|-s_k+v-1)!}{(\tau+u+|s[k]|-s_k)!(v-1)!}\frac{(\tau+u-1)!}{\tau!(u-1)!}$$

$$\times\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi_k^{s_k}(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^{\tau+u+|s[k]|-s_k}}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n)^{\tau+u}\,\xi[k]^{s[k]}}\frac{d\xi}{\xi}$$

$$=\frac{(-1)^{u+|s[k]|-s_k}}{d^{v+u+|s[k]|-s_k}}\sum_{\tau=0}^{\infty}\left(\frac{c}{d}\right)^\tau\frac{(\tau+u+|s[k]|-s_k+v-1)!}{(\tau+u+|s[k]|-s_k)!(v-1)!}\frac{(\tau+u-1)!}{\tau!(u-1)!}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi_k^{s_k} \cdot (b_1 z_1 \xi_1 + \ldots + b_n z_n \xi_n)^{\tau+u+|s[k]|-s_k}}{(a_1 z_1 \xi_1 + \ldots + a_n z_n \xi_n)^{\tau+u}\, \xi[k]^{s[k]}} \frac{d\xi}{\xi}$$

(применим лемму 6 при $q = \tau + u + |s[k]| - s_k$ и $t = \tau + u$)

$$= \frac{(-1)^{u+|s[k]|-s_k}}{d^{v+u+|s[k]|-s_k}} \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^{\tau} \frac{(\tau + u + |s[k]| - s_k + v - 1)!}{(\tau + u + |s[k]| - s_k)!(v-1)!} \frac{(\tau + u - 1)!}{\tau!(u-1)!}$$

$$\times \frac{z_1^{s_1}..[z_k]..z_n^{s_n}}{z_k^{s_k}} \frac{1}{a_k^{s_k}} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^{\tau+u+|s[k]|-s_k} \frac{(\tau + u + |s[k]| - s_k)!}{(\tau + u - 1)!} \sum_{r=0}^{|s[k]|} (-1)^r \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{|s[k]|-r}$$

$$\times \sum_{|m[k]|=|s[k]|-r} \frac{(r + \tau + u - 1)!}{(\tau + u + |s[k]| - s_k - |s[k]| + r)!\, m[k]!} \frac{b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}\, a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}}{(s-m)[k]!}$$

$$= \frac{z_1^{s_1}..[z_k]..z_n^{s_n}}{z_k^{s_k}} \frac{1}{a_k^{s_k}} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^{u+|s[k]|-s_k} \frac{1}{(u-1)!(v-1)!} \frac{(-1)^{u+|s[k]|-s_k}}{d^{v+u+|s[k]|-s_k}}$$

$$\times \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(\frac{c\, b_k}{d\, a_k}\right)^{\tau} \frac{(\tau + u + |s[k]| - s_k + v - 1)!}{\tau!} \sum_{r=0}^{|s[k]|} (-1)^r \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{|s[k]|-r}$$

$$\times \sum_{|m[k]|=|s[k]|-r} \frac{(r + \tau + u - 1)!}{(\tau + u - s_k + r)!\, m[k]!} \frac{1}{(s-m)[k]!}\, b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}\, a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}. \tag{3.10}$$

(б) $0 \leqslant s_k - (u + |s[k]|)$.

Интеграл (3.9) при условии $0 \leqslant s_k - u - |s[k]|$ вычисляется как

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi^s}{(a_1 z_1 \xi_1 + \ldots + a_n z_n \xi_n + c)^u (b_1 z_1 \xi_1 + \ldots + b_n z_n \xi_n + d)^v} \frac{d\xi}{\xi}$$

$(\tau = q + s_k - u - |s[k]|)$

$$= \frac{1}{d^v} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{q+q+s_k-u-|s[k]|}\, c^{q+s_k-u-|s[k]|}}{d^q} \frac{(q+v-1)!}{q!(v-1)!} \frac{(q + s_k - u - |s[k]| + u - 1)!}{(q + s_k - u - |s[k]|)!(u-1)!}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi_k^{s_k} (b_1 z_1 \xi_1 + \ldots + b_n z_n \xi_n)^q}{(a_1 z_1 \xi_1 + \ldots + a_n z_n \xi_n)^{q+s_k-u-|s[k]|+u}\, \xi[k]^{s[k]}} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \frac{(-1)^{s_k-u-|s[k]|}\, c^{s_k-u-|s[k]|}}{d^v} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{c^q}{d^q} \frac{(q+v-1)!}{q!(v-1)!} \frac{(q + s_k - |s[k]| - 1)!}{(q + s_k - u - |s[k]|)!(u-1)!}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi_k^{s_k}\, (b_1 z_1 \xi_1 + \ldots + b_n z_n \xi_n)^q}{(a_1 z_1 \xi_1 + \ldots + a_n z_n \xi_n)^{q+s_k-|s[k]|}\, \xi[k]^{s[k]}} \frac{d\xi}{\xi}$$

(применим лемму 6 при $t = q + s_k - |s[k]|$)

$$= \frac{(-1)^{s_k-u-|s[k]|} c^{s_k-u-|s[k]|}}{d^v} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^q \frac{(q+v-1)!}{q!(v-1)!} \frac{(q + s_k - |s[k]| - 1)!}{(q + s_k - u - |s[k]|)!(u-1)!}$$

$$\times \frac{z_1^{s_1}..[z_k]..z_n^{s_n}}{z_k^{s_k}} \frac{1}{a_k^{s_k}} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^q \frac{q!}{(q + s_k - |s[k]| - 1)!} \sum_{r=0}^{|s[k]|} (-1)^r \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{|s[k]|-r}$$

$$\times \sum_{|m[k]|=|s[k]|-r} \frac{(r+q+s_k-|s[k]|-1)!}{(q-|s[k]|+r)!\,m[k]!} \frac{1}{(s-m)[k]!} b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}\, a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}$$

$$= \frac{z_1^{s_1}..[z_k]..z_n^{s_n}(-1)^{s_k-u-|s[k]|}c^{s_k-u-|s[k]|}}{z_k^{s_k}a_k^{s_k}d^v(u-1)!(v-1)!} \sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{c\,b_k}{d\,a_k}\right)^q \frac{(q+v-1)!}{(q+s_k-u-|s[k]|)!} \sum_{r=0}^{|s[k]|}(-1)^r\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{|s[k]|-r}$$

$$\times \sum_{|m[k]|=|s[k]|-r} \frac{(r+q+s_k-|s[k]|-1)!}{(q-|s[k]|+r)!m[k]!} \frac{b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}}{(s-m)[k]!} \tag{3.11}$$

Отметим, что при условии $s_k-u-|s[k]|=0$ ответы в случаях (3.10) и (3.11) совпадают.

(2) С учетом (3.8) получаем, что для монома $1/\xi^s$, где $s\in\mathbb{Z}_+^n$,

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi|=1} \frac{1}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n+c)^u(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n+d)^v\xi^s}\frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \frac{1}{d^v}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{\tau=0}^{\infty}\frac{(-1)^{q+\tau}c^\tau}{d^q(2\pi i)^n}\frac{(q+v-1)!}{q!(v-1)!}\frac{(\tau+u-1)!}{\tau!(u-1)!}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^q}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n)^{\tau+u}\xi^s}\frac{d\xi}{\xi}$$

(интеграл не равен нулю только при $q=\tau+u+|s|$)

$$= \frac{1}{d^v}\sum_{\tau=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tau+u+|s|+\tau}c^\tau}{d^{\tau+u+|s|}}\frac{(\tau+u+|s|+v-1)!}{(\tau+u+|s|)!(v-1)!}\frac{(\tau+u-1)!}{\tau!(u-1)!}$$

$$\times\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{(b_1z_1\xi_1+\ldots+b_nz_n\xi_n)^{\tau+u+|s|}}{(a_1z_1\xi_1+\ldots+a_nz_n\xi_n)^{\tau+u}\xi^s}\frac{d\xi}{\xi}$$

(применим лемму 5 при $q=\tau+u+|s|,\ t=\tau+u$ и получим)

$$= z^s b_k^{s_k}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)^u\frac{(-1)^{u+|s|}}{d^{v+u+|s|}}\frac{1}{(v-1)!(u-1)!}\sum_{\tau=0}^{\infty}\left(\frac{c}{d}\right)^\tau\left(\frac{b_k}{a_k}\right)^\tau$$

$$\times\sum_{r=0}^{|s[k]|}(-1)^r\left(\frac{b_k}{a_k}\right)^r\sum_{|m[k]|=|s[k]|-r}\frac{(\tau+u+|s|+v-1)!(r+\tau+u-1)!}{\tau!(\tau+u+s_k+r)!m[k]!(s-m)[k]!}$$

$$\times\, b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n}a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}\ ,\text{где}\, m_1\leqslant s_1,\ ..[k]..,m_n\leqslant s_n. \tag{3.12}$$

Объединяя случаи (1) и (2), точнее формулы (3.10), (3.11) и (3.12) получим утверждение теоремы. □

П р и м е р. Вычислим интеграл

$$J=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\xi_1|=1}\int\limits_{|\xi_2|=1}\frac{d\xi_1\xi_2}{\xi_1^{s_1+1}\xi_2^{s_2+1}(3\xi_1+\xi_2+1)(\xi_1+2\xi_2+4)}=J(1,1),$$

где

$$J(z_1,z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{|\xi_1|=1}\int\limits_{|\xi_2|=1}\frac{1}{\xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}(3\xi_1z_1+\xi_2z_2+1)(\xi_1z_1+2\xi_2z_2+4)}\frac{d\xi_1}{\xi_1}\frac{d\xi_2}{\xi_2}.$$

Рассмотрим в $\mathbb{C}^2$ комплексные плоскости $V_1=\{3z_1+z_2+1=0\}$, $V_2=\{z_1+2z_2+4=0\}$ и их проекции в $\mathbb{R}_+^2$:

$$|V_1|=\begin{cases}3|z_1|-|z_2|-1\leqslant 0,\\-3|z_1|+|z_2|-1\leqslant 0,\\-3|z_1|-|z_2|+1\leqslant 0,\end{cases}\quad |V_2|=\begin{cases}|z_1|-2|z_2|-4\leqslant 0,\\-|z_1|+2|z_2|-4\leqslant 0,\\-|z_1|-2|z_2|+4\leqslant 0.\end{cases}$$

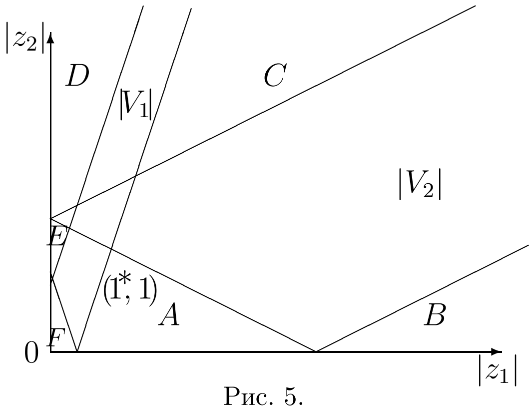


Рис. 5.

Множества $|V_1|$, $|V_2|$ разбивают $\mathbb{R}^2_+$ на 6 частей (см. рис 5): $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, причем проекция точки $(1,1) \in \mathbb{C}^2$ в $\mathbb{R}^2_+$ есть точка $(1,1) \in \mathbb{R}^2_+$, которая на рис. 5 обозначена символом $*$, т.е. $\pi(1,1) = *(1,1) \in A$.

Множествам $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ с помощью функций $T(V_1;G)$, $T(V_2;G)$ сопоставим пары чисел и получим $A(1,3)$, $B(1,1)$, $C(1,2)$, $D(2,2)$, $E(2,3)$, $F(3,3)$. Так как $\pi(1,1) = * \in A(1,3)$, то применим формулу (3.7):

$$J(z_1,z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|\xi_1|=1} \int\limits_{|\xi_2|=1} \frac{1}{\xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}(3\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + 1)(\xi_1 z_1 + 2\xi_2 z_2 + 4)} \frac{d\xi_1}{\xi_1}\frac{d\xi_2}{\xi_2} =$$

$$= z^s b_k^{s_k} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^u \frac{(-1)^{u+|s|}}{d^{v+u+|s|}} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{(\tau+u-1)!}{\tau!(u-1)!} \left(\frac{c}{d}\right)^\tau \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^\tau \sum_{r=0}^{|s[k]|} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^r$$

$$\times \sum_{|m[k]|=|s[k]|-r} \frac{(\tau+u+|s|+v-1)!}{(\tau+u+s_k+r)!(v-1)!m[k]!} \frac{r!}{(s-m)[k]!} b_1^{m_1}..[b_k]..b_n^{m_n} a_1^{s_1-m_1}..[a_k]..a_n^{s_n-m_n}$$

(при $u=v=1$, $k=1$, $a_1=3$, $a_2=1$, $c=1$, $b_1=1$, $b_2=2$, $d=4$)

$$= z_1^{s_1} z_2^{s_2} \frac{1}{3} \frac{(-1)^{s_1+s_2+1}}{2^{4+2s_1+s_2}} \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^\tau \sum_{r=0}^{s_2} \left(\frac{1}{6}\right)^r \frac{(\tau+s_1+s_2+1)!}{(\tau+s_1+r+1)!(s_2-r)!}.$$

Тогда интеграл

$$J = J(1,1) = \frac{1}{3} \frac{(-1)^{s_1+s_2+1}}{2^{4+2s_1+s_2}} \sum_{\tau=0}^{\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^\tau \sum_{r=0}^{s_2} \left(\frac{1}{6}\right)^r \frac{(\tau+s_1+s_2+1)!}{(\tau+s_1+r+1)!(s_2-r)!}.$$

## Заключение

Нужно отметить, что теоремы 1 и 2 описывают при $n=2$ только половину возможных случаев, т.е. рассматриваются случаи $T(n+1,\ldots,n+1;G)$ и $T(k,n+1;G)$, $k<n+1$. Однако при $n=2$ еще могут быть случаи $T(k,k;G)$, $k<n+1$ и $T(k_1,k_2;G)$, $k_1<n+1$, $k_2<n+1$.

Г и п о т е з а. Для мономов, голоморфных в окрестности остова единичного полицилиндра, равенство (3.7) можно представить в виде суммы, содержащей конечное число слагаемых.

Справедливость гипотезы при $n=1$ следует из возможности разложения дроби $1/(x+a)(x+b)$ на сумму двух дробей $A/(x+a)$ и $B/(x+b)$.

Автор признателен своим коллегам Г. П. Егорычеву, Е. К. Лейнартасу, В. А. Степаненко за обсуждение основных результатов этой работы и ряд полезных замечаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Айзенберг Л.А., Южаков А.П.** Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1979. 366 с.
2. **Егорычев Г.П.** Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1977. 271 с.
3. **Krivokolesko V.P.** Method for obtaining combinatorial identities with polynomial coefficients by the means of integral representations // Журн. Сиб. федерального ун-та. Сер. Математика и физика. 2016. Vol. 9(2). С. 192–201.
4. **Фам Ф.** Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М.: Мир, 1967. 184 с.
5. **Хуа Р, Теплиц В.** Гомологии и фейнмановские интегралы. М.: Мир, 1969. 229 с.
6. **Кривоколеско В. П.** Интегральные представления в линейно выпуклых полиэдрах и некоторые комбинаторные тождества // Журн. Сиб. федерального ун-та. Сер. Математика и физика. 2009. Vol. 2(2). С. 176–188.
7. **Кривоколеско В.П., Цих А.К.** Интегральные представления в линейно выпуклых полиэдрах// Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 579–593.
8. **Forsberg M., Passare M., Tsikh A.** Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Advances in Math. 2000. Vol. 151. P. 45–70.
9. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969. 576 с.
10. **Tsikh A. K.** Multidimensional residues and their applications. Providence: Amer. Math. Soc., 1992. 188 p. ISBN: 978-0-8218-4560-8 .



Кривоколеско Вячеслав Павлович
канд. физ.- мат. наук, доцент
доцент
Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск
e-mail: krivokolesko@gmail.com


Поступила 9.10.2017

## REFERENCES


1. Aizenberg L.A., Yuzhakov A.P. *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis.* Providence, AMS, 1983, 283 p. ISBN: 978-0-8218-1550-2 . Original Russian text published in Aizenberg L.A., Yuzhakov A.P. *Integral'nye predstavleniya i vychety v mnogomernom kompleksnom analize*, Novosibirsk, Nauka Publ. (Sibirsk. Otdel.), 1979, 366 p.
2. Egorychev G.P. *Integral representation and the computation of combinatorial sums.* Transl. Math. Monographs, vol. 59. Providence, AMS, 1984, 286 p. ISBN: 0821845128 . Original Russian text published in Egorychev G.P. *Integral'noe predstavlenie i vychislenie kombinatornykh summ.* Nauka Publ. (Sibirsk. Otdel.), 1977, 271 p.
3. Krivokolesko V.P. Method for obtaining combinatorial identities with polynomial coefficients by the means of integral representations. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 192–201. doi: 10.17516/1997-1397-2016-9-2-192-201 .
4. Pham F. *Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau.* [Introduction a l'etude topologique des singularites de Landau]. Paris, Gauthier Villars, 1967, 141 p. ISBN: 286883762X . Translated to Russian under the title *Vvedenie v topologicheskoe issledovanie osobennostei Landau*, Moscow, Mir Publ., 1967, 184 p.
5. Hwa R., Teplitz V. *Homology and Feynman Integrals.* [Mathematical Physics Monograph Series]. New York, Amsterdam, Benjamin, 1966, 331 p. ISBN: 9780805347500 . Translated to Russian under the title *Gomologii i feinmanovskie integraly.* Moscow, Mir Publ., 1969, 229 p.
6. Krivokolesko V.P. Integral representations for linearly convex polyhedra and some combinatorial identities. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2009, vol. 2, no. 2, pp. 176–188 (in Russian).
7. Krivokolesko V.P., Tsikh A.K. Integral representations in linearly convex polyhedra. *Sib. Math. J.*, 2005, vol. 46, no. 3, pp. 453–466. doi: 10.1007/s11202-005-0048-4 .
8. Forsberg M., Passare M., Tsikh A. Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas. *Advances in Math.*, 2000, vol. 151, no. 1, pp. 45–70. doi: 10.1006/aima.1999.1856 .

9. Shabat B.V. *Introduction to complex analysis. Part II: Functions of several variables.* Providence, AMS, 1992, 371 p. ISBN: 082189739X. Original Russian text (Parts I,II, 1st ed.) published in *Vvedenie v kompleksnyi analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1969, 576 p.
10. Tsikh A.K. *Multidimensional residues and their applications.* Providence, AMS, 1992, 188 p. ISBN: 978-0-8218-4560-8.

The paper was received by the Editorial Office on October 9, 2017.

Viacheslav Pavlovich Krivokolesko, Cand. Sci. ( Phys.-Math.), Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: krivokolesko@gmail.com.