ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 2 2018

УДК 517.972

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С НЕЯВНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ, ЗАДАННЫМИ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ФУНКЦИЯМИ[1]

А. А. Ковалевский

Для функционалов, определенных на переменных пространствах Соболева, установлен ряд результатов о сходимости их минимизантов и минимальных значений на множествах функций, подчиненных неявным ограничениям посредством периодических быстро осциллирующих функций. В связи с формулировкой и обоснованием этих результатов введено определение Γ-сходимости функционалов, соответствующее заданным множествам ограничений. Специфика введенного определения заключается в том, что в нем идет речь о сходимости последовательности функционалов, определенных на переменных пространствах Соболева, к некоторой функции на вещественной прямой. Рассмотренные задачи минимизации имеют ту особенность, что для обоснования сходимости последовательности их решений сильная связанность областей определения соответствующих функционалов не требуется, тогда как эта связанность существенна, например, при исследовании сходимости решений вариационных задач Неймана и вариационных задач с явными односторонними и двусторонними ограничениями в переменных областях. Кроме упомянутых результатов, установлены также теоремы Γ-компактности последовательностей функционалов относительно заданных множеств ограничений.

Ключевые слова: вариационная задача, неявное ограничение, переменные области, функционал, минимизант, минимальное значение, Γ-сходимость.

A. A. Kovalevsky. On the convergence of solutions of variational problems with implicit constraints defined by rapidly oscillating functions.

For functionals defined on variable Sobolev spaces, we establish a series of results on the convergence of their minimizers and minimum values on sets of functions subject to implicit constraints by means of periodic rapidly oscillating functions. In connection with the formulation and justification of these results, we introduce the definition of Γ-convergence of functionals corresponding to the given sets of constraints. The specificity of the introduced definition is that it refers to the convergence of a sequence of functionals defined on variable Sobolev spaces to a function on the real line. The considered minimization problems have the feature that, to justify the convergence of a sequence of their solutions, the strong connectedness of the domains of definition of the corresponding functionals is not required, while this connectedness is essential, for instance, in the study of the convergence of solutions of the Neumann variational problems and variational problems with explicit unilateral and bilateral constraints in variable domains. In addition to the mentioned results, we establish theorems on the Γ-compactness of sequences of functionals with respect to the given sets of constraints.

Keywords: variational problem, implicit constraint, variable domains, functional, minimizer, minimum value, Γ-convergence.

MSC: 49J40, 49J45

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-107-122

Введение

Исследование сходимости решений вариационных задач с ограничениями для интегральных функционалов, определенных на пространствах Соболева, и решений соответствующих вариационных неравенств является одним из важных вопросов теории многомерного усреднения (см., например, [1–6] относительно задач минимизации и вариационных неравенств с явными односторонними и двусторонними препятствиями).

[1]Работа выполнена при поддержке госбюджетного проекта “Развитие концепции позиционного управления, минимаксного подхода и сингулярных возмущений в теории дифференциальных уравнений” и Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение с Минобрнауки РФ 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

В настоящей работе для общих (не обязательно интегральных) функционалов, определенных на переменных пространствах Соболева, установлен ряд результатов о сходимости их минимизантов и минимальных значений на множествах функций, подчиненных неявным ограничениям посредством периодических быстро осциллирующих функций. Насколько нам известно, поведение решений вариационных задач с такими множествами ограничений ранее не изучалось.

Для формулировки и обоснования результатов нами введено понятие Г-сходимости функционалов, соответствующее заданным множествам ограничений. В некоторых отношениях это понятие близко к понятию Г-сходимости, введенному в [7] для абстрактных функционалов с переменной областью определения и являющемуся, в свою очередь, аналогом широко известного понятия Г-сходимости функционалов с единой областью определения (см., например, [8]). Сама же специфика определения Г-сходимости, введенного в настоящей статье, заключается в том, что в нем идет речь о сходимости последовательности функционалов, определенных на переменных пространствах Соболева, к некоторой функции на вещественной прямой.

Особенностью рассмотренных задач минимизации является то, что для обоснования сходимости последовательности их решений не требуется условие сильной связанности областей определения соответствующих функционалов, тогда как, например, при исследовании сходимости решений вариационных задач Неймана и вариационных задач с явными односторонними и двусторонними ограничениями в переменных областях это условие существенно (см. [9], а также [2; 5]).

Настоящая статья состоит из двух разделов. В разд. 1 доказаны два общих предложения для функций из пространств Соболева. Эти предложения весьма полезны для основных целей работы. Раздел 2 непосредственно посвящен рассмотрению вопроса, вынесенного в заголовок статьи. Здесь сформулированы необходимые предположения и определения, введены и изучены интересующие нас множества ограничений и изложены основные результаты работы и некоторые их следствия для функционалов специального вида.

1. Некоторые общие предложения

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, и пусть $p > 1$.

Предложение 1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что вложение $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$ компактно. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, и пусть $\lambda_1 < \lambda_2$. Предположим, что* $\operatorname{meas}\{v \leqslant \lambda_1\} > 0$ *и* $\operatorname{meas}\{v \geqslant \lambda_2\} > 0$. *Тогда* $\operatorname{meas}\{\lambda_1 < v < \lambda_2\} > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего напомним неравенство Пуанкаре для элементов пространства $W^{1,p}(\Omega)$. Для любой функции $w \in W^{1,p}(\Omega)$ обозначим через $\langle w \rangle$ ее среднее значение по Ω. Ввиду предположения о компактности вложения $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$ существует положительное число c такое, что

$$\forall w \in W^{1,p}(\Omega) \qquad \int\limits_{\Omega} |w - \langle w \rangle|^p \, dx \leqslant c \int\limits_{\Omega} |\nabla w|^p \, dx. \tag{1.1}$$

Это утверждение легко доказывается от противного. При этом именно предположение о компактности вложения $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$ играет ключевую роль (в связи с этим см., например, [10, разд. 5.8, теорема 1]).

Далее, пусть φ — функция из $C^1(\mathbb{R})$ такая, что

$$\varphi(t) = 0, \text{ если } t \leqslant \lambda_1, \tag{1.2}$$

$$\varphi(t) = 1, \text{ если } t \geqslant \lambda_2. \tag{1.3}$$

Имеем $\varphi(v) \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\nabla\varphi(v) = \varphi'(v)\nabla v$ п.в. в Ω. Тогда, полагая $\alpha = \langle\varphi(v)\rangle$ и используя (1.1), получаем

$$\int\limits_\Omega |\varphi(v) - \alpha|^p\,dx \leqslant c\int\limits_\Omega |\varphi'(v)|^p|\nabla v|^p\,dx. \tag{1.4}$$

Ясно, что

$$\int\limits_\Omega |\varphi'(v)|^p|\nabla v|^p\,dx = \int\limits_{\{v\leqslant\lambda_1\}} |\varphi'(v)|^p|\nabla v|^p\,dx + \int\limits_{\{\lambda_1<v<\lambda_2\}} |\varphi'(v)|^p|\nabla v|^p\,dx$$

$$+ \int\limits_{\{v\geqslant\lambda_2\}} |\varphi'(v)|^p|\nabla v|^p\,dx. \tag{1.5}$$

Поскольку в силу (1.2) и (1.3) имеем $\varphi' = 0$ в $(-\infty, \lambda_1] \cup [\lambda_2, +\infty)$, из (1.4) и (1.5) выводим, что

$$\int\limits_\Omega |\varphi(v) - \alpha|^p\,dx \leqslant c\int\limits_{\{\lambda_1<v<\lambda_2\}} |\varphi'(v)|^p|\nabla v|^p\,dx. \tag{1.6}$$

Предположим, что $\operatorname{meas}\{\lambda_1 < v < \lambda_2\} = 0$. Тогда ввиду (1.6) существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \Omega \setminus E \qquad \varphi(v(x)) = \alpha. \tag{1.7}$$

Поскольку $\operatorname{meas}\{v \leqslant \lambda_1\} > 0$ и $\operatorname{meas}\{v \geqslant \lambda_2\} > 0$, имеем $\{v \leqslant \lambda_1\} \setminus E \neq \varnothing$ и $\{v \geqslant \lambda_2\} \setminus E \neq \varnothing$. Взяв $x \in \{v \leqslant \lambda_1\} \setminus E$ и $y \in \{v \geqslant \lambda_2\} \setminus E$, в силу (1.2) и (1.3) имеем $\varphi(v(x)) \neq \varphi(v(y))$. С другой стороны, так как $x \in \Omega \setminus E$ и $y \in \Omega \setminus E$, то из (1.7) следует равенство $\varphi(v(x)) = \varphi(v(y))$. Полученное противоречие доказывает, что $\operatorname{meas}\{\lambda_1 < v < \lambda_2\} > 0$. □

Для любой функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим $\Phi(h) = \{t \in \mathbb{R} : h(t) \leqslant 0\}$. Кроме того, введем следующее обозначение: если $\mathcal{E}$ — область в $\mathbb{R}^n$ и $v : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, то

$$\underline{m}(v) = \operatorname*{ess\,inf}_{\mathcal{E}} v, \qquad \overline{m}(v) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathcal{E}} v.$$

Легко видеть, что если $\mathcal{E}$ — область в $\mathbb{R}^n$ и $v : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, то $\underline{m}(v) \leqslant \overline{m}(v)$.

Предложение 2. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что вложение $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$ компактно. Пусть $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция такая, что множество $\Phi(h)$ непусто и замкнуто. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$, и пусть $h(v) \leqslant 0$ п.в. в Ω. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a_1) *если $\underline{m}(v) < \overline{m}(v)$, то $(\underline{m}(v), \overline{m}(v)) \subset \Phi(h)$;*

(a_2) *если $\underline{m}(v) \in \mathbb{R}$, то $\underline{m}(v) \in \Phi(h)$;*

(a_3) *если $\overline{m}(v) \in \mathbb{R}$, то $\overline{m}(v) \in \Phi(h)$;*

(a_4) *если $\underline{m}(v), \overline{m}(v) \in \mathbb{R}$, то $[\underline{m}(v), \overline{m}(v)] \subset \Phi(h)$.*

Доказательство. Поскольку $h(v) \leqslant 0$ п.в. в Ω, существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \Omega \setminus E \qquad h(v(x)) \leqslant 0. \tag{1.8}$$

Пусть $\underline{m}(v) < \overline{m}(v)$. Предположим, что существует $t_0 \in (\underline{m}(v), \overline{m}(v))$ такое, что $h(t_0) > 0$. Тогда ввиду замкнутости множества $\Phi(h)$ существуют $t', t'' \in \mathbb{R}$ такие, что $\underline{m}(v) < t' < t'' < \overline{m}(v)$ и

$$\forall t \in (t', t'') \qquad h(t) > 0. \tag{1.9}$$

Ясно, что $\operatorname{meas}\{v \leqslant t'\} > 0$ и $\operatorname{meas}\{v \geqslant t''\} > 0$. Тогда в силу предложения 1 мера множества $\{t' < v < t''\}$ положительна. Следовательно, $\{t' < v < t''\} \setminus E \neq \varnothing$. Взяв $x \in \{t' < v < t''\} \setminus E$, имеем $v(x) \in (t', t'')$. Отсюда и из (1.9) вытекает, что $h(v(x)) > 0$. С другой стороны, ввиду (1.8) имеем $h(v(x)) \leqslant 0$. Полученное противоречие доказывает, что $(\underline{m}(v), \overline{m}(v)) \subset \Phi(h)$. Таким образом, утверждение (a_1) справедливо.

Далее, пусть $\underline{m}(v) \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\underline{m}(v) < \overline{m}(v)$. Тогда в силу утверждения (a_1) имеем $(\underline{m}(v), \overline{m}(v)) \subset \Phi(h)$. Отсюда, используя замкнутость множества $\Phi(h)$, выводим, что $\underline{m}(v) \in \Phi(h)$. Теперь пусть $\underline{m}(v) = \overline{m}(v)$. Тогда $v = \underline{m}(v)$ п.в. в Ω. Отсюда и из (1.8) следует то же включение $\underline{m}(v) \in \Phi(h)$. Таким образом, утверждение (a_2) справедливо.

Доказательство утверждения (a_3) аналогично доказательству утверждения (a_2). Наконец, утверждение (a_4) следует из утверждений (a_1)–(a_3). $\square$

2. Вариационные задачи с неявными ограничениями

2.1. Множества ограничений и их свойства

Пусть $\{\Omega_s\}$ — последовательность ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что выполняются следующие условия:

(C_1) для любого $s \in \mathbb{N}$ вложение $W^{1,p}(\Omega_s)$ в $L^p(\Omega_s)$ компактно;

(C_2) существуют $m_1, m_2 > 0$ такие, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $m_1 \leqslant \operatorname{meas} \Omega_s \leqslant m_2$.

Пусть $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — периодическая функция с периодом T. Предположим, что выполняются следующие условия:

(C_3) множество $\Phi(a)$ непусто и замкнуто;

(C_4) множество $\mathbb{R} \setminus \Phi(a)$ непусто.

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$U_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) : a(sv) \leqslant 0 \text{ п.в. в } \Omega_s\}.$$

Докажем несколько предложений о свойствах множеств U_s.

Предложение 3. *Для любого $s \in \mathbb{N}$ множество U_s непусто и секвенциально слабо замкнуто.*

Доказательство. Пусть $s \in \mathbb{N}$. В силу условия (C_3) существует $r \in \mathbb{R}$ такое, что $a(r) \leqslant 0$. Пусть $z : \Omega_s \to \mathbb{R}$ — функция такая, что для любого $x \in \Omega_s$ имеем $z(x) = r/s$. Ясно, что $z \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и $a(sz) \leqslant 0$ в Ω_s. Следовательно, $z \in U_s$. Значит, множество U_s непусто.

Далее, пусть $\{v_j\} \subset U_s$, $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$, и пусть $v_j \to v$ слабо в $W^{1,p}(\Omega_s)$. Зафиксируем произвольный открытый шар $B \subset \Omega_s$. Имеем $v_j|_B \to v|_B$ слабо в $W^{1,p}(B)$. Тогда $v_j|_B \to v|_B$ сильно в $L^p(B)$. Поэтому ввиду включения $\{v_j\} \subset U_s$ существуют множество $E \subset B$ меры нуль и возрастающая последовательность $\{j_k\} \subset \mathbb{N}$ такие, что для любого $x \in B \setminus E$ имеем $v_{j_k}(x) \to v(x)$ и $\{sv_{j_k}(x)\} \subset \Phi(a)$. Тогда в силу условия ($\mathrm{C}_3$) для любого $x \in B \setminus E$ имеем $a(sv(x)) \leqslant 0$. Отсюда, учитывая произвольность B, выводим, что $a(sv) \leqslant 0$ п.в. в Ω_s. Следовательно, $v \in U_s$. Значит, множество U_s секвенциально слабо замкнуто. $\square$

Предложение 4. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $v \in U_s$. Тогда $\underline{m}(v) \in \mathbb{R}$, $\overline{m}(v) \in \mathbb{R}$ и $\overline{m}(v) - \underline{m}(v) \leqslant T/s$.*

Доказательство. Пусть $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция такая, что для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем $h(t) = a(st)$. В силу условия (C_3) множество $\Phi(h)$ непусто и замкнуто. Кроме того, ввиду включения $v \in U_s$ имеем $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и $h(v) \leqslant 0$ п.в. в Ω_s. Тогда, учитывая условие (C_1), из предложения 2 выводим, что справедливо следующее утверждение: (i) если $\underline{m}(v) < \overline{m}(v)$, то $(\underline{m}(v), \overline{m}(v)) \subset \Phi(h)$.

Предположим, что $\underline{m}(v) < \overline{m}(v)$. Тогда в силу утверждения (i) имеем

$$(\underline{m}(v), \overline{m}(v)) \subset \Phi(h). \tag{2.1}$$

Зафиксируем $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\underline{m}(v) < t_1 < t_2 < \overline{m}(v). \tag{2.2}$$

Допустим, что $t_2 - t_1 \geqslant T/s$. Ввиду условия (C_4) существует $r \in \mathbb{R}$ такое, что $a(r) > 0$. Положим

$$k_s = \min\Big\{k \in \mathbb{Z} : \frac{st_1 - r}{T} \leqslant k\Big\}, \qquad r_s = \frac{k_s T + r}{s}\,.$$

Имеем $t_1 \leqslant r_s < t_1 + T/s$. Отсюда и из неравенства $t_2 - t_1 \geqslant T/s$ вытекает, что $r_s \in [t_1, t_2]$. Тогда в силу (2.1) и (2.2) имеем $r_s \in \Phi(h)$. Следовательно, $a(k_s T + r) \leqslant 0$. Поэтому ввиду периодичности функции a имеем $a(r) \leqslant 0$, что противоречит исходному неравенству для $a(r)$. Полученное противоречие доказывает, что $t_2 - t_1 < T/s$. Таким образом, установлена импликация

$$t_1, t_2 \in \mathbb{R},\ \underline{m}(v) < t_1 < t_2 < \overline{m}(v) \Longrightarrow t_2 - t_1 < \frac{T}{s}\,. \tag{2.3}$$

Отсюда сразу следует, что $\underline{m}(v) \in \mathbb{R}$ и $\overline{m}(v) \in \mathbb{R}$. Зафиксируем произвольное положительное число ε такое, что $2\varepsilon < \overline{m}(v) - \underline{m}(v)$, и положим $t_1 = \underline{m}(v) + \varepsilon$ и $t_2 = \overline{m}(v) - \varepsilon$. Имеем $\underline{m}(v) < t_1 < t_2 < \overline{m}(v)$. Поэтому в силу (2.3) справедливо неравенство $t_2 - t_1 < T/s$. Следовательно, $\overline{m}(v) - \underline{m}(v) < T/s + 2\varepsilon$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство $\overline{m}(v) - \underline{m}(v) \leqslant T/s$.

Теперь пусть $\underline{m}(v) = \overline{m}(v)$. Легко видеть, что в этом случае $\underline{m}(v) \in \mathbb{R}$ и $\overline{m}(v) \in \mathbb{R}$. Ясно также, что $\overline{m}(v) - \underline{m}(v) \leqslant T/s$. □

Предложение 5. *Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $U_s \subset L^\infty(\Omega_s)$.*

Этот результат является простым следствием предложения 4.

Предложение 6. *Пусть $t \in \mathbb{R}$. Тогда существует последовательность $z_s \in U_s$ такая, что $\|z_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия (C_3) существует $r \in \mathbb{R}$ такое, что $a(r) \leqslant 0$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $t_s = \left[\dfrac{st}{T}\right]\dfrac{T}{s} + \dfrac{r}{s}$, где $[k]$ — целая часть числа k. Теперь пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $z_s : \Omega_s \to \mathbb{R}$ — функция такая, что для любого $x \in \Omega_s$ имеем $z_s(x) = t_s$. Ввиду периодичности функции a и неравенства $a(r) \leqslant 0$ для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $z_s \in U_s$. Кроме того, для любого $s \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|t_s - t| < (T + |r|)/s$. Поэтому, учитывая определение функций z_s и используя условие (C_2), находим, что $\|z_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. □

Предложение 7. *Пусть имеем последовательность $v_s \in U_s$ такую, что последовательность норм $\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена. Тогда последовательности $\{\underline{m}(v_s)\}$ и $\{\overline{m}(v_s)\}$ ограничены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 4 имеем $\{\underline{m}(v_s)\} \subset \mathbb{R}$, $\{\overline{m}(v_s)\} \subset \mathbb{R}$ и

$$\forall s \in \mathbb{N} \qquad \overline{m}(v_s) - \underline{m}(v_s) \leqslant T. \tag{2.4}$$

Предположим, что последовательность $\{\underline{m}(v_s)\}$ не ограничена снизу. Тогда существует возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \underline{m}(v_{s_j}) < -T - j. \tag{2.5}$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. Из (2.4) и (2.5) вытекает, что $\overline{m}(v_{s_j}) < -j$. Следовательно, $|v_{s_j}| \geqslant j$ п.в. в Ω_{s_j}. Поэтому $\|v_{s_j}\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \geqslant j(\operatorname{meas}\Omega_{s_j})^{1/p}$. Теперь, учитывая условие (C_2), заключаем, что для любого $j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\|v_{s_j}\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \geqslant j m_1^{1/p}$. Значит, $\|v_{s_j}\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to +\infty$.

Но это противоречит ограниченности последовательности норм $\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)}$. Полученное противоречие доказывает, что последовательность $\{\underline{m}(v_s)\}$ ограничена снизу.

Далее, предположим, что последовательность $\{\overline{m}(v_s)\}$ не ограничена сверху. Тогда существует возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ такая, что для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{m}(v_{s_j}) > T + j$. Поэтому ввиду (2.4) для любого $j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\underline{m}(v_{s_j}) > j$. Отсюда и из условия (C_2) вытекает, что $\|v_{s_j}\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to +\infty$. Но это противоречит ограниченности последовательности норм $\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)}$. Полученное противоречие доказывает, что последовательность $\{\overline{m}(v_s)\}$ ограничена сверху.

Поскольку для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\underline{m}(v_s) \leqslant \overline{m}(v_s)$, из ограниченности снизу последовательности $\{\underline{m}(v_s)\}$ и ограниченности сверху последовательности $\{\overline{m}(v_s)\}$ выводим, что последовательности $\{\underline{m}(v_s)\}$ и $\{\overline{m}(v_s)\}$ ограничены. □

Предложение 8. *Пусть имеем последовательность $v_s \in U_s$ такую, что последовательность норм $\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена. Пусть $\{\bar{s}_k\}$ — возрастающая последовательность в $\mathbb{N}$. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \{\bar{s}_k\}$ и число $t \in \mathbb{R}$ такие, что $\|v_{s_j} - t\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$ и $\|v_{s_j} - t\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 7 последовательность $\{\underline{m}(v_s)\}$ ограничена. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \{\bar{s}_k\}$ и число $t \in \mathbb{R}$ такие, что $\underline{m}(v_{s_j}) \to t$. Ясно, что для любого $j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\underline{m}(v_{s_j}) \leqslant \overline{m}(v_{s_j})$. Кроме того, вследствие предложения 4 для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{m}(v_{s_j}) - \underline{m}(v_{s_j}) \leqslant T/s_j$. Теперь заключаем, что $\overline{m}(v_{s_j}) \to t$. Далее, для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $\underline{m}(v_{s_j}) \leqslant v_{s_j} \leqslant \overline{m}(v_{s_j})$ п.в. в Ω_{s_j}. Следовательно, для любого $j \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\|v_{s_j} - t\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \leqslant (|\underline{m}(v_{s_j}) - t| + |\overline{m}(v_{s_j}) - t|)(\operatorname{meas} \Omega_{s_j})^{1/p},$$

$$\|v_{s_j} - t\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \leqslant |\underline{m}(v_{s_j}) - t| + |\overline{m}(v_{s_j}) - t|.$$

Отсюда, используя соотношения $\underline{m}(v_{s_j}) \to t$ и $\overline{m}(v_{s_j}) \to t$ и условие (C_2), выводим, что $\|v_{s_j} - t\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$ и $\|v_{s_j} - t\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0$. □

Предложение 9. *Пусть имеем последовательность $v_s \in U_s$, и пусть $t \in \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*: (i) $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$; (ii) $\|v_s - t\|_{L^\infty(\Omega_s)} \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть справедливо утверждение (i). Предположим, что утверждение (ii) не справедливо. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность $\{\bar{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ такие, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|v_{\bar{s}_k} - t\|_{L^\infty(\Omega_{\bar{s}_k})} \geqslant \varepsilon. \tag{2.6}$$

В силу утверждения (i) и условия (C_2) последовательность норм $\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена. Поэтому ввиду предложения 8 существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \{\bar{s}_k\}$ и число $r \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\|v_{s_j} - r\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0, \qquad \|v_{s_j} - r\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0. \tag{2.7}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $|t - r|(\operatorname{meas} \Omega_s)^{1/p} \leqslant \|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} + \|v_s - r\|_{L^p(\Omega_s)}$. Отсюда, используя условие (C_2), утверждение (i) и первое из соотношений (2.7), выводим, что $t = r$. Следовательно, в силу второго из соотношений (2.7) имеем $\|v_{s_j} - t\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0$, что противоречит (2.6). Полученное противоречие доказывает, что утверждение (ii) справедливо.

Теперь пусть справедливо утверждение (ii). Учитывая условие (C_2), для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \leqslant m_2^{1/p}\|v_s - t\|_{L^\infty(\Omega_s)}$. Отсюда и из утверждения (ii) выводим, что утверждение (i) справедливо. □

2.2. Γ-сходимость функционалов

Введем определение Γ-сходимости функционалов, подходящее для исследования сходимости минимизантов и минимальных значений этих функционалов на множествах U_s.

Определение 1. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $J_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$, и пусть $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что последовательность $\{J_s\}$ Γ-сходится к функции β относительно последовательности $\{U_s\}$, если выполняются следующие условия:

(a) для любого $t \in \mathbb{R}$ существует последовательность $w_s \in U_s$ такая, что $\|w_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ и $J_s(w_s) \to \beta(t)$;

(b) для любого $t \in \mathbb{R}$ и любой последовательности $v_s \in U_s$ такой, что $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$, имеем $\liminf\limits_{s\to\infty} J_s(v_s) \geqslant \beta(t)$.

Отметим без доказательства несколько простых свойств Γ-сходимости функционалов относительно последовательности $\{U_s\}$.

Предложение 10. *Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $J_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$, и пусть $\beta_1, \beta_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Предположим, что последовательность $\{J_s\}$ Γ-сходится к функциям β_1 и β_2 относительно последовательности $\{U_s\}$. Тогда $\beta_1 = \beta_2$.*

Предложение 11. *Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $J_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$, и пусть $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Предположим, что последовательность $\{J_s\}$ Γ-сходится к функции β относительно последовательности $\{U_s\}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *функция β полунепрерывна снизу*;

(ii) *если Ψ — неубывающая полунепрерывная снизу функция на $[0, +\infty)$ и для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $J_s(v) \geqslant \Psi(\|v\|_{L^p(\Omega_s)})$, то для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\beta(t) \geqslant \Psi(m_1^{1/p}|t|)$*;

(iii) *если Ψ — неубывающая полунепрерывная сверху функция на $[0, +\infty)$ и для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $J_s(v) \leqslant \Psi(\|v\|_{L^p(\Omega_s)})$, то для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\beta(t) \leqslant \Psi(m_2^{1/p}|t|)$.*

Свойства, указанные в предложении 11, аналогичны соответствующим свойствам Γ-сходимости функционалов, определенных на одном и том же метрическом пространстве (см., например, [8]). Наиболее важными общими свойствами Γ-сходимости функционалов, определенных на тех или иных пространствах, являются вариационное свойство и свойство компактности. Вариационное свойство заключается в том, что при некоторых естественных предположениях Γ-сходимость функционалов сопровождается сходимостью минимизантов и минимальных значений этих функционалов (см., например, [7; 8]). Приведенные ниже теоремы 1 и 2 выражают это свойство в случае Γ-сходимости функционалов в смысле определения 1. Под свойством компактности понимается возможность выбора из последовательностей функционалов Γ-сходящихся подпоследовательностей. Некоторые теоремы Γ-компактности для интегральных функционалов, определенных на пространствах Соболева, доказаны в [11; 12]. В настоящей работе также установлено несколько теорем Γ-компактности. Эти теоремы, как и другие результаты работы, относятся к случаю, который ранее не изучался. Для формулировки теорем Γ-компактности в рассматриваемом нами случае введем следующее определение.

Определение 2. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $J_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$, и пусть $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть $\{s_k\}$ — возрастающая последовательность в $\mathbb{N}$. Будем говорить, что последовательность $\{J_{s_k}\}$ Γ-сходится к функции β относительно последовательности $\{U_s\}$, если выполняются следующие условия:

(a) для любого $t \in \mathbb{R}$ существует последовательность $w_s \in U_s$ такая, что $\|w_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ и $J_{s_k}(w_{s_k}) \to \beta(t)$;

(b) для любого $t \in \mathbb{R}$ и любой последовательности $v_s \in U_s$ такой, что $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$, имеем $\liminf\limits_{k\to\infty} J_{s_k}(v_{s_k}) \geqslant \beta(t)$.

2.3. Основные результаты

Сначала докажем две общие теоремы для функционалов, определенных на пространствах $W^{1,p}(\Omega_s)$, без каких-либо предположений относительно структуры этих функционалов.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $I_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал такой, что $I_s(v) \to +\infty$ при $\|v\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} \to +\infty$.

Ввиду указанных свойств функционалов I_s, предложения 3 и известных результатов о существовании минимизантов функционалов (см., например, [13, § 9]) для любого $s \in \mathbb{N}$ существует функция, принадлежащая множеству U_s и минимизирующая функционал I_s на этом множестве.

Теорема 1. *Предположим, что существует функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что последовательность $\{I_s\}$ Γ-сходится к функции φ относительно последовательности $\{U_s\}$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция в U_s, минимизирующая функционал I_s на множестве U_s. Предположим, что последовательность норм $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена. Пусть $\{\bar{s}_k\}$ — возрастающая последовательность в $\mathbb{N}$. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \{\bar{s}_k\}$ и число $t_0 \in \mathbb{R}$ такие, что t_0 есть точка минимума функции φ на $\mathbb{R}$, $\|u_{s_j} - t_0\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0$ и $I_{s_j}(u_{s_j}) \to \varphi(t_0)$.*

Доказательство. В силу ограниченности последовательности норм $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ и предложения 8 существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \{\bar{s}_k\}$ и число $t_0 \in \mathbb{R}$ такие, что $\|u_{s_j} - t_0\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$ и $\|u_{s_j} - t_0\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0$. В свою очередь, ввиду предложения 6 существует последовательность $z_s \in U_s$ такая, что $\|z_s - t_0\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Определим последовательность $\{\bar{u}_s\}$ следующим образом:

$$\bar{u}_s = \begin{cases} u_s, \text{ если } s = s_j \text{ при некотором } j \in \mathbb{N}, \\ z_s, \text{ если } s \neq s_j \text{ для любого } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\bar{u}_s \in U_s$. Кроме того, в силу соотношений $\|u_{s_j} - t_0\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$ и $\|z_s - t_0\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ имеем $\|\bar{u}_s - t_0\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Тогда ввиду того, что последовательность $\{I_s\}$ Γ-сходится к функции φ относительно последовательности $\{U_s\}$, справедливо неравенство $\liminf\limits_{s\to\infty} I_s(\bar{u}_s) \geqslant \varphi(t_0)$. Следовательно, ввиду определения функций $\bar{u}_s$ имеем

$$\liminf_{j\to\infty} I_{s_j}(u_{s_j}) \geqslant \varphi(t_0). \tag{2.8}$$

Далее, пусть $t \in \mathbb{R}$. Поскольку последовательность $\{I_s\}$ Γ-сходится к функции φ относительно последовательности $\{U_s\}$, существует последовательность $w_s \in U_s$ такая, что

$$I_s(w_s) \to \varphi(t). \tag{2.9}$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$. Так как функция u_s минимизирует функционал I_s на множестве U_s и $w_s \in U_s$, то $I_s(u_s) \leqslant I_s(w_s)$. Следовательно, для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем $I_{s_j}(u_{s_j}) \leqslant I_{s_j}(w_{s_j})$. Отсюда и из (2.9) вытекает, что

$$\limsup_{j\to\infty} I_{s_j}(u_{s_j}) \leqslant \varphi(t). \tag{2.10}$$

В силу неравенств (2.8) и (2.10) имеем $\varphi(t_0) \leqslant \varphi(t)$. Поэтому ввиду произвольности $t \in \mathbb{R}$ заключаем, что t_0 есть точка минимума функции φ на $\mathbb{R}$. Наконец, из неравенства (2.8) и неравенства (2.10) с $t = t_0$ выводим, что $I_{s_j}(u_{s_j}) \to \varphi(t_0)$. □

Теорема 2. *Предположим, что существует строго выпуклая функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что последовательность $\{I_s\}$ Γ-сходится к функции φ относительно последовательности $\{U_s\}$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция в U_s, минимизирующая функционал I_s на множестве U_s. Предположим, что последовательность норм $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена. Тогда $\|u_s - t_0\|_{L^\infty(\Omega_s)} \to 0$ и $I_s(u_s) \to \varphi(t_0)$, где t_0 — единственная точка минимума функции φ на $\mathbb{R}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1 существует точка минимума t_0 функции φ на $\mathbb{R}$. Из строгой выпуклости функции φ следует, что t_0 — единственная точка минимума функции φ на $\mathbb{R}$. Предположим, что последовательность норм $\|u_s - t_0\|_{L^\infty(\Omega_s)}$ не сходится к нулю. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность $\{\bar{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ такие, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|u_{\bar{s}_k} - t_0\|_{L^\infty(\Omega_{\bar{s}_k})} \geqslant \varepsilon. \tag{2.11}$$

По теореме 1 существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \{\bar{s}_k\}$ и число $t_1 \in \mathbb{R}$ такие, что t_1 есть точка минимума функции φ на $\mathbb{R}$ и $\|u_{s_j} - t_1\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0$. Так как t_0 — единственная точка минимума функции φ на $\mathbb{R}$, то $t_1 = t_0$. Теперь ясно, что $\|u_{s_j} - t_0\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0$. Но это противоречит (2.11). Полученное противоречие доказывает, что $\|u_s - t_0\|_{L^\infty(\Omega_s)} \to 0$. Следовательно, в силу предложения 9 имеем $\|u_s - t_0\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Поэтому ввиду того, что последовательность $\{I_s\}$ Γ-сходится к функции φ относительно последовательности $\{U_s\}$, справедливо неравенство

$$\liminf_{s\to\infty} I_s(u_s) \geqslant \varphi(t_0). \tag{2.12}$$

В силу той же Γ-сходимости последовательности $\{I_s\}$ существует последовательность $w_s \in U_s$ такая, что $I_s(w_s) \to \varphi(t_0)$. Тогда, учитывая, что для любого $s \in \mathbb{N}$ функция u_s минимизирует функционал I_s на множестве U_s и $w_s \in U_s$, получаем неравенство $\limsup\limits_{s\to\infty} I_s(u_s) \leqslant \varphi(t_0)$. Отсюда и из (2.12) выводим, что $I_s(u_s) \to \varphi(t_0)$. □

Следствие 1. *Предположим, что* $\operatorname{meas}\Omega_s \to \sigma$, *где* σ — *положительное число. Пусть* $c \in \mathbb{R}$, *и пусть* $\Psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — *неубывающая выпуклая функция. Предположим, что для любых* $s \in \mathbb{N}$ *и* $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$

$$I_s(v) = \Psi(\|v\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}) + \int\limits_{\Omega_s} (|v|^p + cv)dx. \tag{2.13}$$

Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *функция такая, что для любого* $t \in \mathbb{R}$ *имеем* $\varphi(t) = \Psi(\sigma^{1/p}|t|) + \sigma(|t|^p + ct)$. *Наконец, пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ u_s — *функция в* U_s, *минимизирующая функционал* I_s *на множестве* U_s. *Тогда* $\|u_s - t_0\|_{L^\infty(\Omega_s)} \to 0$ *и* $I_s(u_s) \to \varphi(t_0)$, *где* t_0 — *единственная точка минимума функции* φ *на* $\mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что в силу положительности числа σ, свойств функции Ψ и строгой выпуклости функции $t \to |t|^p$ функция φ строго выпукла.

Теперь покажем, что последовательность $\{I_s\}$ Γ-сходится к функции φ относительно последовательности $\{U_s\}$. Пусть $t \in \mathbb{R}$. Учитывая условие (C_3), зафиксируем $r \in \Phi(a)$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $t_s = \left[\dfrac{st}{T}\right]\dfrac{T}{s} + \dfrac{r}{s}$. Ясно, что $t_s \to t$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $w_s : \Omega_s \to \mathbb{R}$ — функция такая, что для любого $x \in \Omega_s$ имеем $w_s(x) = t_s$. Ввиду периодичности функции a и включения $r \in \Phi(a)$ для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $w_s \in U_s$. Кроме того, в силу сходимости $t_s \to t$ и условия (C_2) справедливо соотношение $\|w_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Заметим также, что ввиду сходимости $\operatorname{meas}\Omega_s \to \sigma$ и сходимости $t_s \to t$ имеем $\|w_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} \to \sigma^{1/p}|t|$ и $\int\limits_{\Omega_s} (|w_s|^p + cw_s)dx \to \sigma(|t|^p + ct)$. Отсюда в силу (2.13) и непрерывности функции Ψ следует, что $I_s(w_s) \to \varphi(t)$. Далее, пусть имеем последовательность $v_s \in U_s$ такую, что $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Поскольку функция Ψ является неубывающей, из (2.13) вытекает, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$I_s(v_s) \geqslant \Psi(\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)}) + \int\limits_{\Omega_s} (|v_s|^p + cv_s)dx. \tag{2.14}$$

Ввиду соотношений $\operatorname{meas}\Omega_s \to \sigma$ и $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ имеем

$$\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} \to \sigma^{1/p}|t|, \qquad \int\limits_{\Omega_s} (|v_s|^p + cv_s)dx \to \sigma(|t|^p + ct). \tag{2.15}$$

Учитывая непрерывность функции Ψ, из (2.14) и (2.15) выводим, что $\liminf\limits_{s\to\infty} I_s(v_s) \geqslant \varphi(t)$. В силу изложенного последовательность $\{I_s\}$ Γ-сходится к функции φ относительно последовательности $\{U_s\}$.

Наконец, покажем, что последовательность норм $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена. Зафиксируем $r \in \Phi(a)$. Пусть $s \in \mathbb{N}$, и пусть $z_s : \Omega_s \to \mathbb{R}$ — функция такая, что для любого $x \in \Omega_s$ имеем $z_s(x) = r/s$. Легко видеть, что $z_s \in U_s$. Поэтому, учитывая, что функция u_s минимизирует функционал I_s на множестве U_s, имеем неравенство $I_s(u_s) \leqslant I_s(z_s)$. Поскольку функция Ψ является неубывающей, используя (2.13) и условие (C$_2$), находим, что $\|u_s\|^p_{L^p(\Omega_s)} + c\int_{\Omega_s} u_s\,dx \leqslant I_s(u_s) - \Psi(0)$ и $I_s(z_s) \leqslant \Psi(m_2^{1/p}|r|) + (|r|^p + |cr|)m_2$. Из указанных неравенств следует, что

$$\|u_s\|^p_{L^p(\Omega_s)} \leqslant \Psi(m_2^{1/p}|r|) - \Psi(0) + (|r|^p + |cr|)m_2 + |c|\int\limits_{\Omega_s} |u_s|dx. \tag{2.16}$$

Используя неравенства Гельдера и Юнга и условие (C$_2$), последнее слагаемое в правой части неравенства (2.16) оцениваем следующим образом: $|c|\int_{\Omega_s} |u_s|dx \leqslant |c|m_2^{(p-1)/p}\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)} \leqslant \dfrac{1}{p}\,\|u_s\|^p_{L^p(\Omega_s)} + \dfrac{p-1}{p}\,|c|^{p/(p-1)}m_2$. Отсюда и из (2.16) вытекает, что норма $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена сверху числом, не зависящим от s. Значит, последовательность норм $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена.

Таким образом, выполняются все условия теоремы 2, из которой выводим требуемое заключение. $\square$

Далее докажем две общие теоремы о сходимости минимизантов и минимальных значений функционалов, состоящих из двух компонент с определенными свойствами.

Обозначим через $\mathcal{H}$ множество всех последовательностей $\{v_s\}$ таких, что: (a) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $v_s \in U_s$; (b) $\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Из предложения 6 следует, что множество $\mathcal{H}$ непусто.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $F_s, G_s : W^{1,p}(\Omega_s) \to \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывные снизу функционалы такие, что $(F_s + G_s)(v) \to +\infty$ при $\|v\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} \to +\infty$.

Ввиду указанных свойств функционалов F_s и G_s и предложения 3 для любого $s \in \mathbb{N}$ существует функция, принадлежащая множеству U_s и минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на этом множестве.

Прежде всего нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Предложение 12. *Предположим, что выполняется такое условие*:

$(*)$ *если* $s \in \mathbb{N}$, $v \in U_s$ *и* $t \in \mathbb{R}$, *то* $F_s(v + t) = F_s(v)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *если* $t \in \mathbb{R}$ *и имеем последовательность* $v_s \in U_s$ *такую, что* $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$, *то существует последовательность* $\{\bar{v}_s\} \in \mathcal{H}$ *такая, что для любого* $s \in \mathbb{N}$ *имеем* $F_s(\bar{v}_s) = F_s(v_s)$;

(ii) *если* $t \in \mathbb{R}$ *и* $\{v_s\} \in \mathcal{H}$, *то существует последовательность* $\tilde{v}_s \in U_s$ *такая, что* $\|\tilde{v}_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ *и для любого* $s \in \mathbb{N}$ *имеем* $F_s(\tilde{v}_s) = F_s(v_s)$.

Доказательство. Пусть $t \in \mathbb{R}$ и имеем последовательность $v_s \in U_s$ такую, что $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\bar{v}_s = v_s - \left[\dfrac{st}{T}\right]\dfrac{T}{s}$. Используя свойства последовательности $\{v_s\}$, периодичность функции a и условие (C$_2$), находим, что $\{\bar{v}_s\} \in \mathcal{H}$. В силу этого включения и условия $(*)$ для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $F_s(\bar{v}_s) = F_s(v_s)$. Таким образом, утверждение (i) справедливо.

Далее, пусть $t \in \mathbb{R}$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\tilde{v}_s = v_s + \left[\dfrac{st}{T}\right]\dfrac{T}{s}$. Ввиду включения $\{v_s\} \in \mathcal{H}$, периодичности функции a и условия (C_2) справедливы следующие утверждения: для любого $s \in \mathbb{N}$ $\tilde{v}_s \in U_s$; $\|\tilde{v}_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Кроме того, в силу включения $\{v_s\} \in \mathcal{H}$ и условия $(*)$ для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $F_s(\tilde{v}_s) = F_s(v_s)$. Таким образом, утверждение (ii) справедливо. □

Положим
$$\lambda = \inf_{\{v_s\} \in \mathcal{H}} \liminf_{s\to\infty} F_s(v_s).$$

Теорема 3. *Предположим, что $\lambda \in \mathbb{R}$ и выполняются следующие условия:*

$(*_1)$ *существует последовательность $\{w_s\} \in \mathcal{H}$ такая, что $F_s(w_s) \to \lambda$;*

$(*_2)$ *если $s \in \mathbb{N}$, $v \in U_s$ и $t \in \mathbb{R}$, то $F_s(v+t) = F_s(v)$;*

$(*_3)$ *существует строго выпуклая функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что для любого $t \in \mathbb{R}$ и любой последовательности $v_s \in U_s$ со свойством $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ имеем $G_s(v_s) \to \varphi(t)$.*

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция в U_s, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве U_s. Предположим, что последовательность норм $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена. Тогда $\|u_s - t_0\|_{L^\infty(\Omega_s)} \to 0$ и $(F_s+G_s)(u_s) \to \lambda + \varphi(t_0)$, где t_0 — единственная точка минимума функции φ на $\mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что последовательность $\{F_s+G_s\}$ Г-сходится к функции $\lambda + \varphi$ относительно последовательности $\{U_s\}$.

Согласно условию $(*_1)$ существует последовательность $\{w_s\} \in \mathcal{H}$ такая, что $F_s(w_s) \to \lambda$. Пусть $t \in \mathbb{R}$. В силу условия $(*_2)$ и утверждения (ii) предложения 12 существует последовательность $\tilde{w}_s \in U_s$ такая, что $\|\tilde{w}_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $F_s(\tilde{w}_s) = F_s(w_s)$. Тогда, учитывая сходимость $F_s(w_s) \to \lambda$, имеем $F_s(\tilde{w}_s) \to \lambda$. Кроме того, ввиду условия $(*_3)$ имеем $G_s(\tilde{w}_s) \to \varphi(t)$. Таким образом, $(F_s + G_s)(\tilde{w}_s) \to \lambda + \varphi(t)$. Далее, пусть имеем последовательность $v_s \in U_s$ такую, что $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. В силу условия $(*_2)$ и утверждения (i) предложения 12 существует последовательность $\{\bar{v}_s\} \in \mathcal{H}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $F_s(\bar{v}_s) = F_s(v_s)$. Используя это, получаем неравенство $\liminf\limits_{s\to\infty} F_s(v_s) \geqslant \lambda$. Кроме того, в силу свойств последовательности $\{v_s\}$ и условия $(*_3)$ имеем $G_s(v_s) \to \varphi(t)$. Теперь ясно, что $\liminf\limits_{s\to\infty}(F_s+G_s)(v_s) \geqslant \lambda+\varphi(t)$. В силу изложенного последовательность $\{F_s+G_s\}$ Г-сходится к функции $\lambda+\varphi$ относительно последовательности $\{U_s\}$. Тогда, учитывая строгую выпуклость функции φ, из теоремы 2 выводим, что $\|u_s - t_0\|_{L^\infty(\Omega_s)} \to 0$ и $(F_s + G_s)(u_s) \to \lambda + \varphi(t_0)$, где t_0 — единственная точка минимума функции φ на $\mathbb{R}$. □

Прежде чем перейти ко второй теореме о сходимости минимизантов и минимальных значений функционалов $F_s + G_s$, докажем следующее предложение.

Предложение 13. *Существуют возрастающая последовательность $\{\bar{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{w_s\} \in \mathcal{H}$ такие, что $F_{\bar{s}_k}(w_{\bar{s}_k}) \to \lambda$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. В силу определения λ существует последовательность $\{v_s^{(k)}\} \in \mathcal{H}$ такая, что $\liminf\limits_{s\to\infty} F_s(v_s^{(k)}) \leqslant \lambda + \dfrac{1}{2k}$. В свою очередь, в силу определения нижнего предела существует возрастающая последовательность $\{s_j^{(k)}\} \subset \mathbb{N}$ такая, что $F_{s_j^{(k)}}(v^{(k)}_{s_j^{(k)}}) \to \liminf\limits_{s\to\infty} F_s(v_s^{(k)})$. Тогда найдется $j'_k \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j'_k$, имеем $F_{s_j^{(k)}}(v^{(k)}_{s_j^{(k)}}) \leqslant \liminf\limits_{s\to\infty} F_s(v_s^{(k)}) + \dfrac{1}{2k}$. Кроме того, ввиду включения $\{v_s^{(k)}\} \in \mathcal{H}$ найдется $j''_k \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j''_k$, имеем $\|v^{(k)}_{s_j^{(k)}}\|_{L^p(\Omega_{s_j^{(k)}})} \leqslant \dfrac{1}{k}$.

В силу изложенного справедливо следующее утверждение:

(i) для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют последовательность $\{v_s^{(k)}\} \in \mathcal{H}$, возрастающая последовательность $\{s_j^{(k)}\} \subset \mathbb{N}$ и число $j_k \in \mathbb{N}$ такие, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_k$, имеем

$$\|v^{(k)}_{s_j^{(k)}}\|_{L^p(\Omega_{s_j^{(k)}})} \leqslant \frac{1}{k}\,, \qquad F_{s_j^{(k)}}(v^{(k)}_{s_j^{(k)}}) \leqslant \lambda + \frac{1}{k}\,.$$

Далее, поскольку последовательности $\{s_j^{(k)}\}$, $k \in \mathbb{N}$, являются возрастающими, существует последовательность $\{i_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $i_k \geqslant j_k$ и $s^{(k+1)}_{i_{k+1}} > s^{(k)}_{i_k}$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $\bar{s}_k = s^{(k)}_{i_k}$. Ясно, что $\{\bar{s}_k\}$ — возрастающая последовательность в $\mathbb{N}$. В силу утверждения (i) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$v^{(k)}_{\bar{s}_k} \in U_{\bar{s}_k}, \qquad \|v^{(k)}_{\bar{s}_k}\|_{L^p(\Omega_{\bar{s}_k})} \leqslant \frac{1}{k}\,, \qquad F_{\bar{s}_k}(v^{(k)}_{\bar{s}_k}) \leqslant \lambda + \frac{1}{k}\,. \tag{2.17}$$

Зафиксируем какую-нибудь последовательность $\{z_s\} \in \mathcal{H}$ и определим последовательность $\{w_s\}$ следующим образом:

$$w_s = \begin{cases} v_s^{(k)}, & \text{если } s = \bar{s}_k \text{ при некотором } k \in \mathbb{N}, \\ z_s, & \text{если } s \neq \bar{s}_k \text{ для любого } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Из (2.17) и включения $\{z_s\} \in \mathcal{H}$ вытекает, что $\{w_s\} \in \mathcal{H}$ и

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad F_{\bar{s}_k}(w_{\bar{s}_k}) \leqslant \lambda + \frac{1}{k}\,. \tag{2.18}$$

В свою очередь, ввиду определения λ и включения $\{w_s\} \in \mathcal{H}$ имеем $\liminf\limits_{s\to\infty} F_s(w_s) \geqslant \lambda$. Отсюда и из (2.18) выводим, что $F_{\bar{s}_k}(w_{\bar{s}_k}) \to \lambda$.

Случай $\lambda = -\infty$ рассматривается аналогично, а в случае $\lambda = +\infty$ для любой последовательности $\{v_s\} \in \mathcal{H}$ имеем $F_s(v_s) \to \lambda$. □

Теорема 4. *Предположим, что $\lambda \in \mathbb{R}$ и выполняются следующие условия*:

$(*_1)$ *если $s \in \mathbb{N}$, $v \in U_s$ и $t \in \mathbb{R}$, то $F_s(v + t) = F_s(v)$;*

$(*_2)$ *существует функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что для любого $t \in \mathbb{R}$ и любой последовательности $v_s \in U_s$ со свойством $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ имеем $G_s(v_s) \to \varphi(t)$.*

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция в U_s, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве U_s. Предположим, что последовательность норм $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и число $t_0 \in \mathbb{R}$ такие, что t_0 есть точка минимума функции φ на $\mathbb{R}$, $\|u_{s_j} - t_0\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0$ и $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to \lambda + \varphi(t_0)$.

Доказательство. Согласно предложению 13 существуют возрастающая последовательность $\{\bar{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{w_s\} \in \mathcal{H}$ такие, что $F_{\bar{s}_k}(w_{\bar{s}_k}) \to \lambda$. Поскольку последовательность норм $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена, в силу предложения 8 существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \{\bar{s}_k\}$ и число $t_0 \in \mathbb{R}$ такие, что $\|u_{s_j} - t_0\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$ и $\|u_{s_j} - t_0\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0$. Ввиду предложения 6 существует последовательность $z_s \in U_s$ такая, что $\|z_s - t_0\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Определим последовательность $\{\tilde{u}_s\}$ следующим образом:

$$\tilde{u}_s = \begin{cases} u_s, & \text{если } s = s_j \text{ при некотором } j \in \mathbb{N}, \\ z_s, & \text{если } s \neq s_j \text{ для любого } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\tilde{u}_s \in U_s$. Кроме того, в силу соотношений $\|u_{s_j} - t_0\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \to 0$ и $\|z_s - t_0\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ имеем $\|\tilde{u}_s - t_0\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. В силу условия $(*_1)$, утверждения (i) предложения 12 и указанных свойств последовательности $\{\tilde{u}_s\}$ существует последовательность $\{\bar{u}_s\} \in \mathcal{H}$

такая, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $F_s(\bar{u}_s) = F_s(\tilde{u}_s)$. Используя это, получаем неравенство $\liminf\limits_{s\to\infty} F_s(\tilde{u}_s) \geqslant \lambda$. Вдобавок ввиду условия $(*_2)$ имеем $G_s(\tilde{u}_s) \to \varphi(t_0)$. Теперь ясно, что

$$\liminf_{j\to\infty}(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \geqslant \lambda + \varphi(t_0). \tag{2.19}$$

Далее, пусть $t \in \mathbb{R}$. В силу условия $(*_1)$, утверждения (ii) предложения 12 и включения $\{w_s\} \in \mathcal{H}$ существует последовательность $\tilde{w}_s \in U_s$ такая, что $\|\tilde{w}_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $F_s(\tilde{w}_s) = F_s(w_s)$. Тогда из сходимости $F_{\bar{s}_k}(w_{\bar{s}_k}) \to \lambda$ вытекает, что $F_{s_j}(\tilde{w}_{s_j}) \to \lambda$, а ввиду условия $(*_2)$ имеем $G_s(\tilde{w}_s) \to \varphi(t)$. Теперь ясно, что

$$(F_{s_j} + G_{s_j})(\tilde{w}_{s_j}) \to \lambda + \varphi(t). \tag{2.20}$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$. Так как функция u_s минимизирует функционал $F_s + G_s$ на множестве U_s и $\tilde{w}_s \in U_s$, то $(F_s + G_s)(u_s) \leqslant (F_s + G_s)(\tilde{w}_s)$. Используя это и соотношение (2.20), получаем неравенство

$$\limsup_{j\to\infty}(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \leqslant \lambda + \varphi(t). \tag{2.21}$$

Ввиду произвольности $t \in \mathbb{R}$ из (2.19) и (2.21) следует, что t_0 есть точка минимума функции φ на $\mathbb{R}$. Наконец, из неравенства (2.19) и неравенства (2.21) с $t = t_0$ выводим, что $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to \lambda + \varphi(t_0)$. $\square$

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что если выполняется условие $(*_2)$ теоремы 4, то последовательность $\{G_s\}$ Γ-сходится к функции φ относительно последовательности $\{U_s\}$.

Сформулируем две теоремы о выборе Γ-сходящихся подпоследовательностей.

Теорема 5. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, и пусть $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция такая, что для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\psi(t) = \lambda$. Пусть выполняется условие $(*_1)$ теоремы 4. Тогда существует возрастающая последовательность $\{\bar{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что последовательность $\{F_{\bar{s}_k}\}$ Γ-сходится к функции ψ относительно последовательности $\{U_s\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 13 существуют возрастающая последовательность $\{\bar{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{w_s\} \in \mathcal{H}$ такие, что $F_{\bar{s}_k}(w_{\bar{s}_k}) \to \lambda$. Пусть $t \in \mathbb{R}$. В силу условия $(*_1)$ теоремы 4, утверждения (ii) предложения 12 и включения $\{w_s\} \in \mathcal{H}$ существует последовательность $\tilde{w}_s \in U_s$ такая, что $\|\tilde{w}_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $F_s(\tilde{w}_s) = F_s(w_s)$. Тогда, учитывая сходимость $F_{\bar{s}_k}(w_{\bar{s}_k}) \to \lambda$ и определение функции ψ, имеем $F_{\bar{s}_k}(\tilde{w}_{\bar{s}_k}) \to \psi(t)$. Далее, пусть имеем последовательность $v_s \in U_s$ такую, что $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$. Ввиду условия $(*_1)$ теоремы 4 и утверждения (i) предложения 12 существует последовательность $\{\bar{v}_s\} \in \mathcal{H}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $F_s(\bar{v}_s) = F_s(v_s)$. Используя это, находим, что $\liminf\limits_{s\to\infty} F_s(v_s) \geqslant \lambda = \psi(t)$. В силу изложенного последовательность $\{F_{\bar{s}_k}\}$ Γ-сходится к функции ψ относительно последовательности $\{U_s\}$. $\square$

Теорема 6. *Предположим, что $\lambda \in \mathbb{R}$ и выполняются условия $(*_1)$ и $(*_2)$ теоремы 4. Тогда существует возрастающая последовательность $\{\bar{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что последовательность $\{F_{\bar{s}_k} + G_{\bar{s}_k}\}$ Γ-сходится к функции $\lambda + \varphi$ относительно последовательности $\{U_s\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция такая, что для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\psi(t) = \lambda$. Поскольку выполняется условие $(*_1)$ теоремы 4, в силу теоремы 5 существует возрастающая последовательность $\{\bar{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что последовательность $\{F_{\bar{s}_k}\}$ Γ-сходится к функции ψ относительно последовательности $\{U_s\}$. Отсюда и из условия $(*_2)$ теоремы 4 выводим требуемое заключение. $\square$

Теперь рассмотрим следствия теорем 3, 4 и 6 для случая, когда функционалы F_s и G_s являются интегральными.

Предположим, что $\operatorname{meas}\Omega_s \to \sigma$, где σ — положительное число. Пусть $c_1, c_2 > 0$, и пусть имеется последовательность неотрицательных функций $\mu_s \in L^1(\Omega_s)$ такая, что последовательность норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ ограничена. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s : \Omega_s \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям: для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f_s(\cdot, \xi)$ измерима на Ω_s; для почти всех $x \in \Omega_s$ функция $f_s(x, \cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$; для почти всех $x \in \Omega_s$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$c_1|\xi|^p - \mu_s(x) \leqslant f_s(x,\xi) \leqslant c_2|\xi|^p + \mu_s(x). \tag{2.22}$$

Пусть также имеется последовательность функций $g_s \in L^{p/(p-1)}(\Omega_s)$ такая, что последовательность норм $\|g_s\|_{L^{p/(p-1)}(\Omega_s)}$ ограничена и $\int\limits_{\Omega_s} g_s\,dx \to c$, где $c \in \mathbb{R}$. Предположим, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$

$$F_s(v) = \int\limits_{\Omega_s} f_s(x, \nabla v)dx, \qquad G_s(v) = \int\limits_{\Omega_s} (|v|^p - g_s v)dx. \tag{2.23}$$

Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция такая, что для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\varphi(t) = \sigma|t|^p - ct$.

В силу (2.22) и первого из представлений (2.23) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем

$$c_1\int\limits_{\Omega_s} |\nabla v|^p dx - \|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)} \leqslant F_s(v) \leqslant c_2\int\limits_{\Omega_s} |\nabla v|^p dx + \|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}. \tag{2.24}$$

Кроме того, ввиду первого из представлений (2.23) справедлива импликация

$$s \in \mathbb{N},\ v \in U_s,\ t \in \mathbb{R} \Longrightarrow F_s(v+t) = F_s(v). \tag{2.25}$$

Заметим также, что в силу второго из представлений (2.23), сходимости $\operatorname{meas}\Omega_s \to \sigma$ и свойств функций g_s справедливо следующее утверждение:

(A) для любого $t \in \mathbb{R}$ и любой последовательности $v_s \in U_s$ такой, что $\|v_s - t\|_{L^p(\Omega_s)} \to 0$, имеем $G_s(v_s) \to \varphi(t)$.

Следствие 2. *Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция в U_s, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве U_s. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и число $t_0 \in \mathbb{R}$ такие, что t_0 есть точка минимума функции φ на $\mathbb{R}$, $\|u_{s_j} - t_0\|_{L^\infty(\Omega_{s_j})} \to 0$ и $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \to \lambda + \varphi(t_0)$.*

Доказательство. Поскольку последовательность норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ ограничена, существует число $M > 0$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)} \leqslant M$. Тогда ввиду (2.24) для любой последовательности $\{v_s\} \in \mathcal{H}$ имеем $\liminf\limits_{s\to\infty} F_s(v_s) \geqslant -M$. Следовательно, $\lambda \geqslant -M$. Зафиксируем $r \in \Phi(a)$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $w_s : \Omega_s \to \mathbb{R}$ — функция такая, что для любого $x \in \Omega_s$ имеем $w_s(x) = r/s$. Учитывая включение $r \in \Phi(a)$ и условие (C_2), имеем $\{w_s\} \in \mathcal{H}$. Поэтому $\lambda \leqslant \liminf\limits_{s\to\infty} F_s(w_s)$. Отсюда и из (2.24) вытекает, что $\lambda \leqslant M$. Таким образом, $\lambda \in \mathbb{R}$. Кроме того, в силу (2.25) и утверждения (A) выполняются условия ($*_1$) и ($*_2$) теоремы 4. Покажем, что последовательность норм $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена. Действительно, пусть $s \in \mathbb{N}$. Используя (2.24), второе из представлений (2.23), неравенство Юнга и условие (C_2), получаем неравенства

$$\frac{p-1}{p}\|u_s\|^p_{L^p(\Omega_s)} \leqslant \|g_s\|^{p/(p-1)}_{L^{p/(p-1)}(\Omega_s)} + M + (F_s + G_s)(u_s), \tag{2.26}$$

$$(F_s + G_s)(w_s) \leqslant \|g_s\|^{p/(p-1)}_{L^{p/(p-1)}(\Omega_s)} + M + 2m_2|r|^p. \tag{2.27}$$

Поскольку функция u_s минимизирует функционал $F_s + G_s$ на множестве U_s и $w_s \in U_s$, имеем $(F_s + G_s)(u_s) \leqslant (F_s + G_s)(w_s)$. Учитывая, что последовательность норм $\|g_s\|_{L^{p/(p-1)}(\Omega_s)}$ ограничена, из последнего неравенства и неравенств (2.26) и (2.27) выводим, что норма $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$

оценивается сверху числом, не зависящим от s. Значит, последовательность норм $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена. Таким образом, выполняются все условия теоремы 4, из которой вытекает требуемое заключение. □

Следствие 3. *Предположим, что* $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)} \to 0$. *Пусть для любого* $s \in \mathbb{N}$ u_s *— функция в* U_s, *минимизирующая функционал* $F_s + G_s$ *на множестве* U_s. *Тогда* $\|u_s - t_0\|_{L^\infty(\Omega_s)} \to 0$ *и* $(F_s + G_s)(u_s) \to \varphi(t_0)$, *где* t_0 *— единственная точка минимума функции* φ *на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. В силу (2.24) и сходимости $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)} \to 0$ для любой последовательности $\{v_s\} \in \mathcal{H}$ имеем $\liminf\limits_{s\to\infty} F_s(v_s) \geqslant 0$. Поэтому $\lambda \geqslant 0$. Зафиксируем $r \in \Phi(a)$, и пусть $\{w_s\}$ — последовательность функций, определенных в доказательстве следствия 2. Имеем $\{w_s\} \in \mathcal{H}$ и, следовательно, $\lambda \leqslant \liminf\limits_{s\to\infty} F_s(w_s)$. Вдобавок ввиду (2.24) и сходимости $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)} \to 0$ имеем $\limsup\limits_{s\to\infty} F_s(w_s) \leqslant 0$. Поэтому $\lambda \leqslant 0$. Отсюда и из установленной выше неотрицательности λ выводим, что $\lambda = 0$. Легко также видеть, что $F_s(w_s) \to 0$. Значит, выполняется условие $(*_1)$ теоремы 3. Кроме того, в силу (2.25) выполняется условие $(*_2)$ теоремы 3, а ввиду строгой выпуклости функции φ и утверждения (A) выполняется условие $(*_3)$ теоремы 3. Наконец, согласно изложенному в доказательстве следствия 2 последовательность норм $\|u_s\|_{L^p(\Omega_s)}$ ограничена. Таким образом, выполняются все условия теоремы 3, из которой вытекает требуемое заключение. □

Следствие 4. *Существует возрастающая последовательность* $\{\bar{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ *такая, что последовательность* $\{F_{\bar{s}_k} + G_{\bar{s}_k}\}$ Γ-*сходится к функции* $\lambda + \varphi$ *относительно последовательности* $\{U_s\}$.

Доказательство. В силу изложенного в доказательстве следствия 2 имеем $\lambda \in \mathbb{R}$. Кроме того, ввиду (2.25) и утверждения (A) выполняются условия $(*_1)$ и $(*_2)$ теоремы 4. Таким образом, выполняются все условия теоремы 6, из которой вытекает требуемое заключение. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dal Maso G.** Asymptotic behaviour of minimum problems with bilateral obstacles // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1981. Vol. 129, no. 1. P. 327–366. doi: 10.1007/BF01762149 .
2. **Ковалевский А.А.** О некоторых вопросах, связанных с проблемой усреднения вариационных задач для функционалов с переменной областью определения // Современный анализ и его приложения. Киев: Наукова думка, 1989. С. 62–70.
3. **Boccardo L., Murat F.** Homogenization of nonlinear unilateral problems // Composite Media and Homogenization Theory. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 5. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 81–105. doi: 10.1007/978-1-4684-6787-1_6 .
4. **Ковалевский А.А.** G-сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1994. Т. 58, № 3. С. 3–35.
5. **Kovalevsky A.A.** On the convergence of solutions to bilateral problems with the zero lower constraint and an arbitrary upper constraint in variable domains // Nonlinear Anal. 2016. Vol. 147. P. 63–79. doi: 10.1016/j.na.2016.09.001 .
6. **Сандраков Г.В.** Осреднение вариационных неравенств и уравнений, определенных псевдомонотонным оператором // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 1. С. 67–100.
7. **Ковалевский А.А.** Усреднение переменных вариационных задач // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 8. С. 6–9.
8. **Жиков В.В.** Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1983. Т. 47, № 5. С. 961–998.
9. **Хруслов Е.Я.** Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. 1978. Т. 106, № 4. С. 604–621.
10. **Evans L.C.** Partial differential equations. Providence: AMS, 1998. 662 p.
11. **Жиков В.В.** О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 47–84.

12. **Ковалевский А.А.** О Г-сходимости интегральных функционалов, определенных на слабо связанных соболевских пространствах // Укр. мат. журн. 1996. Т. 48, № 5. С. 614–628.
13. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.

Ковалевский Александр Альбертович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург;
Институт естественных наук и математики
Уральского федерального университета, г. Екатеринбург
e-mail: alexkvl71@mail.ru

Поступила 28.02.2018

REFERENCES

1. Dal Maso G. Asymptotic behaviour of minimum problems with bilateral obstacles. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 1981, vol. 129, no. 1, pp. 327–366. doi: 10.1007/BF01762149 .
2. Kovalevskii A.A. Some problems connected with the problem of averaging variational problems for functionals with a variable domain. *Sovremennyi analiz i ego prilozheniya*, Kiev, Naukova dumka, 1989, pp. 62–70 (in Russian).
3. Boccardo L., Murat F. Homogenization of nonlinear unilateral problems. *Composite Media and Homogenization Theory. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* 5. Boston: Birkhäuser, 1991, pp. 81–105. doi: 10.1007/978-1-4684-6787-1_6 .
4. Kovalevskii A.A. *G*-convergence and homogenization of nonlinear elliptic operators in divergence form with variable domain. *Russ. Acad. Sci. Izv. Math.*, 1995, vol. 44, no. 3, pp. 431–460. doi: 10.1070/IM1995v044n03ABEH001607 .
5. Kovalevsky A.A. On the convergence of solutions to bilateral problems with the zero lower constraint and an arbitrary upper constraint in variable domains. *Nonlinear Anal.*, 2016, vol. 147, pp. 63–79. doi: 10.1016/j.na.2016.09.001 .
6. Sandrakov G.V. Homogenization of variational inequalities and equations defined by pseudomonotone operators. *Sb. Math.*, 2008, vol. 199, no. 1, pp. 67–98. doi: 10.1070/SM2008v199n01ABEH003911 .
7. Kovalevskij A.A. Averaging variable variational problems. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR. Ser. A.*, 1988, no. 8, pp. 6–9 (in Russian).
8. Zhikov V.V. Questions of convergence, duality and averaging for functionals of the calculus of variations. *Math. USSR-Izv.*, 1984, vol. 23, no. 2, pp. 243–276. doi: 10.1070/IM1984v023n02ABEH001466 .
9. Khruslov E.Ya. The asymptotic behavior of solutions of the second boundary value problem under fragmentation of the boundary of the domain. *Math. USSR-Sb.*, 1979, vol. 35, no. 2, pp. 266–282. doi: 10.1070/SM1979v035n02ABEH001474 .
10. Evans L.C. *Partial differential equations.* Providence: AMS, 1998. 662 p.
11. Zhikov V.V. On passage to the limit in nonlinear variational problems. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1993, vol. 76, no. 2, pp. 427–459. doi: 10.1070/SM1993v076n02ABEH003421 .
12. Kovalevskii A.A. On the Γ-convergence of integral functionals defined on Sobolev weakly connected spaces. *Ukrainian Math. J.*, 1996, vol. 48, no. 5, pp. 683–698. doi:10.1007/BF02384235 .
13. Vainberg M.M. *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations.* New York: Wiley, 1974. 368 p. Original Russian text published in *Variatsionnyi metod i metod monotonnykh operatorov v teorii nelineinykh uravnenii*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 416 p.

The paper was received by the Editorial Office on February, 28, 2018.

Aleksandr Al'bertovich Kovalevsky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Natural Sciences and Mathematics, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: alexkvl71@mail.ru.