ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.97

ВАРИАЦИИ ТИПА v-ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ В ЗАДАЧАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ [1]

А. В. Дмитрук, Н. П. Осмоловский

Для общей задачи оптимального управления с фазовым ограничением предлагается доказательство принципа максимума с помощью v-замены времени $t \mapsto \tau$, при которой исходное время становится еще одной фазовой переменной, подчиненной уравнению $dt/d\tau = v(\tau)$, а дополнительное управление $v(\tau) \geqslant 0$ кусочно-постоянно, и его значения служат аргументами новой задачи. Фазовое ограничение порождает континуум ограничений неравенства в этой задаче, поэтому необходимые условия экстремума в ней содержат меру. Переписав эти условия в терминах исходной задачи, мы получаем непустой компакт из наборов множителей Лагранжа, которые обеспечивают выполнение принципа максимума на конечном множестве значений управления и времени, соответствующем данной v-замене. Компакты, порожденные всевозможными кусочно-постоянными v-заменами, частично упорядочены по включению, и поэтому образуют центрированную систему. Взяв любой элемент из их пересечения, мы получаем единое условие оптимальности, в котором принцип максимума выполнен для всех значений управления и времени.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, v-замена времени, фазовое ограничение, полубесконечная задача, множители Лагранжа, мера Лебега — Стилтьеса, функция ограниченной вариации, конечнозначное условие максимума, центрированная система компактов.

A. V. Dmitruk, N. P. Osmolovskii. Variations of the v-change of time in problems with state constraints.

For a general optimal control problem with a state constraint, we propose a proof of the maximum principle based on a v-change of the time variable $t \mapsto \tau$, under which the original time becomes yet another state variable subject to the equation $dt/d\tau = v(\tau)$, while the additional control $v(\tau) \geqslant 0$ is piecewise constant, and its values are arguments of the new problem. Since the state constraint generates a continuum of inequality constraints in this problem, the necessary optimality conditions involve a measure. Rewriting these conditions in terms of the original problem, we get a nonempty compact set of collections of Lagrange multipliers that fulfil the maximum principle on a finite set of values of the control and time variables corresponding to the v-change. The compact sets generated by all possible piecewise constant v-changes are partially ordered by inclusion, thus forming a centered family. Taking any element of their intersection, we obtain a universal optimality condition, in which the maximum principle holds for all values of the control and time.

Keywords: Pontryagin maximum principle, v-change of time, state constraint, semi-infinite problem, Lagrange multipliers, Lebesgue–Stieltjes measure, function of bounded variation, finite-valued maximum condition, centered family of compact sets.

MSC: 49K15

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-76-92

1. Введение

Задачи с фазовыми ограничениями привлекали внимание специалистов с самого начала развития теории оптимального управления (см., например, [1]). При этом, как хорошо известно, обобщение принципа максимума Понтрягина на эти задачи было сопряжено со значительными трудностями, поскольку здесь мы имеем дело с бесконечным (континуальным) числом ограничений неравенства. В работе А. Я. Дубовицкого и А. А. Милютина [2] было предложено трактовать фазовое ограничение как ограничение в пространстве C непрерывных функций на данном отрезке, и тогда множитель Лагранжа, соответствующий данному ограничению, представляет собой элемент сопряженного пространства C^*, т. е. меру Лебега — Стилтьеса [3].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-01-00585 и 17-01-00805).

При таком подходе необходимые условия слабого минимума (т. е. условия стационарности) получить уже несложно (см., например, [2; 4; 5]). Однако переход от этих условий к принципу максимума (т. е. к необходимым условиям сильного минимума) по-прежнему остается непростым.

Известные способы доказательства принципа максимума для задач с фазовыми ограничениями используют либо так называемую v-замену времени [2; 6–9], либо овыпуклениe правой части управляемой системы [4; 6; 9–11], либо функции штрафа [12; 13], либо вариационный принцип Экланда [14; 15] [2]. Отдельно упомянем самое первое доказательство, предложенное Р. В. Гамкрелидзе [1, § 6] в предположении о "простой" структуре множества выхода оптимальной траектории на фазовую границу, а именно, что это множество состоит из конечного числа отрезков. В этом случае на каждом таком отрезке можно продифференцировать фазовое ограничение и перейти к смешанным ограничениям типа равенства, т. е., по сути дела, перейти к задаче Лагранжа классического вариационного исчисления. (О связи этого подхода с методом Дубовицкого — Милютина см. [16; 17].) Все эти доказательства технически довольно сложны и не вполне освоены даже специалистами, не говоря уже о более широком круге читателей, пусть и с хорошей математической подготовкой. Поэтому вопрос о более простом и ясном доказательстве остается актуальным.

Общая v-замена времени состоит в переходе от исходного времени t к новому времени τ, при котором исходное время $t = t(\tau)$ становится еще одной фазовой переменной, подчиненной уравнению $dt/d\tau = v(\tau)$, где $v(\tau) \geqslant 0$ есть еще одно управление. Принципиальный момент состоит здесь в том, что эта замена не взаимно-однозначна (там, где $v(\tau) = 0$), и по этой причине малые вариации управления $v(\tau)$ порождают немалые (так называемые "понтрягинские") вариации исходного управления $u(t)$. Использование этого приема требует однако хорошего владения теорией функций действительного переменного.

В конце 1990-х годов А. А. Милютин предложил использовать упрощенный вариант v-замены, с *кусочно-постоянной* функцией $v(\tau)$. Этим способом он доказал принцип максимума для общей понтрягинской задачи, т. е. задачи с концевыми ограничениями, но без фазовых. В случае кусочно-постоянной v-замены малые вариации управления $v(\tau)$ порождают по сути дела игольчатые вариации исходного управления $u(t)$ с небольшим, но существенным отличием от стандартных (подробнее об этом ниже). Преимущество вариаций типа v-замены по сравнению со стандартными игольчатыми вариациями (пакетами иголок) состоит в следующем: а) оптимальное управление может быть произвольной измеримой ограниченной функцией, тогда как для использования игольчатых вариаций надо требовать его кусочной непрерывности; б) v-замена дает гладкую управляемую систему, определенную, по крайней мере, в целой окрестности оптимального процесса, тогда как игольчатые вариации приводят к задаче, функции которой определены лишь на неотрицательном ортанте конечномерного пространства (точнее, в его пересечении с окрестностью нуля), соответствующем ширинам иголок в данном пакете.

Цель настоящей статьи — показать возможность применения кусочно-постоянной v-замены для доказательства принципа максимума в задачах с фазовыми ограничениями. Доказательство оказалось, на наш взгляд, довольно простым — оно доступно студентам с хорошей математической подготовкой, и может служить основой для несложного спецкурса. Общая схема его такова. Кусочное постоянство функции $v(\tau)$ позволяет перейти к задаче *в конечномерном пространстве*, аргументами которой служат ее значения, а также начальное значение фазовой переменной x. Наличие фазовых ограничений приводит к тому, что в этой конечномерной задаче имеется бесконечное число ограничений неравенства, т. е. это не есть обычная гладкая конечномерная задача[3]. Однако условия оптимальности в ней известны; их специ-

[2] Литература по этой теме довольно большая; мы указываем в качестве примеров лишь некоторые работы, не делая попытки какого-либо обзора.

[3] В зарубежной литературе такие задачи принято называть *полубесконечными* (наверное, более правильно было бы называть их *полубесконечномерными*).

фика лишь в том, что они содержат меру, сосредоточенную на множестве индексов (моментов времени) активных неравенств. Применяя эти условия и переписывая их в терминах исходной задачи, мы получаем множество соответствующих наборов множителей Лагранжа, которое является непустым компактом в некоторой топологии (обычной топологии по конечномерным компонентам и слабой-* относительно меры). Каждый элемент этого компакта (т. е. набор множителей Лагранжа) обеспечивает выполнение принципа максимума на конечном множестве значений управления и времени, соответствующем данной v-замене. Компакты, порожденные всевозможными кусочно-постоянными v-заменами, частично упорядочены по включению и поэтому образуют центрированную систему. Взяв любой элемент из их пересечения, мы получаем единое условие оптимальности — набор множителей Лагранжа, для которого принцип максимума выполнен при всех значениях управления и времени.

Отметим, что прием перехода к семейству вспомогательных задач (в нашем случае они конечномерные) и использование центрированной системы компактов также был предложен А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным (см. [10; 18; 19]). Он уже применялся нами в работах [4; 5; 20] для общей задачи понтрягинского типа, без фазовых ограничений, где конечномерность получалась за счет использования обычных игольчатых вариаций управления (пакета иголок), и ширины иголок были параметрами задачи. В задаче с фазовыми ограничениями использовать игольчатые вариации вряд ли возможно (см. ниже сноску 6).

Для простоты изложения и в целях наиболее ясной демонстрации того эффекта, который обеспечивает v-замена, мы проведем здесь доказательство для случая одного фазового ограничения. Случай нескольких ограничений требует дополнительных технических конструкций; он будет рассмотрен в наших дальнейших работах.

2. Постановка задачи и принцип максимума в ней

Пусть $x(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ есть абсолютно непрерывная функция (*фазовая переменная*), $u(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^r$ — измеримая ограниченная функция (*управление*). Отрезок времени $[t_0, t_1]$ заранее не фиксирован. Рассмотрим следующую задачу с функционалом типа Майера:

$$J := F_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \min, \tag{2.1}$$

$$F(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \leqslant 0, \quad K(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \tag{2.2}$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \ \text{ п.в. на } \ [t_0, t_1], \tag{2.3}$$

$$\Phi(t, x(t)) \leqslant 0 \ \text{ на } \ [t_0, t_1]. \tag{2.4}$$

Здесь F и K — вектор-функции размерностей $d(F)$ и $d(K)$, функция Φ скалярная. Предполагается, что F_0, F, K — функции класса C^1, а f и Φ непрерывны вместе с производными по t и x. Множество $U \subset \mathbb{R}^r$ произвольно. Задачу (2.1)–(2.4) для краткости назовем *задачей* A.

Отметим, что, несмотря на относительно простой вид этой задачи, к ней сводятся все задачи оптимального управления для систем ОДУ, не содержащие смешанных ограничений. При отсутствии ограничения (2.4) задача A есть общая (каноническая) задача оптимального управления понтрягинского типа.

З а м е ч а н и е. Строго говоря, свойства функций Φ и f надо предполагать выполненными на множествах $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q} \times U$ соответственно, где $\mathcal{Q}$ — некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, а свойства функций F_0, F, K — на некотором открытом множестве $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$. Как правило, это всегда подразумевается без явного указания множеств $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$. Мы также не будем отвлекаться на эти несущественные детали.

Пару функций $w(t) = (x(t), u(t))$ вместе с отрезком их определения $[t_0, t_1]$ будем называть *процессом* задачи. Процесс называется *допустимым*, если он удовлетворяет всем ограничениям задачи. При этом условия (2.3) предполагаются выполненными почти всюду. Как обычно, будем говорить, что допустимый процесс $\hat{w}(t) = (\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \mid t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, доставляет *сильный минимум,* если $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $J(w) \geqslant J(\hat{w})$ для всех допустимых процессов $w(t) = (x(t), u(t)) \mid t \in [t_0, t_1]$, удовлетворяющих условиям

$$|t_0 - \hat{t}_0| < \varepsilon, \quad |t_1 - \hat{t}_0| < \varepsilon, \quad |x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon \ \text{ на } \ [t_0, t_1] \cap [\hat{t}_0, \hat{t}_1].$$

Мы будем предполагать, что концы такого "оптимального" процесса не лежат на фазовой границе; точнее, что для них выполнены строгие неравенства

$$\Phi(t_0, \hat{x}(t_0)) < 0, \qquad \Phi(t_1, \hat{x}(t_1)) < 0. \tag{2.5}$$

Для формулировки необходимых условий оптимальности в задаче A нам потребуются следующие обозначения. Введем *функцию Понтрягина*

$$H(\psi_x, t, x, u) = \psi_x f(t, x, u),$$

где ψ_x есть вектор-строка размерности n (зависимость H от ψ_x иногда будем опускать), и *концевую функцию Лагранжа*

$$l(t_0, x_0, t_1, x_1) = (\alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K)(t_0, x_0, t_1, x_1).$$

Здесь α_0 — число, α, β — вектор-строки тех же размерностей, что и F, K соответственно (зависимость l от α_0, α, β мы опускаем).

Пусть $w = (x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, — допустимый процесс задачи A. Будем говорить, что для него выполнен *принцип максимума*, если существуют число α_0, вектор-строки $\alpha \in \mathbb{R}^{d(F)}$, $\beta \in \mathbb{R}^{d(K)}$, неубывающая функция $\mu(t)$, функции ограниченной вариации $\psi_x(t)$, $\psi_t(t)$ размерности $n, 1$ соответственно (где ψ_x есть строка, x и t — индексы, а не обозначения производных) такие, что

(i) $\quad \alpha_0 \geqslant 0\,,\ \alpha \geqslant 0\,;$

(ii) $\quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} d\mu > 0;$

(iii) $\quad \alpha F(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \quad \Phi(t, x(t))\, d\mu(t) = 0;$

(iv_x) $\quad -\dot{\psi}_x(t) = H_x(\psi_x(t), t, x(t), u(t)) - \dfrac{d\mu(t)}{dt}\, \Phi_x(t, x(t));$

(iv_t) $\quad -\dot{\psi}_t(t) = H_t(\psi_x(t), t, x(t), u(t)) - \dfrac{d\mu(t)}{dt}\, \Phi_t(t, x(t));$

(v_x) $\quad \psi_x(t_0) = l_{x_0}(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \quad \psi_x(t_1) = -l_{x_1}(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1));$

(v_t) $\quad \psi_t(t_0) = l_{t_0}(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \quad \psi_t(t_1) = -l_{t_1}(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1));$

(vi) $\quad H(\psi_x(t), t, x(t), u(t)) + \psi_t(t) = 0$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$;

(vii) $\quad H(\psi_x(t-0), t, x(t), u') + \psi_t(t-0) \leqslant 0$ и $H(\psi_x(t+0), t, x(t), u') + \psi_t(t+0) \leqslant 0$
для всех $t \in [t_0, t_1]$ и всех $u' \in U$.

Функции $\psi_x(t)$ и $\psi_t(t)$ называются *сопряженными переменными*[4]. Удобно пока не конкретизировать, с какой стороны они непрерывны, а считать, что в каждой точке t эти функции имеют два значения — левое и правое; в точках непрерывности (а это все, кроме счетного множества) эти значения совпадают. Условие (vii) очевидно эквивалентно тому, что

[4]Обозначения ψ_x и ψ_t предложены А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным. Их удобство быстро выясняется при решении конкретных задач с многими фазовыми переменными.

$H(\psi_x(t), t, x(t), u') + \psi_t(t) \leqslant 0$ во всех точках непрерывности функций ψ_x и ψ_t. Отметим также, что второе условие в (iii) эквивалентно тому, что $d\mu(t) = 0$ на любом интервале, где $\Phi(t, x(t)) < 0$.

Условия (i)–(v_t) называются *условиями неотрицательности, нетривиальности, дополняющей нежесткости, сопряженными уравнениями и условиями трансверсальности* соответственно. Условие (vi) не имеет пока стандартного названия; его можно назвать *законом изменения энергии*, так как из него и сопряженного уравнения для ψ_t следует уравнение для функции H, которая в механических задачах, как правило, имеет смысл энергии системы:

$$\dot H = H_t \quad \text{или} \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}\,.$$

(В случае, когда задача автономна, т. е. $f = f(x,u)$ и $\Phi = \Phi(x)$ не зависят от t, получаем *закон сохранения энергии*: $\dot H = 0$, т. е. $H = \mathrm{const}$).

Из условий (vi) и (vii) вытекает *условие максимума* функции Понтрягина:

$$\max_{u' \in U} H(\psi_x(t), t, x(t), u') = H(\psi_x(t), t, x(t), u(t)) \quad \text{для почти всех} \quad t \in [t_0, t_1],$$

благодаря которому вся совокупность условий (i)–(vii) называется *принципом максимума.* При отсутствии фазового ограничения (2.4) $d\mu(t) \equiv 0$, и мы получаем классический принцип максимума Понтрягина для канонической понтрягинской задачи.

Отметим, что сопряженные уравнения (iv_x)–(iv_t) можно понимать как равенства мер на отрезке $[t_0, t_1]$:

$$-d\psi_x(t) = H_x(\psi_x(t), t, x(t), u(t))\, dt - \Phi_x(t, x(t)) d\mu(t),$$
$$-d\psi_t(t) = H_t(\psi_x(t), t, x(t), u(t))\, dt - \Phi_t(t, x(t)) d\mu(t).$$

Можно также записать эти равенства в интегральной форме:

$$\psi_x(t+0) - \psi_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} -H_x(\psi_x(s), s, x(s), u(s))\, ds + \int_{t_0}^{t+0} \Phi_x(s, x(s)) d\mu(s),$$

$$\psi_t(t+0) - \psi_t(t_0) = \int_{t_0}^{t} -H_t(\psi_x(s), s, x(s), u(s))\, ds + \int_{t_0}^{t+0} \Phi_t(s, x(s)) d\mu(s).$$

Необходимые условия сильного минимума даются следующей теоремой, впервые доказанной (для несколько менее общей задачи) в [2] и обобщающей классический принцип максимума Понтрягина [1].

Теорема 1. *Если процесс $\hat w = (\hat x(t), \hat u(t)) \mid t \in [\hat t_0, \hat t_1])$ доставляет сильный минимум в задаче A, то для него выполнен принцип максимума (i)–(vii).*

Доказательство удобно сначала провести не для поставленной общей задачи A, а для более частной задачи, в которой зависимость от времени отсутствует.

3. Автономная задача B

Рассмотрим следующую задачу B на нефиксированном отрезке $[t_0, t_1]$:

$$J := F_0(x(t_0), x(t_1)) \to \min, \tag{3.1}$$

$$F(x(t_0), x(t_1)) \leqslant 0, \quad K(x(t_0), x(t_1)) = 0, \tag{3.2}$$

$$\dot x(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \ \text{ п.в. на } [t_0, t_1], \tag{3.3}$$

$$\Phi(x(t)) \leqslant 0 \ \text{ на } \ [t_0, t_1]. \tag{3.4}$$

Для нее из сопряженного уравнения (iv_t) следует, что $\psi_t = \text{const}$, и тогда из условий трансверсальности (v_t) получаем $\psi_t \equiv 0$, поэтому вместо ψ_x будем писать просто ψ. В остальном формулировка принципа максимума остается без изменений. Таким образом, условия (vi), (vii) для задачи запишутся в виде $\psi(t)f(x(t), u(t)) = 0$ и $\psi(t \pm 0)f(x(t), u') \leqslant 0$ соответственно.

Хотя задача B и является частным случаем задачи A, любую задачу A можно привести к виду (3.1)–(3.4). Это достигается с помощью следующего простого приема. К управляемой системе $\dot{x} = f(t, x, u)$ добавим уравнение $dt/d\tau = 1$, считая, что τ — новое время, а $t = t(\tau)$ — новая фазовая переменная. Функции $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ также полагаем теперь зависящими от нового времени: $x = x(\tau)$, $u = u(\tau)$. В результате приходим к следующей задаче A':

$$J = F_0(t(\tau_0), x(\tau_0), t(\tau_1), x(\tau_1)) \to \min,$$

$$F(t(\tau_0), x(\tau_0), t(\tau_1), x(\tau_1)) \leqslant 0, \quad K(t(\tau_0), x(\tau_0), t(\tau_1), x(\tau_1)) = 0,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = f(t, x, u), \quad \frac{dt}{d\tau} = 1, \quad u \in U, \quad \Phi(x(t)) \leqslant 0, \tag{3.5}$$

где $t(\tau)$, $x(\tau)$ — фазовые переменные, $u(\tau)$ — управление, $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ — нефиксированный отрезок. Ясно, что задача A' имеет тип B.

Нетрудно видеть, что и допустимые, и оптимальные процессы обеих задач находятся во взаимно-однозначном соответствии. Поэтому, получив необходимые условия оптимальности в задаче B, можно получить и необходимые условия в задаче A. Функция Понтрягина для "автономной" системы (3.5) есть $\widetilde{H} = \psi_x f + \psi_t$, "автономные" условия $\widetilde{H}(x, u) = 0$ и $\widetilde{H}(x, u') \leqslant 0$ имеют вид $\psi_x f(x, u) + \psi_t = 0$ и $\psi_x f(x, u') + \psi_t \leqslant 0$, т. е. это в точности условия (vi) и (vii). Детали этой переписки мы оставляем читателю в качестве несложного упражнения.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1 для задачи B. Для этого мы опять превратим время в фазовую переменную, но теперь положим $dt/d\tau = v(\tau)$, где функция $v(\tau)$ будет лишь неотрицательная, но не всюду положительная и, следовательно, $t = t(\tau)$ — монотонно неубывающая, но не строго возрастающая функция. Подобная необратимая замена, превращающая время t в фазовую переменную, была предложена А. Я. Дубовицким и использовалась в его совместных работах с А. А. Милютиным [2; 6] и затем А. А. Милютиным [8; 9]; она была названа ими *v-заменой.* Нетривиальный момент здесь заключается в том, что малые вариации нового управления $v(\tau)$ будут приводить к вариациям типа игольчатых для исходного управления $u(t)$. Простейший вариант такой v-замены — с кусочно-постоянными $v(\tau)$ — мы сейчас и рассмотрим.

Индекс θ. Пусть $\hat{w} = (\hat{x}(t), \hat{u}(t) \mid t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1])$ — оптимальный процесс задачи B. С этим процессом мы свяжем семейство конечномерных задач B^θ и их оптимальные решения, занумерованные некоторым индексом θ.

Под индексом будем понимать набор значений времени и управления

$$\theta = \{(t^1, u^1), \ \ldots, \ (t^s, u^s)\}$$

такой, что $\hat{t}_0 < t^1 \leqslant \ldots \leqslant t^s < \hat{t}_1$, а значения $u^k \in U$, $k = 1, \ldots, s$, произвольны. Длина индекса $s = s(\theta)$ зависит от θ.

Определим отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ следующим образом: берем отрезок $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ и в точках $t^1, \ldots, t^s$ вставляем отрезки единичной длины, сохраняя всякий раз положение точки $\hat{t}_0$. В результате получаем отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ с концами $\tau_0 = \hat{t}_0$, $\tau_1 = \hat{t}_1 + s$, а вставленные отрезки будут иметь вид

$$\Delta^1 = [t^1, \, t^1 + 1], \quad \Delta^2 = [t^2 + 1, \, t^2 + 2], \quad \ldots, \quad \Delta^s = [t^s + (s-1), \, t^s + s].$$

Положим $E_0 = \bigcup\limits_1^s \Delta^k, \quad E_+ = [\tau_0, \tau_1] \backslash E_0$. Пусть

$$v^\theta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in E_0, \\ 1, & \tau \in E_+, \end{cases} \qquad t^\theta(\tau) = \hat t_0 + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} v^\theta(r)dr, \quad \tau \in [\tau_0, \tau_1].$$

Тогда $\dfrac{dt^\theta(\tau)}{d\tau} = v^\theta(\tau), \quad t^\theta(\tau_0) = \hat t_0\,, \quad t^\theta(\tau_1) = \hat t_1$. Таким образом, $t^\theta(\tau)$ — кусочно-линейная неубывающая функция, отображающая $[\tau_0, \tau_1]$ на $[\hat t_0, \hat t_1]$, причем Δ^k — ее отрезки постоянства и $t^\theta(\Delta^k) = t^k$, $k = 1, \ldots, s$.

Положим

$$u^\theta(\tau) = \begin{cases} \hat u(t^\theta(\tau)), & \tau \in E_+, \\ u^k, \quad \tau \in \Delta^k, & k = 1, \ldots, s; \end{cases} \qquad x^\theta(\tau) = \hat x(t^\theta(\tau)). \tag{3.6}$$

Тогда $u^\theta(\tau)$ — ограниченная измеримая функция, $u^\theta(\tau) \in U$ п.в. на $[\tau_0, \tau_1]$, а $x^\theta(\tau)$ — абсолютно непрерывная функция; при этом

$$\frac{dx^\theta(\tau)}{d\tau} = v^\theta(\tau)\, f(x^\theta(\tau), u^\theta(\tau)), \quad x^\theta(\tau_0) = \hat x(\hat t_0), \quad x^\theta(\tau_1) = \hat x(\hat t_1),$$

т. е. концы новой траектории $x^\theta(\tau)$ совпадают с концами исходной $\hat x(t)$.

Обратим внимание, что некоторые точки t^k могут совпадать: $t^{k'} = \ldots = t^{k''} = t_*$, поэтому в такой точке t_* вставляется подряд несколько единичных отрезков, на каждом из которых задается $v^\theta(\tau) = 0$ и свое значение $u^\theta(\tau) = u^k$.

Множество E_0 состоит из конечного числа отрезков Δ^k, $k = 1, \ldots, s$, множество E_+ — из конечного числа интервалов или полуинтервалов. Все указанные отрезки, интервалы и полуинтервалы множеств E_0 и E_+ объединим в общий набор, упорядочим и обозначим составляющие этого набора через σ_k, $k = 1, \ldots, m$. Итак, $[\tau_0, \tau_1] = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_m$, причем различные σ_k не перекрываются. Обозначим через $\chi_k(\tau)$ характеристическую функцию множества σ_k, $k = 1, \ldots, m$.

Задача B^θ индекса θ. Для данного индекса θ зафиксируем построенный отрезок $[\tau_0, \tau_1]$. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{m+n}$ с переменными $z = (z_1, \ldots, z_m), \quad x_0 = x(\tau_0)$.
Положим

$$v(\tau) = \sum_{k=1}^m z_k\, \chi_k(\tau), \tag{3.7}$$

т. е. z_k есть значения управления $v(\tau)$ на участке σ_k. Управление $u^\theta(\tau)$ зафиксируем и не будем варьировать.

Задача B^θ в пространстве $\mathbb{R}^{m+n}$ имеет вид

$$F_0(x_0, x(\tau_1)) \to \min,$$

$$F(x_0, x(\tau_1)) \leqslant 0, \quad K(x_0, x(\tau_1)) = 0,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = v(\tau)\, f(x(\tau), u^\theta(\tau)), \quad x(\tau_0) = x_0,$$

$$-z \leqslant 0, \quad \Phi(x(\tau)) \leqslant 0 \text{ на } [\tau_0, \tau_1].$$

Назовем ее *присоединенной задачей*, соответствующей процессу $\hat w(t)$ и индексу θ.

С учетом (3.7) управляемая система этой задачи фактически такова:

$$\frac{dx}{d\tau} = \sum_{k=1}^m z_k \chi_k(\tau)\, f(x, u^\theta(\tau)), \tag{3.8}$$

поэтому для каждой пары (z, x_0) значение $x_1 = x(\tau_1)$ определяется однозначно и, более того, гладким образом зависит от этой пары. (Здесь априори $z_k \in \mathbb{R}$ произвольны; условие $z_k \geqslant 0$ присутствует лишь в ограничениях задачи, но сама система (3.8) имеет смысл и без него, ее правая часть есть гладкая функция z и x.)

Пусть $\hat{z}_k$ — значение $v^\theta(\tau)$ на σ_k, $k = 1, \ldots, m$, т. е. $v^\theta(\tau) = \sum \hat{z}_k \, \chi_k(\tau)$. Напомним, что $\hat{z}_k = 0$, если $\sigma_k \subset E_0$, и $\hat{z}_k = 1$, если $\sigma_k \subset E_+$. Положим $\hat{z} = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_m)$, $\hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0)$. Пару $(\hat{z}, \hat{x}_0)$ назовем *присоединенной точкой* задачи B^θ, соответствующей процессу $\hat{w}(t)$ [5].

Обратим внимание, что при оптимальном $\hat{z}$, т. е. при $v = v^\theta$, каждый отрезок $\Delta^k \subset E_0$ при отображении $\tau \mapsto t(\tau)$ схлопывается и переходит в точку t^k, так что выбранные нами значения $u^\theta(\tau) = u^k$ на Δ^k не проявляются в исходном времени t и поэтому, казалось бы, не играют никакой роли. Но так происходит только на оптимальном $\hat{z}$! Если z немного отклоняется от оптимального, то соответствующее $z_k > 0$, и отрезок $\Delta^k \subset E_0$ переходит уже в маленький отрезок t длины z_k, на котором $u(t) = u^k$. Тем самым в исходном времени возникает *игольчатая вариация* управления. Отметим, однако, что от "стандартной" игольчатой вариации эта вариация отличается тем, что мы *не заменяем* управление $\hat{u}(t)$ на малом отрезке около точки t^k, а *расшиваем* эту точку, вставляя в это место малый отрезок с заданным значением $u(t) = u^k$. Поскольку точек t^k несколько, в итоге получаем пакет игольчатых вариаций[6].

Как уже отмечалось во введении, преимущество таких "вставных" иголок по сравнению с обычными состоит также в том, что если последние можно делать только в точках непрерывности оптимального управления $\hat{u}(t)$ (иначе не получим гладкой зависимости траектории от ширины иголки), то для реализации "вставных" иголок никаких предположений относительно управления $\hat{u}(t)$ не требуется; оно может быть произвольной измеримой ограниченной функцией.

В задаче B^θ управление $u^\theta(\tau)$ не варьируется, и нетрудно видеть, что, по сути дела, эта задача получена из исходной задачи B сужением (причем существенным) класса допустимых управлений до пакетов "вставных" игольчатых вариаций. Отсюда следует, что пара $(\hat{z}, \hat{x}_0)$, соответствующая оптимальному процессу $\hat{w}(t)$ задачи B, тоже оптимальна, т. е. доставляет локальный минимум в задаче B^θ.

Обратим внимание, что хотя все "установочные" функции в задаче B^θ гладкие, эту задачу все же нельзя назвать гладкой, ибо в ней имеется континуальное число ограничений неравенства $\Phi(x(\tau)) \leqslant 0$. (Их можно трактовать как принадлежность функции $\Phi(x(\tau))$ неположительному конусу пространства $C[\tau_0, \tau_1]$.) Это стандартная задача "полубесконечного" математического программирования, для которой можно воспользоваться известными необходимыми условиями локального минимума — общим правилом множителей Лагранжа (см. напр. [4;21]). В данном случае эти условия состоят в следующем.

Теорема 2. *Пусть точка $(\hat{z}, \hat{x}_0)$ доставляет локальный минимум в задаче B^θ. Тогда найдется число α_0, векторы-строки $\alpha \in \mathbb{R}^{d(F)}$, $\beta \in \mathbb{R}^{d(K)}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{m+n}$ и неубывающая функция $\mu^\theta(\tau)$ с условием $\mu^\theta(\tau_0) = 0$ такие, что*

$$(i) \quad \alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0,$$

$$(ii) \quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \int_{t_0}^{t_1} d\mu^\theta(\tau) > 0,$$

$$(iii) \quad \alpha F(\hat{x}_0, \hat{x}_1) = 0, \quad \gamma \, \hat{z} = 0, \quad \Phi(x^\theta(\tau)) \, d\mu^\theta(\tau) = 0,$$

[5] Для других классов задач, когда соответствующая задача B^θ ставится в некотором пространстве функций, получаем *присоединенный процесс* задачи B^θ.

[6] Использовать стандартные игольчатые вариации, подобно тому как это делалось, например, в [20], здесь не представляется возможным, поскольку $\Phi(x(\tau))$ не будет дифференцируемо по ширине иголки, ибо уже производная траектории $x(\tau)$ по ширине иголки будет разрывной функцией.

и при этом функция Лагранжа задачи B^θ

$$L(z, x_0) = (\alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K) - \gamma z + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x(\tau))\, d\mu^\theta(\tau)$$

стационарна в точке $(\hat z, \hat x_0)$:

$$L'(\hat z, \hat x_0) = 0. \tag{3.9}$$

Наша ближайшая цель — расшифровать эти условия.

4. Условия стационарности в задаче B^θ

Как и прежде, введем для удобства обозначения концевую функцию Лагранжа $l = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K$ и для краткости положим $f^\theta = f(x^\theta, u^\theta)$, $f^\theta_x = f_x(x^\theta, u^\theta)$.

Будем учитывать, что функция $x(\tau)$ и ее концевое значение $x_1 = x(\tau_1)$ гладким образом определяется парой (z, x_0) в силу уравнения (3.8) и начального условия $x(\tau_0) = x_0$. Другими словами, имеется оператор $P : (z, x_0) \in \mathbb{R}^{m+n} \longmapsto x(\tau) \in C[\tau_0, \tau_1]$. Его производная есть линейное отображение $P'(z, x_0) : (\bar z, \bar x_0) \mapsto \bar x(\tau)$, где функция $\bar x(\tau)$ есть решение задачи Коши для уравнения в вариациях:

$$\frac{d\bar x}{d\tau} = v^\theta f_x(x^\theta, u^\theta)\, \bar x + \sum \bar z_k \chi_k\, f(x^\theta, u^\theta), \qquad \bar x(\tau_0) = \bar x_0\,. \tag{4.1}$$

Поэтому условие (3.9) означает, что для любых $(\bar z, \bar x_0)$

$$L'(\hat z, \hat x_0)(\bar z, \bar x_0) = l_{x_0} \bar x_0 + l_{x_1} \bar x_1 - \gamma \bar z + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi'(x^\theta(\tau))\, \bar x(\tau)\, d\mu^\theta(\tau) = 0, \tag{4.2}$$

где $\bar x_1 := \bar x(\tau_1)$. (Производные функции $l(x_0, x_1)$ берутся в оптимальной точке $(\hat x_0, \hat x_1)$.)

Перепишем теперь это равенство в терминах независимых переменных $(\bar z, \bar x_0)$. Для этого нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 1. *Пусть абсолютно непрерывная функция* $\bar x(\tau)$ *и функция ограниченной вариации* $\psi(\tau)$ (*обе* n-*мерные*) *удовлетворяют уравнениям*

$$\dot{\bar x} = A\bar x + \bar\xi, \qquad \bar x(\tau_0) = \bar x_0\,,$$
$$\dot\psi = -\psi A + \dot\mu\,\varphi, \quad \psi(\tau_1) = -l_1\,,$$

где матрица $A(\tau)$ *и функция* $\bar\xi(\tau)$ *измеримы и ограничены,* $\varphi(\tau)$ *непрерывна,* $\mu(\tau)$ *— неубывающая функция, постоянная в окрестностях точек* τ_0, τ_1, *и* l_1 *есть вектор из* $\mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$l_1\, \bar x_1 + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \varphi\, \bar x\, d\mu = -\psi_0\, \bar x_0 - \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \psi\, \bar\xi\, d\tau. \tag{4.3}$$

Доказательство. Возьмем производную по времени от произведения $\psi\, \bar x$:

$$\frac{d}{d\tau}(\psi\, \bar x) = (-\psi A + \dot\mu\,\varphi)\, \bar x + \psi\,(A\bar x + \bar\xi) = \dot\mu\,\varphi\,\bar x + \psi\,\bar\xi\,,$$

поэтому

$$\psi_1\, \bar x_1 - \psi_0\, \bar x_0 = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \varphi\, \bar x\, d\mu + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \psi\, \bar\xi\, d\tau.$$

Отсюда с учетом граничного значения $\psi_1 = -l_1$ получаем (4.3). □

Применим теперь эту лемму к равенству (4.2) с учетом уравнения (4.1). У нас

$$A = v^\theta(\tau)\, f_x^\theta(\tau), \qquad \bar\xi = \sum \bar z_k\, \chi_k(\tau)\, f^\theta(\tau), \qquad \varphi = \Phi'(x^\theta(\tau)), \qquad l_1 = l_{x_1}\,.$$

Введем функцию ограниченной вариации $\psi^\theta(\tau)$ (сопряженную переменную задачи B^θ), которая есть решение уравнения

$$\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = -v^\theta \psi^\theta f_x^\theta + \dot\mu^\theta\, \Phi'(x^\theta), \qquad \psi^\theta(\tau_1) = -l_{x_1}\,. \tag{4.4}$$

Тогда по лемме 1 равенство (4.2) принимает вид

$$l_{x_0}\bar x_0 - \gamma \bar z - \psi_0 \bar x_0 - \sum_k \bar z_k \int_{\tau_0}^{\tau_1} \chi_k(\tau)\, \psi^\theta f^\theta\, d\tau = 0,$$

т. е.

$$\big(l_{x_0} - \psi^\theta(\tau_0)\big)\, \bar x_0 - \sum_k \bar z_k \int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta\, d\tau = \sum_k \gamma_k\, \bar z_k\,.$$

Это равенство выполнено для всех $\bar x_0 \in \mathbb{R}^n$ и всех $\bar z_k$, $k = 1, \ldots, m$. Отсюда $\psi^\theta(\tau_0) = l_{x_0}$, и при каждом k

$$\int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta\, d\tau = -\gamma_k\,. \tag{4.5}$$

Вспомним, что все $\gamma_k \geqslant 0$, и согласно условию дополняющей нежесткости $\gamma \hat z := \sum \gamma_k \hat z_k = 0$; значит, $\gamma_k \hat z_k = 0$ для всех k. Если $\sigma_k \subset E_+$, то $\hat z_k = 1$, и тогда $\gamma_k = 0$. Если же $\sigma_k \subset E_0$, то $\hat z_k = 0$, и тогда нам известно лишь, что $\gamma_k \geqslant 0$.

Наконец, заметим, что из условия нетривиальности (ii) теоремы 2 можно исключить γ. Действительно, если $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 0$ и $d\mu^\theta \equiv 0$, то $l = 0$, и сопряженное уравнение (4.4) для ψ^θ превращается в однородное ОДУ с нулевым значением на конце, поэтому $\psi^\theta \equiv 0$; тогда из (4.5) также и $\gamma = 0$.

Подведем предварительный итог проделанной расшифровки условий стационарности.

Теорема 3. *Для любого индекса θ существуют набор $\lambda^\theta = (\alpha_0, \alpha, \beta, \mu^\theta(\tau))$ и соответствующая ему функция ограниченной вариации $\psi^\theta(\tau)$ такие, что выполнены условия:*

(i) $\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad d\mu^\theta(\tau) \geqslant 0;$

(ii) $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} d\mu^\theta(\tau) = 1;$

(iii) $\alpha F(\hat x_0, \hat x_1) = 0, \quad \Phi(x^\theta(\tau))\, d\mu^\theta(\tau) = 0;$

$$\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = -v^\theta \psi^\theta f_x^\theta + \dot\mu^\theta\, \Phi'(x^\theta), \quad \psi^\theta(\tau_0) = l_{x_0}\,, \quad \psi^\theta(\tau_1) = -l_{x_1}; \tag{4.6}$$

$$\int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta d\tau \quad \begin{cases} = 0, & \text{\it если } \sigma_k \subset E_+\,, \\ \leqslant 0, & \text{\it если } \sigma_k \subset E_0\,, \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{4.7}$$

Рассмотрим подробнее второе условие из (4.7). Возьмем произвольный отрезок $\sigma_k \subset E_0$; обозначим его как $\sigma_k = [\tau', \tau'']$. На нем $u^\theta(\tau) = u^k$ постоянно, $v^\theta = 0$, поэтому значение $x^\theta(\tau)$ также постоянно; обозначим его через $\hat x_*$; при этом $f^\theta = f(\hat x_*, u^k)$. Тогда в силу (4.6) $\dot\psi^\theta = \dot\mu^\theta\, \Phi'(\hat x_*)$, поэтому $\psi^\theta(\tau)$ меняется в пространстве $\mathbb{R}^n$ в постоянном направлении $\Phi'(\hat{x}_*)$. Согласно (4.7)

$$\int\limits_{\tau'}^{\tau''} \psi^\theta(\tau) f(\hat{x}_*,\, u^k)\, d\tau \;\leqslant\; 0. \tag{4.8}$$

Слева и справа к данному отрезку $[\tau', \tau'']$ могут примыкать и другие отрезки из E_0. (При отображении $\tau \mapsto t$ они все перейдут в одну точку t_k.) Пусть $[\tau'_*,\, \tau''_*]$ есть объединение данного отрезка со всеми примыкающими к нему отрезками из E_0. (Если слева других таких нет, то $\tau'_* = \tau'$, а если нет справа, то $\tau''_* = \tau''$.) Тогда на всем этом объединенном отрезке $v^\theta = 0$, так что по-прежнему $x^\theta(\tau) = \hat{x}_*$ постоянно, $\dot{\psi}^\theta = \dot{\mu}^\theta\, \Phi'(\hat{x}_*)$, поэтому $\psi^\theta(\tau)$ по-прежнему меняется в том же постоянном направлении $\Phi'(\hat{x}_*)$.

Рассмотрим подынтегральную функцию $h^k(\tau) = \psi^\theta(\tau) f(\hat{x}_*, u^k)$ из (4.8) на объединенном отрезке $[\tau'_*,\, \tau''_*]$. Обратим внимание, что на этом отрезке управление $u^\theta(\tau)$, вообще говоря, не постоянно, а лишь кусочно-постоянно, но мы зафиксировали значение u^k и рассматриваем функцию $h^k(\tau)$ с этим значением даже на "чужих" отрезках из E_0, примыкающих к данному. Как и $\psi^\theta(\tau)$, это есть функция ограниченной вариации. Для нее на всем отрезке $[\tau'_*,\, \tau''_*]$ имеем

$$\frac{dh^k}{d\tau} = \dot{\mu}^\theta(\tau)\, \Phi'(\hat{x}_*)\, f(\hat{x}_*, u^k).$$

Пусть для определенности константа $\Phi'(\hat{x}_*)\, f(\hat{x}_*, u^k) \geqslant 0$. Тогда $h^k(\tau)$ не убывает, поэтому из (4.8) следует, что $h^k(\tau' + 0) \leqslant 0$, тем более $h^k(\tau'_* + 0) \leqslant 0$ (ибо $\tau'_* \leqslant \tau'$).

Мы утверждаем, что при этом и $h^k(\tau'_* - 0) \leqslant 0$. Действительно, в силу сопряженного уравнения (4.6) скачок функции h^k в точке τ'_* происходит в том же направлении:

$$\Delta h^k(\tau'_*) = h^k(\tau'_* + 0) \,-\, h^k(\tau'_* - 0) = \Delta\psi^\theta(\tau'_*)\, f(\hat{x}_*, u^k) = \Delta\mu^\theta(\tau'_*)\, \Phi'(\hat{x}_*)\, f(\hat{x}_*, u^k) \;\geqslant\; 0,$$

откуда $h^k(\tau'_* - 0) \leqslant h^k(\tau'_* + 0) \;\leqslant\; 0$, что и требовалось доказать.

Случай, когда $\Phi'(\hat{x}_*)\, f(\hat{x}_*, u^k) \leqslant 0$, аналогичным образом дает $h^k(\tau''_* + 0) \leqslant 0$.

Итак, мы показали, что второе условие из (4.7) обеспечивает выполнение хотя бы одного из неравенств:

$$\text{либо} \;\; h^k(\tau'_* - 0) \leqslant 0, \quad \text{либо} \;\; h^k(\tau''_* + 0) \leqslant 0, \tag{4.9}$$

где $[\tau'_*,\, \tau''_*]$ есть максимальный отрезок, содержащий данный отрезок $\sigma_k \subset E_0$, на котором сохраняется значение $v^\theta = 0$.

Перепишем теперь полученные условия в терминах исходного времени t. Это даст нам возможность рассматривать условия, полученные для различных индексов θ, на одном и том же отрезке $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$.

Конечнозначный принцип максимума индекса θ. Итак, на отрезке $[\tau_0, \tau_1]$ мы имеем неубывающую функцию $t^\theta(\tau)$, которая отображает его на отрезок $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, причем на каждом отрезке $\Delta_k \subset E_0$ она постоянна. При этом на $[\tau_0, \tau_1]$ имеются функции $u^\theta(\tau)$ и $x^\theta(\tau)$, связанные с исходными $\hat{x}(t)$ и $\hat{u}(t)$ по формулам (3.6).

Пусть $\tau^\theta(t)$ есть наименьший корень уравнения $t^\theta(\tau) = t$. Эта функция также не убывает, но имеет разрывы в заданных точках t^k (и только в них): $\Delta\tau(t^k) = \tau''_* - \tau'_*$, где $[\tau'_*,\, \tau''_*]$ — указанный выше максимальный отрезок, соответствующий точке t^k. Положим

$$\mu(t) = \mu^\theta(\tau^\theta(t)), \qquad \psi(t) = \psi^\theta(\tau^\theta(t)), \qquad t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1].$$

Нетрудно убедиться, что $\mu(t)$ есть по-прежнему неубывающая функция, имеющая в точках t^k скачки $\Delta\mu(t^k) = \mu(\tau''_* + 0) - \mu(\tau'_* - 0)$, а $\psi(t)$ есть функция ограниченной вариации, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t)\, f_x(\hat{x}(t)), \hat{u}(t))) + \frac{d\mu(t)}{dt}\, \Phi'(\hat{x}(t))$$

и имеющая те же концевые значения, что и $\psi^\theta(\tau)$. (Здесь мы также учли, что для $\tau \in E_+$ и соответствующего $t = t^\theta(\tau)$ имеем $d\mu(t) = d\mu^\theta(\tau)$. Проверку этих свойств мы оставляем читателю в качестве несложных упражнений.)

Напомним также, что в силу нашего предположения (2.5), в окрестностях точек $\hat t_0$, $\hat t_1$ мера не работает: $d\mu(t) = 0$, поэтому функция $\psi(t)$ непрерывна в этих точках.

Теорема 3 переписывается в исходном времени $t \in [\hat t_0, \hat t_1]$ следующим образом.

Теорема 4 (принцип максимума индекса θ). *Для любого индекса θ существуют набор $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \mu(t))$ и соответствующая ему функция ограниченной вариации $\psi(t)$ такие, что выполнены условия*:

(i) $\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad d\mu(t) \geqslant 0;$

(ii) $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + \int\limits_{\hat t_0}^{\hat t_1} d\mu(t) = 1;$

(iii) $\alpha F(\hat x_0, \hat x_1) = 0, \quad \Phi(\hat x(t)) d\mu(t) = 0;$

(iv) $\dfrac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t) f_x(\hat x(t)), \hat u(t))) + \dfrac{d\mu(t)}{dt} \Phi'(\hat x(t));$

(v) $\psi(\hat t_0) = l_{x_0}, \quad \psi(\hat t_1) = -l_{x_1};$

(vi) *для любого интервала или полуинтервала Δ, из которых состоит E_+,*

$$\int\limits_{t^\theta(\Delta)} \psi(t) f(\hat x(t)), \hat u(t))) dt = 0;$$

(vii) *для любой пары (t^k, u^k) из индекса θ выполнено хотя бы одно из неравенств*:

$$\textit{либо} \;\; \psi(t^k - 0)\, f(\hat x(t^k), u^k) \leqslant 0, \quad \textit{либо} \;\; \psi(t^k + 0)\, f(\hat x(t^k), u^k) \leqslant 0. \tag{4.10}$$

(Условие (vi) получается здесь из первого условия (4.7) с учетом того, что на каждом $\Delta \subset E_+$ отображение $\tau \to t$ взаимно-однозначно, $v^\theta(\tau) = 1$, и поэтому $dt = d\tau$. Условие (vii) вытекает из (4.9).)

Итак, для данного индекса θ мы получили набор множителей Лагранжа, которые порождают функцию $\psi(t)$, так что выполнены указанные условия (i)–(vii). Эти множители Лагранжа, вообще говоря, зависят индекса θ. Условия (i)–(v) одни и те же для всех индексов, а условия (vi)–(vii) связаны с каждым отдельным индексом. Наша цель теперь — перейти к условиям (vi)–(vii) с набором множителей, не зависящим от индекса θ.

5. Переход к универсальному принципу максимума

Как и в доказательстве принципа максимума в задаче без фазовых ограничений [4; 20], для учета условий, порождаемых различными индексами θ, проделаем следующую процедуру. Для данного индекса θ введем множество всех наборов $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \mu(t))$, удовлетворяющих условиям (i)–(v); обозначим его через Λ^θ. Это есть множество в пространстве

$$Y^* = \mathbb{R}^{1+d(F)+d(K)} \times C^*[\hat t_0, \hat t_1],$$

сопряженном к пространству $Y = \mathbb{R}^{1+d(F)+d(K)} \times C[\hat t_0, \hat t_1]$. Установим следующий ключевой факт.

Лемма 2. Λ^θ *есть слабый-* компакт (т. е. компакт относительно обычной сходимости конечномерных векторов* $(\alpha_0, \alpha, \beta)$ *и слабой-* сходимости мер* $d\mu(t)$ *в пространстве* C^**).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны набор $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta,\, \mu(t)) \in \Lambda^\theta$ и соответствующая ему функция ограниченной вариации $\psi(t)$. Прежде всего покажем, что она однозначно (с точностью до значений в точках ее разрыва) определяется набором λ из сопряженного уравнения (iv) и любого из концевых условий (v), например левого. Запишем это уравнение в виде равенства мер:

$$d\psi(t) = -\psi(t)\, f_x(\hat{x}(t)), \hat{u}(t)))\, dt + d\mu(t)\, \Phi'(\hat{x}(t)). \tag{5.1}$$

Пусть W есть фундаментальная матрица однородного уравнения: $\dot{W} = -W f_x\,,\ \ W(\hat{t}_0) = I$. Тогда для всех t справедлива формула Коши

$$\psi(t-0) = \left(\psi(\hat{t}_0) + \int\limits_{\hat{t}_0}^{t-0} \Phi'(\hat{x}(s))\, W^{-1}(s)\, d\mu(s)\right) W(t), \tag{5.2}$$

и аналогичная формула справедлива для значения $\psi(t+0)$.

Далее. Поскольку слабая-* топология пространства Y^* метризуема (так как Y сепарабельно), для установления компактности Λ^θ достаточно рассмотреть произвольную последовательность его элементов λ_n. Считаем сразу, что векторы $(\alpha_0, \alpha, \beta)_n$ сходятся к некоторым $(\alpha_0, \alpha, \beta)$.

Так как нормы всех мер $d\mu_n$ в совокупности ограничены в силу (ii), то из (5.2) с учетом ограниченности всех начальных значений $\psi_n(\hat{t}_0) = (l_{x_0})_n$ вытекает, что функции $\psi_n(t)$ будут равномерно ограничены общей константой. Отсюда согласно теоремам Хелли (см., например, [3, гл. 6]) найдется подпоследовательность, сходящаяся при каждом t к некоторой функции ограниченной вариации $\psi(t)$, причем меры $d\psi_n$ слабо-* сходятся к мере $d\psi$. Сохраним для этой подпоследовательности прежнюю нумерацию и считаем также, что и меры $d\mu_n$ слабо-* сходятся к некоторой мере $d\mu$, связанной с $d\psi$ соотношениями (5.1) и (5.2).

Ясно, что условия (i), (ii), (iv), (v) и первое равенство из (iii) при таком переходе к пределу сохраняются. Второе условие в (iii) означает, что на любом интервале, лежащем между соседними точками $t^k < t^{k+1}$, на котором $\Phi(\hat{x}(t)) < 0$, мера $d\mu(t) = 0$. Это эквивалентно тому, что для любой непрерывной функции $\eta(t)$, носитель которой содержится в этом интервале, $\displaystyle\int \eta(t)\, d\mu(t) = 0$. Очевидно, при переходе к слабому-* пределу это свойство сохраняется.

Поскольку $\psi_n(t) \to \psi(t)$ при всех t, то по теореме Лебега равенство (vi) также выдерживает предельный переход. Поэтому осталось рассмотреть лишь последнее условие (vii).

Зафиксируем любое k и, чтобы избежать путаницы с нумерацией последовательности, обозначим здесь $t^k = t_*\,,\ \ \hat{x}(t^k) = x_*\,,\ \ u^k = u$. (Напомним, что $u^k = u$ есть любая заранее заданная точка из U.) Рассмотрим последовательность функций ограниченной вариации $h_n(t) = \psi_n(t) f(x_*\,, u)$. Для нее также имеем сходимость $h_n(t) \to h(t) := \psi(t) f(x_*\,, u)$ при всех t, и, кроме того, в силу (iv)

$$\dot{h}_n(t) = \bigl(-\psi_n(t) f_x(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, f(x_*\,, u)\bigr) + \dot{\mu}_n(t)\, \Phi'(\hat{x}(t))\, f(x_*\,, u). \tag{5.3}$$

При этом скачок в точке t_*

$$\Delta h_n(t_*) = \Delta\mu_n(t_*)\, \Phi'(x_*)\, f(x_*\,, u).$$

Согласно (4.10) выполнено хотя бы одно из неравенств: $h_n(t_* - 0) \leqslant 0$ или $h_n(t_* + 0) \leqslant 0$. Без нарушения общности считаем, что константа $\Phi'(x_*) f(x_*\,, u) \geqslant 0$. Тогда $\Delta h_n(t_*) \geqslant 0$, и поэтому $h_n(t_* - 0) \leqslant 0$ для всех n. Покажем, что и для предельной h выполнено то же неравенство $h(t_* - 0) \leqslant 0$.

Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Из равномерной ограниченности всех $\psi_n(t)$ и непрерывности функции $\Phi'(\hat{x}(t))$ вытекает в силу (5.3), что найдутся $\delta > 0$ и константа c такие, что при всех n на интервале $(t_* - \delta,\, t_*)$ выполняется оценка $\dot{h}_n(t) \;\geqslant\; -c - \dot{\mu}_n\, \varepsilon$. Тогда на этом интервале с учетом нормировки (ii)

$$h_n(t_* - 0) - h_n(t) \;\geqslant\; -c\delta - \varepsilon \int d\mu_n \;\geqslant\; -c\delta - \varepsilon.$$

Уменьшив, если надо, δ, имеем $h_n(t_* - 0) - h_n(t) \geqslant -2\varepsilon$, т. е. $h_n(t) \;\leqslant\; h_n(t_* - 0) + 2\varepsilon$. Так как по условию $h_n(t_* - 0) \leqslant 0$, то отсюда получаем $h_n(t) \leqslant 2\varepsilon$ на интервале $(t_* - \delta,\, t_*)$. Поскольку ε и δ не зависят от номера n, это же неравенство выполнено и для поточечного предела: $h(t) \leqslant 2\varepsilon$ на том же интервале, а значит и $h(t_* - 0) \leqslant 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем $h(t_* - 0) \leqslant 0$. Лемма 2 доказана. $\square$

Таким образом, перебирая всевозможные индексы θ, мы для каждого из них получаем свой непустой компакт Λ^θ. Покажем, что семейство всех этих компактов образует *центрированную систему.* Для этого введем отношение порядка в множестве всех индексов. Будем говорить, что $\theta_1 \subset \theta_2$, если каждая пара (t^k, u^k) из θ_1 входит и в θ_2. Ясно что для любых двух индексов θ_1 и θ_2 найдется третий, содержащий каждый из них, например их объединение. Нетрудно заметить, что при расширении индекса θ множество Λ^θ сужается, т. е. включение $\theta_1 \subset \theta_2$ влечет обратное включение $\Lambda^{\theta_1} \supset \Lambda^{\theta_2}$. Пусть теперь имеется конечный набор компактов $\Lambda^{\theta_1}, \ldots, \Lambda^{\theta_m}$. Возьмем любой индекс θ, содержащий в себе все индексы $\theta_1, \ldots, \theta_m$. Тогда непустой компакт Λ^θ содержится в каждом из компактов $\Lambda^{\theta_1}, \ldots, \Lambda^{\theta_m}$ и, следовательно, в их пересечении. Отсюда вытекают центрированность семейства $\{\Lambda^\theta\}$ и, значит, непустота его пересечения $\Lambda_* = \bigcap\limits_\theta \Lambda^\theta$.

Возьмем произвольный набор множителей $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \mu) \in \Lambda_*$, и пусть $\psi(t)$ есть сопряженная функция, соответствующая этому набору. Для этого набора по определению выполнены условия (i)–(v). Выполнение условия (vi) в любом индексе θ означает, что для любого интервала (t', t'')

$$\int\limits_{t'}^{t''} \psi(t)\, f(\hat{x}(t)), \hat{u}(t)))\, dt = 0$$

(ибо найдется индекс, содержащий точки t', t''), а это эквивалентно выполнению почти всюду на $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ равенства

$$\psi(t)\, f(\hat{x}(t)), \hat{u}(t))) = 0.$$

Наконец, выполнение (vii) для выбранного “универсального” набора λ означает, что для любой точки $t \in (\hat{t}_0, \hat{t}_1)$ и любого $u \in U$ выполнено хотя бы одно из неравенств:

$$\text{либо} \quad \psi(t-0)\, f(\hat{x}(t), u) \leqslant 0, \qquad \text{либо} \quad \psi(t+0)\, f(\hat{x}(t), u) \leqslant 0.$$

Это очевидно эквивалентно тому, что $\psi(t)\, f(\hat{x}(t), u) \leqslant 0$ для всех точек непрерывности функции ψ из интервала $(\hat{t}_0, \hat{t}_1)$, а тогда и для его граничных точек (поскольку функция ψ непрерывна в этих точках), а для точек разрыва ψ выполнены оба указанных неравенства.

Таким образом, для выбранного набора λ выполнены все условия (i)–(vii) принципа максимума. Теорема 1 для автономной задачи B доказана, а вместе с этим, как уже говорилось, она доказана и для исходной задачи A. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1969. 393 р.
2. **Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.** Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.

3. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 p.
4. **Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.** Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во мехмата МГУ, 2004. 168 с.
(Доступно на: http://www.math.msu.su/department/opu/node/139).
5. Оптимальное управление / Э. М. Галеев, М.И. Зеликин, С.В. Конягин [и др.]; под ред. Н. П. Осмоловского, В. М. Тихомирова. М.: МЦНМО, 2008. 320 с. ISBN 978-5-94057-367-8 .
6. **Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.** Теория принципа максимума // Методы теории экстремальных задач в экономике: сб. ст. / В.Л. Левин. М.: Наука, ЦЭМИ, 1981. С. 6–47.
7. **Гирсанов И.В.** Лекции по теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1970. 122 с.
8. **Милютин А.А.** Принцип максимума в регулярной задаче оптимального управления: в кн.: Необходимое условие в оптимальном управлении / Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А. М.: Наука, 1990. 320 с. ISBN 5-02-006708-3 .
9. **Милютин А.А.** Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. М., Физматлит, 2001. 303 с. ISBN: 5-9221-0114-5 .
10. **Милютин А.А.** Общие схемы получения необходимых условий экстремума и задачи оптимального управления // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 5 (155). С. 110–116.
11. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М., Наука, 1974. 481 p.
12. **Арутюнов А.В.** Принцип максимума Понтрягина в теории оптимального управления // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 1997. Т. 42.
13. **Vinter R.B., Zheng H.** Necessary conditions for optimal control problems with state constraints // Transactions of AMS. 1998. Vol. 350, no. 3. P. 1181–1204.
14. **Bourdin L.** Note on Pontryagin maximum principle with running state constraints and smooth dynamics – Proof based on the Ekeland variational principle [e-resource]. 26 p.
URL: https://arxiv.org/pdf/1604.04051.pdf .
15. **Bonnans J.F.** Course on optimal control [e-resource]. OROC Ensta, Paris-Tech, 2017.
URL: www.cmap.polytechnique.fr/~bonnans/notes/oc/oc.html .
16. **Arutyunov A.V., Karamzin D.Y., Pereira F.L.** The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: revisited // JOTA. 2011. Vol. 149, no. 3. P. 474–493. doi: 10.1007/s10957-011-9807-5 .
17. **Dmitruk A.V., Samylovskiy I.A.** On the relation between two approaches to necessary optimality conditions in problems with state constraints // JOTA. 2017. Vol. 173, no. 2. P. 391–420.
doi: 10.1007/s10957-017-1089-0.
18. **Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.** Трансляции уравнений Эйлера // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 6. С. 1263–1284.
19. **Dmitruk A.V.** On the development of Pontryagin's Maximum principle in the works of A.Ya. Dubovitskii and A.A. Milyutin // Control and Cybernetics. 2009. Vol. 38, no. 4a. P. 923–958.
20. **Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.** О доказательстве принципа максимума Понтрягина с помощью игольчатых вариаций // Фундам. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 5. С. 49–74.
21. **Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P.** Necessary conditions for a weak minimum in optimal control problems with integral equations subject to state and mixed constraints // SIAM J. Control Optim. 2014. Vol. 52, no. 6. P. 3437–3462. doi: 10.1137/130921465.

Дмитрук Андрей Венедиктович
Поступила 26.07.2017

д-р физ.-мат. наук, вед. научный сотрудник ЦЭМИ РАН,
проф. МГУ им. М.В. Ломоносова, каф. оптимального управления, г. Москва
e-mail: dmitruk@member.ams.org

Осмоловский Николай Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный строительный университет, каф. прикладной математики, г. Москва;
Университет технических и гуманитарных наук, г. Радом, Польша
e-mail: osmolovski@uph.edu.pl

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, N Y, London: Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN 2-88124-077-1. Original Russian text (2nd ed.) published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Nauka Publ., 1969, 393 p.
2. Dubovitskii A.Ya., Milyutin A.A. Extremum problems in the presence of restrictions, *USSR Comput. Math. and Math. Phys.,* 1965, vol. 5, no. 3, pp. 1–80. doi: 10.1016/0041-5553(65)90148-5.
3. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis. Vol. 1,2.* N Y, Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830. Original Russian text (4th ed.) published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*, Moscow, Nauka Publ., 1976, 543 p.
4. Milyutin A.A., Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii.* [The Maximum Principle in Optimal Control]. Moscow, Mosk. Gos. Univ. Publ., 2004, 168 p.
5. Galeev E.M., Zelikin M.I., Konyagin S.V. et. al. *Optimal'noe upravlenie.* [Optimal Control], eds. N.P. Osmolovskii, V.M. Tikhomirov. Moscow, MTsNMO Publ., 2008, 320 p. ISBN: 978-5-94057-367-8.
6. Dubovitskii A.Ya., Milyutin A.A. *Teoriya printsipa maksimuma.* [Theory of the maximum principle]. In: *Metody teorii ekstremal'nykh zadach v ekonomike* [Methods of the theory of extremal problems in economics], eds. V.L. Levin, Moscow, Nauka Publ., 1981, pp. 6–47.
7. Girsanov I.V. *Lectures on mathematical theory of extremum problems.* Ser. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 67. Berlin, Heidelberg, N Y, Springer-Verlag, 1972, 136 p. doi: 10.1007/978-3-642-80684-1. Original Russian text published in Girsanov I.V. *Lekcii po teorii jekstremal'nyh zadach.* Moscow, MGU Publ., 1970, 122 p.
8. Milyutin A.A. *Printsip maksimuma v regulyarnoi zadache optimal'nogo upravleniya.* [The maximum principle in the regular problem of optimal control]. In: Afanas'ev A.P., Dikusar V.V., Milyutin A.A., Chukanov S.A. *A necessary condition in optimal control* [Neobkhodimoe uslovie v optimal'nom upravlenii], eds. Milyutin A.A., Moscow, Nauka Publ., 1990, 320 p. ISBN: 5-02-006708-3 .
9. Milyutin A.A. *Printsip maksimuma v obshchei zadache optimal'nogo upravleniya.* [The maximum principle in the general problem of optimal control]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 303 p. ISBN: 5-9221-0114-5.
10. Milyutin A.A. General schemes of necessary conditions for extrema and problems of optimal control. *Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, no. 5, pp. 109–115. doi: 10.1070/RM1970v025n05ABEH003799..
11. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Ser. Studies Math. Appl., vol. 6, Amsterdam, N Y, Oxford, North-Holland Publ. Comp., 1979, 460 p. ISBN: 0444851674. Original Russian text published in Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 481 p.
12. Arutyunov A.V. Pontryagin's maximum principle in optimal control theory. *J. Math. Sci*, 1999, vol. 94, no. 3, pp. 1311–1365.
13. Vinter R.B., Zheng H. Necessary conditions for optimal control problems with state constraints. *Trans. AMS.*, 1998, vol. 350, no. 3, pp. 1181–1204.
14. Bourdin L. Note on Pontryagin maximum principle with running state constraints and smooth dynamics − Proof based on the Ekeland variational principle [e-resource]. 26 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/1604.04051.pdf.
15. Bonnans J.F. Course on optimal control [site]. OROC Ensta, Paris-Tech, 2017. Available at: www.cmap.polytechnique.fr/~bonnans/notes/oc/oc.html.
16. Arutyunov A.V., Karamzin D.Y., Pereira F.L. The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: revisited. *JOTA*, 2011, vol. 149, no. 3, pp. 474–493. doi: 10.1007/s10957-011-9807-5.
17. Dmitruk A.V., Samylovskiy I.A. On the relation between two approaches to necessary optimality conditions in problems with state constraints. *JOTA*, 2017, vol. 173, no. 2, pp. 391–420. doi: 10.1007/s10957-017-1089-0.
18. Dubovitskii A.Ya., Milyutin A.A. Translation of Euler's equations. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1969, vol. 9, no. 6, pp. 37–64. doi: 10.1016/0041-5553(69)90125-6.
19. Dmitruk A.V. On the development of Pontryagin's maximum principle in the works of A.Ya. Dubovitskii and A.A. Milyutin. *Control and Cybernetics*, 2009, vol. 38, no. 4a, pp. 923–958.

20. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. On the proof of Pontryagin's maximum principle by means of needle variations. *J. Math. Sci.*, 2016, vol. 218, no. 5, pp. 581–598. doi: 10.1007/s10958-016-3044-2 .
21. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. Necessary conditions for a weak minimum in optimal control problems with integral equations subject to state and mixed constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 2014, vol. 52, no. 6, pp. 3437–3462. doi: 10.1137/130921465.

The paper was received by the Editorial Office on July 26, 2017.

Andrei Venediktovich Dmitruk, Dr. Phys.-Math. Sci., Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 117418 Russia; Dept. of Optimal Control, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: dmitruk@member.ams.org .

Nikolai Pavlovich Osmolovskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Dept. of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, 129337 Russia; of Informatics and Mathematics, University of Technology and Humanities in Radom, Poland, e-mail: osmolovski@uph.edu.pl .