

УДК 519.62

ОПТИМАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ В \mathbb{R}^2 В УСЛОВИЯХ НАБЛЮДЕНИЯ¹

В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов, А. А. Попов

Исследуется задача формирования траектории в заданном “коридоре” из \mathbb{R}^2 , минимум расстояния которой от наблюдателей максимален. Каждый наблюдатель расположен вне коридора и имеет открытый выпуклый конус наблюдения, который перекрывает коридор. Положение наблюдателей и конусов фиксировано. Расстояние до движущегося по траектории объекта наблюдатель измеряет, когда объект находится внутри его конуса. В статье дано описание “оптимального коридора” — множества всех оптимальных траекторий с заданными начальной и конечной точками. Аналогичная задача решена в случае, когда движущийся объект — телесный — является замкнутым кругом. Для практических расчетов в работе предлагаются алгоритмы построения оптимального коридора и кратчайшей оптимальной траектории в дискретной постановке для телесного объекта. Исходные непрерывные условия задачи, такие как границы коридора и конусы наблюдения, проектируются на дискретную регулярную сетку, и на ней строится дискретная реализация оптимального коридора, его границы в виде 8-связных последовательностей узлов сетки, а также с помощью алгоритма Дейкстры находится кратчайшая оптимальная траектория телесного объекта.

Ключевые слова: движущийся объект, наблюдатель, оптимальная траектория, кратчайший путь

V. I. Berdyshev, V. B. Kostousov, A. A. Popov. Optimal trajectory in \mathbb{R}^2 under observation.

We study the problem of forming a trajectory in a given “corridor” from \mathbb{R}^2 such that the minimum distance from this trajectory to observers is maximal. Each observer is located outside the corridor and has an open convex observation cone overlapping the corridor. The positions of the observers and the cones are fixed. An observer can measure the distance to an object moving along the trajectory when the object is inside its cone. We describe an “optimal corridor,” i.e., the set of all optimal trajectories with given initial and terminal points. A similar problem is solved in the case when the moving object is a solid body, more exactly, a disk. For practical calculations, we propose algorithms that construct an optimal corridor and a shortest optimal trajectory for a solid object in a discrete statement. The initial continuous conditions of the problem, such as the boundaries of the corridor and the observation cones, are projected onto a discrete regular grid, and a discrete realization of the optimal corridor and its boundaries are constructed on the grid in the form of 8-connected sequences of grid nodes. The shortest optimal trajectory of the solid object is found using Dijkstra’s algorithm.

Keywords: moving object, observer, optimal trajectory, shortest path.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-40-52

Введение

В прикладных задачах, связанных с построением траекторий движения автономных движущихся объектов, иногда возникают требования максимальной удаленности траектории от нежелательных неподвижных объектов-наблюдателей. Нередко такие объекты имеют средство наблюдения, позволяющее фиксировать движущиеся объекты в некотором конусе наблюдения, а за пределами этого конуса наблюдатель объекта не видит.

Подобные ситуации приводят к постановкам задач построения оптимальных траекторий (см. [1; 2]). В продолжение этих исследований в данной работе рассматривается задача формирования траектории, максимизирующей минимум расстояния от наблюдателей в их поле зрения. Для точечного объекта строится оптимальный коридор Y^* — такое связное множество, что любая непрерывная траектория, проходящая в этом коридоре и соединяющая заданные

¹Результаты первого раздела установлены В. И. Бердышевым за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702). Остальные результаты получены В. Б. Костоусовым и А. А. Поповым при финансовой поддержке комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект 18-1-1-14).

начальную и конечную точки, является оптимальной. Аналогичная задача решается и для случая, когда движущийся объект — телесный, а именно представляет собой круг.

Для практических расчетов в работе предлагаются алгоритмы построения оптимального коридора и кратчайшей оптимальной траектории в дискретной постановке для телесного объекта. Исходные непрерывные условия задачи, такие как границы ограничивающего коридора и конусов наблюдения, проектируются на дискретную регулярную сетку, и на ней строятся дискретная реализация оптимального коридора, его границ, а также находится с помощью алгоритма Дейкстры кратчайшая оптимальная траектория телесного объекта.

Пусть Y — замкнутая окрестность (коридор) некоторой траектории \mathcal{T} , соединяющей фиксированные точки $t_* \neq t^*$. При этом граница ∂Y коридора гомеоморфна окружности.

Совокупность таких траекторий, принадлежащих Y , обозначим через \mathbb{T} . Пусть задан набор $\mathbb{S} = \{S\}$ наблюдателей $S \notin Y$, каждый из которых имеет фиксированный выпуклый открытый конус наблюдения $K(S)$ с вершиной S такой, что $K(S) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ для любой траектории $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Далее обозначим $K_Y(S) = K(S) \cap Y$ и используем уклонение

$$d(S, x) = \begin{cases} \|x - S\| & \text{при } x \in K(S), \\ +\infty & \text{при } x \notin K(S). \end{cases}$$

Рассматривается задача поиска величины

$$M = M(\mathbb{S}) = \sup_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \min\{d(S, t) : t \in \mathcal{T}, S \in \mathbb{S}\} \quad (1)$$

и траекторий, реализующих указанную верхнюю грань.

В данной работе представлено описание множества всех оптимальных траекторий движения точечного (разд. 1) и телесного (разд. 2) объектов, приведен алгоритм поиска левой и правой границ этого множества, а также кратчайшей оптимальной траектории (разд. 3).

1. Траектория точечного объекта

Обозначим через $\partial_l Y$, $\partial_r Y$ левую и правую границы коридора Y по отношению к движущейся точке от t_* к t^* по кратчайшей траектории из \mathbb{T} . Для однозначности разбиения границы коридора Y на правую и левую части и без ограничения общности можно считать, что точки t_* и t^* принадлежат границе ∂Y . Будем говорить, что наблюдатель S находится слева (справа) от коридора Y , если уклонение S от $\partial_l Y$ (от $\partial_r Y$) меньше, чем уклонение от $\partial_r Y$ (от $\partial_l Y$). В общем случае множество наблюдателей \mathbb{S} является объединением множеств $\mathbb{S}^* = \{S^i\}_1^{n^*}$, $\mathbb{S}_* = \{S_j\}_1^{n_*}$ наблюдателей, расположенных соответственно слева и справа от коридора Y . В дальнейшем потребуются следующие обозначения:

$$m(S^i) = \min\{d(S^i, x) : x \in \partial_r Y\} \quad \text{и} \quad m(S_j) = \min\{d(S_j, x) : x \in \partial_l Y\},$$

$k(S)$ — множество точек из ∂Y , доставляющих указанный минимум. Пусть $m > 0$,

$$K(S, m) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in K(S) : \|S - x\| < m\}.$$

Это множество открыто. Для пары наблюдателей S_1, S_2 таких, что $\overline{K}_Y(S_1) \cap \overline{K}_Y(S_2) \neq \emptyset$, обозначим

$$m(S_1, S_2) = \inf\{m : \overline{K}(S_1, m) \cap \overline{K}(S_2, m) \neq \emptyset\} = \sup\{m : \overline{K}(S_1, m) \cap \overline{K}(S_2, m) = \emptyset\}, \quad (2)$$

где \overline{K} — замыкание множества K . Отметим, что

$$m(S_1, S_2) = \min_{x \in \overline{K}_Y(S_1) \cap \overline{K}_Y(S_2)} \max\{d(S_1, x), d(S_2, x)\}.$$

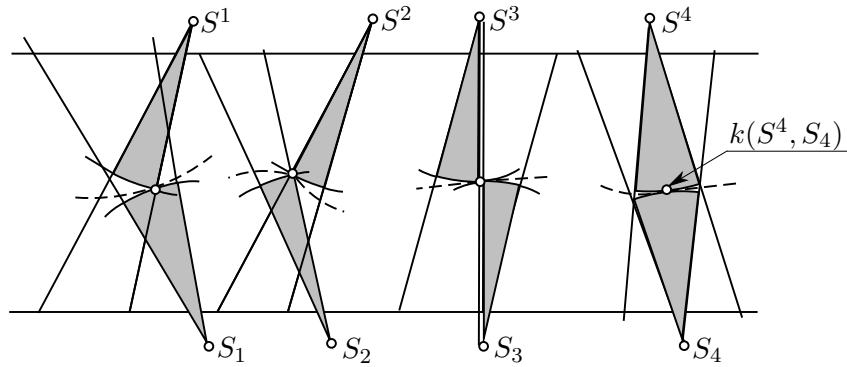


Рис. 1

Примем

$$k = k(S^i, S_j) = \overline{K}(S^i, m) \cap \overline{K}(S_j, m), \quad (3)$$

где $m = m(S^i, S_j)$ (см. (2)). Множество k является одноточечным. Возможные относительные положения усеченных конусов $K(S, m)$ показаны на рис. 1, на котором также отмечены точки $k(S^i, S_j)$ касания конусов и штриховыми линиями обозначены участки оптимальных траекторий, проходящих через эти точки (подробности см. ниже). Множество $k(S)$ может быть многоточечным.

В данном разделе вычисляется величина $M(S)$ и указывается множество всех оптимальных траекторий задачи (1). Докажем равенство

$$M(\mathbb{S}) = \min \{m(S), m(S^i, S_j) : S \in \mathbb{S}, S^i \in \mathbb{S}^*, S_j \in \mathbb{S}_*, \overline{K}_Y(S^i) \cap \overline{K}_Y(S_j) \neq \emptyset\}. \quad (4)$$

Для $S \in \mathbb{S}$ определим левую $\partial_l K(S)$ и правую $\partial_r K(S)$ границы множества $K_Y(S)$ следующим образом: для любой $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ точка, движущаяся от t_* к t^* , сперва пересекает левую границу и при выходе из $K_Y(S)$ — правую. Рассмотрим сначала случай двух “противоположных” наблюдателей S^1, S_1 . Равенство (4) имеет вид

$$M(\mathbb{S}) = \min \{m(S^1), m(S_1), m(S^1, S_1)\}. \quad (5)$$

Возможные расположения усеченных конусов $K(S, m)$ изображены на рис. 1.

Пусть минимум в (5) достигается на $m(S^1)$ или на $m(S_1)$. На рис. 2 показана ситуация, когда минимум достигается на $m(S_1)$.

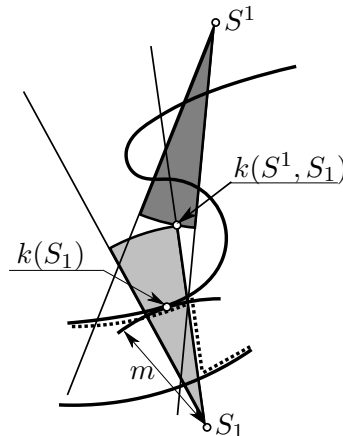


Рис. 2

Тогда оптимальные траектории будут проходить по точкам множества $K(S^1)$ правой границы $\partial_r Y$ или (как показано на рис. 2) по точкам множества $K(S_1)$ левой границы $\partial_l Y$, соответственно. При этом будет обеспечиваться максимум минимального уклонения траектории от наблюдателей S^1, S_1 . Значит, в рассматриваемом случае утверждение (5) справедливо.

Теперь рассмотрим случай, когда минимум (5) достигается на $m(S^1, S_1)$. Ясно, что

$$K(S^1, m) \cap K(S_1, m) = \emptyset,$$

где $m = m(S^1, S_1)$. При этом $k \in Y$, поскольку иначе минимум в (5) достигался бы на $m(S^1)$ или на $m(S_1)$. Следовательно (см. рис. 1), любая оптимальная траектория \mathcal{T} содержит точку k , пересекает конусы $K(S^1), K(S_1)$, но не пересекается с $K(S^1, m), K(S_1, m)$ и, значит,

$$\|S^1 - k\| = \|S_1 - k\| = m(S^1, S_1).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае равенство (4) справедливо.

Рассмотрим случай, когда $\mathbb{S}^* = \{S^1\}$ — одноточечное множество,

$$\mathbb{S}_* = \{S_j\}_1^{n_*}, \quad n_* > 1, \quad \mathbb{S} = \mathbb{S}^* \cup \mathbb{S}_*, \quad K_Y(S^1) \cap K_Y(S_j) \neq \emptyset \quad (j = 1, \dots, n_*). \quad (6)$$

Пусть

$$m = \min\{m(S^1, S_j), m(S^1), m(S_j), j = 1, \dots, n_*\}, \quad K = K(S^1, m). \quad (7)$$

Рассмотрим “крайнюю левую” траекторию \mathcal{T}^* , соединяющую точки t_*, t^* , проходящую по той части границы множества Y^* , которая содержит кривую $(\partial K) \cap Y$. Эта траектория составлена из частей

$$(\partial K) \cap Y, \quad (\partial Y_i) \setminus K$$

и является оптимальной. В самом деле, в случае достижения минимума в (7) на некотором $m(S^1, S_{j^*})$ для указанного m имеем (см. рис. 3)

$$d(S^1, \mathcal{T}^*) = m,$$

$$K(S^1, m) \subset K(S^1, m(S^1, S_j)),$$

$$K(S^1, m(S^1, S_j)) \cap K(S_j, m(S^1, S_j)) = \emptyset,$$

следовательно, $d(S_j, \mathcal{T}) \geq m$ ($j = 1, \dots, n_*$), а для номера $j^* \in \{1, \dots, n_*\}$, реализующего минимум (7), будет

$$d(S_{j^*}, \mathcal{T}^*) = m = M(\mathbb{S}).$$

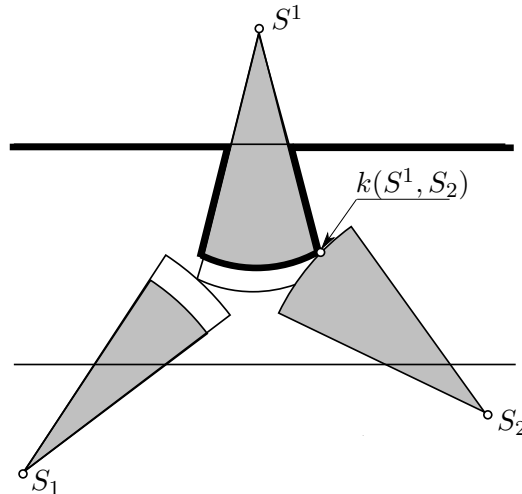


Рис. 3

Пусть минимум в (7) достигается на $m(S^1)$ или на некотором $m(S_j)$. Тогда траектория \mathcal{T}^* будет проходить по точкам множества $K(S^1)$ правой границы $\partial_r Y$ или по точкам множества $K(S_j)$ левой границы $\partial_l Y$ соответственно. При этом будет обеспечиваться максимум минимального уклонения траектории от наблюдателей S^1, S_j . Уклонение траектории \mathcal{T}^* от других наблюдателей будет не меньше, чем m . Итак, в случае (6) построена оптимальная траектория и установлено равенство (4).

Рассмотрим общий случай

$$\mathbb{S}^* = \{S^i, i = 1, \dots, n^*\}, \quad \mathbb{S}_* = \{S_j: j = 1, \dots, n_*\}, \quad n^* \geq 1, \quad n_* \geq 1, \quad \mathbb{S} = \mathbb{S}^* \cup \mathbb{S}_*.$$

Пусть $Z \in \mathbb{S}^*$ — максимальная по включению последовательность наблюдателей S^i такая, что при

$$m = \min \{m(S^i, S_j), m(S^i), m(S_j), K_Y(S^i) \cap K_Y(S_j) \neq \emptyset: i = 1, \dots, n^*, j = 1, \dots, n_*\}$$

множество

$$\mathcal{K}_Z = \bigcup_{S \in Z} K(S, m) \quad (8)$$

является связным. Построим траекторию \mathcal{T}^* следующим образом. Включим в \mathcal{T}^* для выделенного множества Z связный участок \mathcal{T}_Z границы $(\partial \mathcal{K}_Z) \cap Y$, который пересекается с объединением дуг (рис. 4)

$$\{x \in K(S): \|x - S\| = m\}, \quad S \in Z.$$

В окрестности концевых точек построенного участка траекторию продолжим по границе $\partial_l Y$. Для каждого наблюдателя $S^i \in Z$ и для каждого номера $j = j(i)$ такого, что $K_Y(S^i) \cap K_Y(S_j) \neq \emptyset$, будем иметь

$$\begin{aligned} K(S^i, m) &\subset K(S^i, m(S^i, S_j)), \\ K(S^i, m(S^i, S_j)) \cap K(S_j, m(S^i, S_j)) &= \emptyset, \end{aligned}$$

и справедливо неравенство (см. результат в случае (6))

$$d(S_j, \mathcal{T}) \geq \min\{m(S^i, S_j), m(S^i), m(S_j)\}.$$

Неравенство $d(S^i, \mathcal{T}_Z) \geq m$ очевидно. В целом оптимальная траектория $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ составлена из частей \mathcal{T}_Z , $Z \subset \mathbb{S}^*$, построенных указанным способом по максимальным связным множествам (8). Части \mathcal{T}_Z попарно не пересекаются, их концевые точки лежат на $\partial_l Y$ и соединяются фрагментами границы $\partial_l Y$.

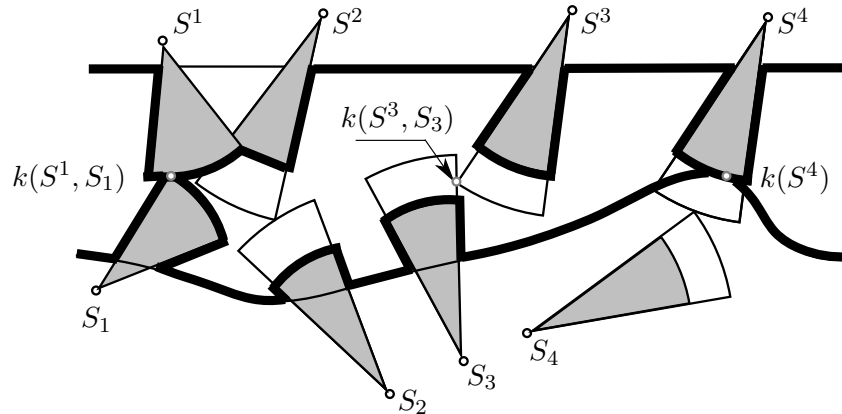


Рис. 4

Аналогично строится оптимальная траектория $\mathcal{T} = \mathcal{T}_*$ по максимальным наборам $Z \subset \mathbb{S}_*$, для каждого из которых множество $\bigcup_Z K(S, m)$ является связным. Любая траектория, расположенная одновременно правее \mathcal{T}^* и левее \mathcal{T}_* , является оптимальной, и все они проходят через точки $k(S)$, $k(S^i, S_j)$ для тех наблюдателей S и пар наблюдателей $\{S^i, S_j\}$, которые реализуют минимум (4).

Доказана

Теорема 1. *Справедливо равенство (4). Траектория $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ является оптимальной тогда и только тогда, когда она расположена между \mathcal{T}_* и \mathcal{T}^* .*

2. Траектория телесного объекта

В предыдущем разделе рассмотрен случай, когда объект представляет собой точку. Здесь рассматривается случай, когда объект является телесным и имеет вид круга радиуса h .

Центр объекта движется внутри коридора — замкнутого множества Y_h :

$$Y_h = Y \setminus \bigcup_{x \in \partial Y} V_h(x),$$

где $V_h(x)$ — открытый шар радиуса h с центром в x .

Рассмотрим подмножество \mathbb{T}_h непрерывных траекторий $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, которые принадлежат коридору Y_h и соединяют точки t_* и t^* :

$$\mathcal{T} = \{t(\tau) : 0 \leq \tau \leq 1, t(0) = t_*, t(1) = t^*\} \subset Y_h.$$

Для простоты аналогично предыдущему рассмотрению считаем, что точки t_* и t^* лежат на границе ∂Y_h . В этом случае граница ∂Y_h разбивается точками t_* и t^* на две части, $\partial_l Y_h$, $\partial_r Y_h$, — левую и правую границы коридора Y_h по отношению к движущейся точке от t_* к t^* по кратчайшей траектории из \mathbb{T}_h .

Вместо уклонения $d(S, x)$ рассмотрим уклонение $d_h(S, x)$:

$$d_h(S, x) = \inf\{d(S, t) : t \in V_h(x)\}.$$

Далее для произвольного подмножества A из \mathbb{R}^2 будем обозначать через A^h его h -окрестность:

$$A^h = \bigcup_{x \in A} V_h(x).$$

Введем в рассмотрение h -окрестность $K^h(S)$ конуса наблюдения $K(S)$.

Задача (1) для телесного объекта формулируется следующим образом. Требуется найти траектории телесного объекта с максимально возможным уклонением от наблюдателей, т. е. траектории, реализующие верхнюю грань:

$$M^h = M^h(\mathbb{S}) = \sup_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}_h} \min\{d_h(S, t) : t \in \mathcal{T}, S \in \mathbb{S}\}. \quad (9)$$

Используем введенные выше обозначения $\mathbb{S}^* = \{S^i\}_1^{n^*}$ и $\mathbb{S}_* = \{S_j\}_1^{n^*}$ для множеств наблюдателей, расположенных соответственно слева и справа от коридора Y_h .

Рассмотрим величину $m^h(S)$ минимального отклонения наблюдателя S от границы:

$$m^h(S) = \begin{cases} \min\{d_h(S, x) : x \in \partial_r Y_h\}, & S \in \mathbb{S}^*, \\ \min\{d_h(S, x) : x \in \partial_l Y_h\}, & S \in \mathbb{S}_*. \end{cases}$$

Пусть $k^h(S)$ — множество точек из ∂Y_h , доставляющих указанный минимум.

Для $m > 0$ рассмотрим открытое множество $K^h(S, m)$, которое будем называть m -усечением $K^h(S)$:

$$K^h(S, m) = \{x: d_h(S, x) < m\}.$$

Для пары наблюдателей S_1, S_2 таких, что $\overline{K^h(S_1)} \cap \overline{K^h(S_2)} \neq \emptyset$, обозначим минимальную величину m , для которой пересечение m -усечений конусов наблюдения не пусто:

$$\begin{aligned} m^h(S_1, S_2) &= \inf \{m: \overline{K^h(S_1, m)} \cap \overline{K^h(S_2, m)} \neq \emptyset\} \\ &= \sup \{m: \overline{K^h(S_1, m)} \cap \overline{K^h(S_2, m)} = \emptyset\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим через $k^h = k^h(S^i, S_j)$ общую точку замыканий m -усечений конусов наблюдения:

$$k^h = k^h(S^i, S_j) = \overline{K^h(S^i, m^h(S^i, S_j))} \cap \overline{K^h(S_j, m^h(S^i, S_j))}. \quad (11)$$

Множество $k^h(S^i, S_j)$ является одноточечным, поскольку образуется в результате касания строго выпуклых участков границ множеств $\overline{K^h(S^i, m^h(S^i, S_j))}$ и $\overline{K^h(S_j, m^h(S^i, S_j))}$, тогда как множество $k^h(S)$ может быть многоточечным.

Обозначим через Y_h^* связную компоненту множества $Y_h \setminus \bigcup_{S \in \mathbb{S}^*} K^h(S, M^h)$, которая содержит точки t_* и t^* . Аналогично Y_{h*} обозначает связную компоненту множества $Y_h \setminus \bigcup_{S \in \mathbb{S}_*} K^h(S, M^h)$, содержащую те же точки t_* и t^* . В теореме 2 описывается оптимальный коридор — множество Y_{opt}^h , обладающее свойством: любая траектория из \mathbb{T}_h , лежащая в этом коридоре, является оптимальной в смысле задачи (9).

Теорема 2. Для верхней грани уклонения (9) справедливо равенство

$$M^h = \min \left\{ m^h(S), m^h(S^i, S_j) : S \in \mathbb{S}, S^i \in \mathbb{S}^*, S_j \in \mathbb{S}_*, \overline{K_Y^h(S^i)} \cap \overline{K_Y^h(S_j)} \neq \emptyset \right\}. \quad (12)$$

Любая траектория из \mathbb{T}_h , лежащая в множестве

$$Y_{opt}^h = Y_h \setminus \bigcup_{S \in \mathbb{S}} K^h(S, M^h),$$

является оптимальной.

Левая \mathcal{T}^{h*} и правая \mathcal{T}_*^h границы множества Y_{opt}^h являются оптимальными траекториями и определяются равенствами

$$\mathcal{T}^{h*} = \partial(Y_h^*) \setminus \partial_r Y_h, \quad \mathcal{T}_*^h = \partial(Y_{h*}) \setminus \partial_l Y_h.$$

Любая оптимальная траектория проходит через точки $k^h(S)$, $k^h(S^i, S_j)$ для тех наблюдателей S и пар наблюдателей $\{S^i, S_j\}$, для которых реализуется минимум (12).

Доказательство теоремы следует из того факта, что задача (9) оптимального прохождения телесного объекта радиуса h по коридору Y в условиях наблюдения посредством конусов $K_Y(S), S \in \mathbb{S}$ эквивалентна задаче (1) прохождения точечного объекта по h -суженному коридору Y_h в условиях наблюдения посредством h -расширенных конусов $K_Y^h(S)$. Рассуждения доказательства теоремы 1 справедливы в данном случае, если вместо коридора Y рассмотреть его сужение Y_h , класс траекторий \mathbb{T} заменить на его подкласс \mathbb{T}_h , вместо уклонения $d(S, x)$ точки x от наблюдателя S в конусе наблюдения $K(S)$ использовать уклонение $d_h(S, x)$ от наблюдателя в h -окрестности $K^h(S)$. При этом оптимальное уклонение M заменяется на M^h , множество точек касания $k(S)$ границ коридора переходит в множество $k^h(S)$, усеченные конусы $K(S, m)$ заменяются на m -усечения $K^h(S, m)$, точки касания $k(S^i, S_j)$ усеченных конусов заменяются на точки $k^h(S^i, S_j)$. \square

3. Дискретная реализация оптимального коридора и кратчайший путь

В теоремах 1,2 описана структура оптимального коридора путем определения левой и правой граничных оптимальных траекторий в непрерывном случае. В данном разделе для дискретного случая представлен алгоритм построения оптимального коридора и граничных траекторий. Также приведен алгоритм построения кратчайшей оптимальной траектории.

Обозначим через $C = C_x \times C_y$ регулярную прямоугольную сетку точек $\{t_k = (x_k, y_k)\}$ с шагом $\delta > 0$, $\delta \ll h$, покрывающую коридор Y . Траектории, которые формируются алгоритмами данного раздела, будут представлять собой ломаные линии с вершинами, лежащими в узлах этой сетки. Оптимальный коридор будет представлен 8-связным (см. ниже) подмножеством узлов сетки C , принадлежащим дополнению описываемой ниже “запретной” области \widehat{C} .

Понятия 8-связного и 4-связного множеств были введены (см. [3]) в компьютерной графике для алгоритмов, формирующих дискретные (растровые) компьютерные изображения. Связное множество на двумерной прямоугольной регулярной сетке с шагом δ — это множество, для любой пары элементов которого (a и b) существует последовательность $P = (p_0 = a, \dots, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n = b)$ элементов множества такая, что для любых двух соседних элементов этой последовательности p_i, p_{i+1} выполняются условия для 8-связного множества

$$|x(p_i) - x(p_{i+1})| \leq \delta \quad \text{и} \quad |y(p_i) - y(p_{i+1})| \leq \delta,$$

а также для 4-связного множества

$$|x(p_i) - x(p_{i+1})| + |y(p_i) - y(p_{i+1})| \leq \delta.$$

Таким образом, 4-связная окрестность точки состоит из четырех соседей: слева, справа, сверху и снизу, а в 8-связную окрестность к этим соседям добавляются 4 диагональных узла.

Пусть граница ∂Y задана в виде Γ — простой ломаной линии без самопересечений, $\{p_i(\Gamma) = (x_i(\Gamma), y_i(\Gamma)) : i = 0, \dots, N_\Gamma - 1\}$ — последовательность концевых точек отрезков этой линии.

Тогда размеры N_x, N_y сетки $C = C_x \times C_y$ вычисляются следующим образом ($\lceil z \rceil$ — минимальное целое, не меньшее, чем z):

$$N_x = 1 + \left\lceil \frac{\max\{x_i(\Gamma)\} - \min\{x_i(\Gamma)\}}{\delta} \right\rceil, \quad N_y = 1 + \left\lceil \frac{\max\{y_i(\Gamma)\} - \min\{y_i(\Gamma)\}}{\delta} \right\rceil.$$

Множества C_x и C_y , образующие сетку C , определяются равенствами

$$C_x = \{x_k : x_k = k\delta + \min\{x_i(\Gamma)\}, k = 0, \dots, N_x - 1\},$$

$$C_y = \{y_k : y_k = k\delta + \min\{y_i(\Gamma)\}, k = 0, \dots, N_y - 1\}.$$

Далее построим множество \widehat{C} “запретных” узлов.

Для того чтобы дискретная реализация оптимальной траектории не пересекала запретные области в случае касания, используем параметр $\varepsilon \in (\delta; 2\delta)$, который позволит уменьшить запретные области для обеспечения зазора и прохождения дискретной траектории между ними.

Обозначим через $L_i(\Gamma)$ i -й отрезок граничной ломаной линии Γ :

$$L_i(\Gamma) = \begin{cases} \{t : t = p_{N_\Gamma-1}(\Gamma)k + p_0(\Gamma) \cdot (1-k), k \in [0; 1]\}, & \text{если } i = 0, \\ \{t : t = p_{i-1}(\Gamma)k + p_i(\Gamma) \cdot (1-k), k \in [0; 1]\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $r(t, X)$ — минимальное евклидово расстояние от точки $t \in \mathbb{R}^2$ до точек множества $X \subset \mathbb{R}^2$: $r(t, X) = \inf_{x \in X} |t - x|$.

Обозначим через $\widehat{C}(L_i(\Gamma))$ множество узлов сетки, лежащих в окрестности радиуса $h - \varepsilon$ отрезка ломаной $L_i(\Gamma)$:

$$\widehat{C}(L_i(\Gamma)) = \{t : t \in C_x \times C_y, r(t, L_i(\Gamma)) < h - \varepsilon\}, \quad (13)$$

где величина ε введена выше.

Обозначим через $\widehat{C}(S)$ множество узлов сетки, лежащих в окрестности радиуса $h - \varepsilon$ границы множества $K(S, M^h)$:

$$\widehat{C}(S) = \{t: t \in C_x \times C_y, r(t, \partial K(S, M^h)) < h - \varepsilon\}. \quad (14)$$

Множество “запретных” узлов определим как объединение введенных выше множеств:

$$\widehat{C} = \bigcup_i \widehat{C}(L_i(\Gamma)) \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \widehat{C}(S).$$

Без ограничения общности можно считать, что множество \widehat{C} является 4-связным. Иначе, можно расширить множество \widehat{C} до 4-х связного путем дополнения 8-связных окрестностей 4-связными точками. Таким образом, любая точка множества \widehat{C} будет иметь в своей 4-связной окрестности соседа из этого же множества.

Следующий ниже алгоритм построения оптимального коридора, используя известный в компьютерной графике метод “заливки” дискретной области (см., например, [3]), рекурсивно заполняет 8-связное подмножество множества $C \setminus \widehat{C}$, начиная с узла t_* .

Алгоритм 1 построения оптимального коридора

- | | |
|---|--|
| 1 | Поместить в стек элемент t_* |
| 2 | Выполнять, пока стек не будет пуст: |
| 3 | Взять элемент из стека |
| 4 | Пометить элемент как принадлежащий оптимальному коридору |
| 5 | Для каждого элемента из 8-связной окрестности текущего элемента: |
| 6 | Если элемент не помечен и не является запретным: |
| 7 | Поместить элемент в стек |

Введем необходимые для описания алгоритма 2 обозначения:

$\vec{R}_8(p_c, p)$ ($\overleftarrow{R}_8(p_c, p)$) — функция 8-связного обхода точки p на один шаг по часовой (против часовой) стрелке вокруг p_c в окрестности точки p_c (см. рис. 5);

$\vec{R}_4(p_c, p)$ ($\overleftarrow{R}_4(p_c, p)$) — функция 4-связного обхода точки p на один шаг по часовой (против часовой) стрелке вокруг p_c в окрестности точки p_c (см. рис. 6).

Ниже в описании алгоритма символы R_8, R_4, AR_4 обозначают в случае построения левой границы: $R_8 = \overleftarrow{R}_8, R_4 = \overleftarrow{R}_4, AR_4 = \vec{R}_4$; в случае построения правой границы: $R_8 = \vec{R}_8, R_4 = \vec{R}_4, AR_4 = \overleftarrow{R}_4$.

Пусть (a_t, b_t) , где $a_t \in C \setminus \widehat{C}, b_t \in \widehat{C}$, — пара соседних граничных узлов сетки C , с помощью которых алгоритм 2 будет строить границы оптимального коридора.

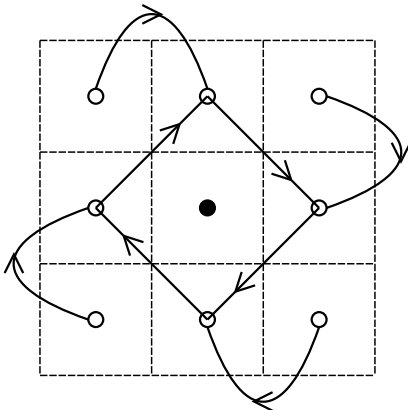


Рис. 5. Функция обхода \vec{R}_8 .

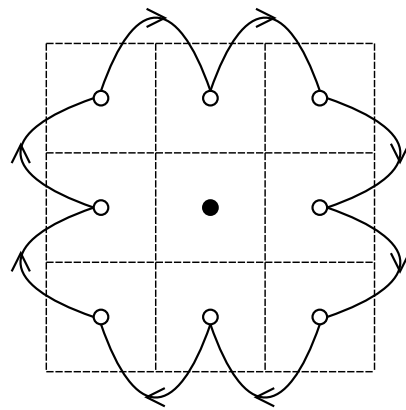


Рис. 6. Функция обхода \vec{R}_4 .

Определим два множества: $N_* \subset \widehat{C}$ и $N^* \subset \widehat{C}$ — 4-связные подмножества 8-связных окрестностей не совпадающих точек t_* и t^* . Подмножество N_* будет определять допустимые начальные положения точек b_t в паре (a_t, b_t) при $a_t = t_*$. Подмножество N^* будет определять допустимые конечные положения точки b_t в паре (a_t, b_t) при $a_t = t^*$.

В нижеследующем описании присваивание значения B переменной A обозначим выражением $A := B$.

Алгоритм 2 построения границ оптимального коридора

1	Инициализация формирующей пары (a_t, b_t) : $a_t := t_*$, $b_t :=$ любой элемент из N_*
2	Инициализация выходной последовательности $Result := \{a_t\}$
3	Внешний Цикл (движение точки b_t в запретной области):
4	Внутренний Цикл (движение точки a_t в допустимой области):
5	$next_a_t := R_8(b_t, a_t)$
6	Если $next_a_t \in \widehat{C}$ ИЛИ $next_a_t \notin C$, то: $next_a_t := R_4(b_t, a_t)$
7	Если $next_a_t \in \widehat{C}$ ИЛИ $next_a_t \notin C$, то:
8	Выйти из Внутреннего Цикла
9	$a_t := next_a_t$
10	В конец последовательности $Result$ добавить элемент a_t
11	Если $a_t = t^*$ И $b_t \in N^*$, то:
12	Цель достигнута — Завершить Алгоритм
13	Если $a_t = t_*$ И $b_t \in N_*$, то:
14	Цель не достигнута — Завершить Алгоритм с Ошибкой
15	Конец Внутреннего Цикла
16	$next_b_t := AR_4(a_t, b_t)$
17	Если $next_b_t \in \widehat{C}$ ИЛИ $next_b_t \notin C$, то: $b_t := next_b_t$
18	Конец Внешнего Цикла

Точка $p \in C \setminus \widehat{C}$ является граничной, если ее 8-окрестность содержит точку множества \widehat{C} .

Множества N_* и N^* предназначены для обеспечения окончания прослеживания контура при построении границы алгоритмом 2. Здесь наряду с проверкой на совпадение текущей точки формируемого контура с конечной точкой t^* (в случае успеха) или начальной точкой t_* (в случае ошибки) производится дополнительная проверка $b_t \in N^*$ или $b_t \in N_*$ соответственно. Это связано с необходимостью различать направления прохода алгоритма через точки t_* и t^* .

Алгоритм 2 работает следующим образом.

В качестве начального значения для точки a_t берется точка t_* , которая должна принадлежать в допустимой области. В качестве начального значения для точки b_t берется произвольный узел — один из соседних к точке t_* узлов, находящихся в запретной области. Множество N_* состоит из всех узлов, находящихся в запретной области, являющихся соседними точке t_* и 4-связных по отношению к выбранному начальному значению b_t . Для одного выбранного начального значения b_t существует только одно множество N_* , но для разных начальных значений b_t могут быть различные множества N_* . Например, в случае расположения точки t_* в узком одноузловом коридоре множество N_* может лежать на одной из сторон коридора.

Работа алгоритма заключается в попеременном движении точек a_t и b_t . В случае построения правой границы точка a_t поворачивается по часовой стрелке, точка b_t — против часовой стрелки. В случае построения левой границы, наоборот, точка a_t поворачивается против часовой стрелки, точка b_t — по часовой стрелке. Далее рассмотрим вариант работы алгоритма для построения правой границы.

Точка a_t перемещается путем многократного поворота по часовой стрелке вокруг точки b_t в 8-связной окрестности точки b_t . Каждый шаг поворота точки a_t является 8-связным и осуществляется путем применения функций \vec{R}_8 или \vec{R}_4 (см. рис. 5 и 6). Изменение точки a_t прекращается, если при любом следующем повороте (\vec{R}_8 или \vec{R}_4) точка попадает в запрет-

ную область. При этом выход за границы сетки C считается также запретным. Каждое новое значение точки a_t добавляется в выходную последовательность.

Точка b_t перемещается путем однократного поворота против часовой стрелки вокруг точки a_t в 8-связной окрестности точки a_t . Шаг поворота точки b_t является 4-связным и осуществляется применением функции \overleftarrow{R}_4 (см. рис. 6). Точка b_t остается неизменной, если при повороте она пытается выйти из запретной области в область $C \setminus \widehat{C}$.

При достижении точкой a_t точки t^* , а точкой b_t множества N^* — алгоритм успешно прекращает работу. Результат работы алгоритма — выходная 8-связная последовательность граничных узлов с началом и концом в точках t_* и t^* . Выбор множества N^* аналогичен выбору множества N_* . Множество N^* состоит из всех узлов в 8-связной окрестности точки t^* , находящихся в запретной области и 4-связных по отношению к одному из этих узлов. Для корректной работы алгоритма необходимо, чтобы точка t^* была граничной, т. е. принадлежала допустимой области и множество N^* не было пусто.

При достижении точкой a_t точки t_* , а точкой b_t множества N_* — алгоритм прекращает работу с ошибкой. Данный случай означает, что точки t_* и t^* не принадлежат одному 8-связному множеству, а выходная последовательность будет представлять собой замкнутую 8-связную последовательность граничных узлов, которая не содержит в себе точки t^* .

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть запретное множество \widehat{C} является 4-связным. Если не совпадающие граничные точки t_* и t^* принадлежат 8-связной компоненте множества $C \setminus \widehat{C}$, то алгоритм 2 выдает левую или правую границу оптимального коридора в виде 8-связной последовательности, соединяющей точки t_* и t^* и состоящей из граничных узлов множества $C \setminus \widehat{C}$. В противном случае алгоритм завершается с ошибкой.

На рис. 7 приведен пример построения оптимального коридора, левой и правой оптимальных границ. Левая граница обозначена точечной пунктирной линией, правая — штрих-пунктирной линией.

По теореме 2 задача (9) имеет не единственное решение, поэтому представляет интерес следующая задача. Пусть $t(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ — непрерывно дифференцируемая функция, параметрически описывающая траекторию \mathcal{T} . Требуется найти среди гладких траекторий \mathcal{T}^*

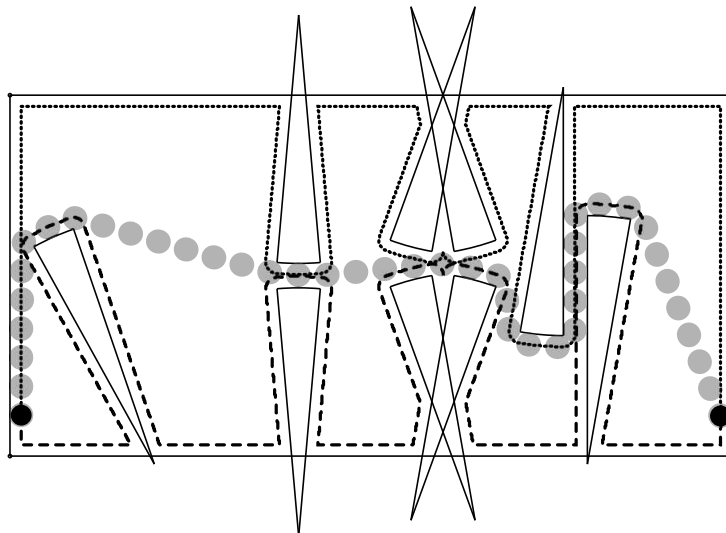


Рис. 7

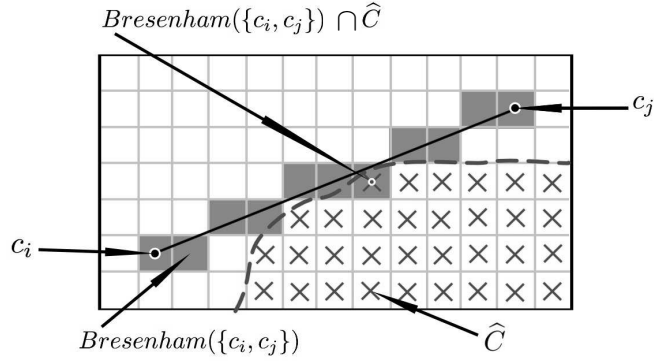


Рис. 8

решений задачи (9) траектории с минимальной длиной:

$$\min_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}^*} \int_0^1 \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)} d\tau, \quad (15)$$

где $x'(\tau), y'(\tau)$ — производные функций $x(\tau), y(\tau)$.

Класс траекторий \mathbb{T}^* , доставляющих минимум в (9), лежит внутри оптимального коридора Y_{opt}^h .

Для решения задачи (15) воспользуемся алгоритмом Дейкстры [4] построения кратчайшего пути в графе. Для этого следует определить неориентированный взвешенный граф (т.е. множества вершин и ребер) с неотрицательными весами, в котором данный алгоритм будет строить кратчайший путь.

В качестве множества вершин примем объединение множества узлов описанной выше двумерной прямоугольной сетки и пары точек начального и конечного положения объекта:

$$V = (C_x \times C_y) \cup \{t_*, t^*\}.$$

В качестве множества ребер U возьмем все пары вершин $\{v_i, v_j\}$ из множества V , удовлетворяющие условию: отрезок $\{v_i, v_j\}$ не должен пересекать “запретные” области, которые состоят из h -окрестностей границы Γ и множеств $K(S, M^h), S \in \mathbb{S}$. В качестве веса ребра возьмем его длину: $w = |v_i - v_j|$.

Для определения того факта, что отрезок ребра не пересекает “запретную” область, применяется алгоритм Брезенхэма [3] для растеризации отрезка (см. рис. 8).

Растеризация отрезка означает отображение непрерывного отрезка на дискретную прямоугольную равномерную сетку вершин на плоскости. Идея алгоритма Брезенхэма заключается в том, что отмечаются вершины, ближайшие к отрезку по той из координат, на ось которой проекция отрезка меньше.

Пусть $Bresenham(\{c_i, c_j\})$ — подмножество вершин на сетке $C_x \times C_y$, отмечаемых при растеризации отрезка $\{c_i, c_j\}$ алгоритмом Брезенхэма. На рис. 8 показано, как с помощью алгоритма Брезенхэма определяется факт пересечения ребра $\{c_i, c_j\}$ с множеством “запретных” вершин \hat{C} . Тогда множество ребер графа определим как

$$U = \{\{v_i, v_j, w\} : v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j, Bresenham(\{v_i, v_j\}) \cap \hat{C} = \emptyset, w = |v_i - v_j|\}.$$

Предложенный алгоритм решает задачу об оптимальном пути, и его асимптотическая сложность есть $O(|C|^2)$ [4]. На рис. 7 представлен пример построения предложенным алгоритмом оптимальной траектории в задаче (9) для случая большого количества наблюдателей. Оптимальная траектория на рисунке показана серыми кругами радиуса h .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Движущийся объект и наблюдатель // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 4. С. 411–413.
2. **Попов А.А., Костоусов В.Б., Бердышев В.И.** Траектория объекта, наиболее удаленная от наблюдателей // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1894: Proc. of the 48th Internat. Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications” (Yekaterinburg, Russia, February 5 – February 11, 2017). 2017. С. 129–136. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1894>.
3. **Rogers D.F.** Procedural elements for computer graphics. N Y: McGraw-Hill, 1985. 430 p. ISBN: 0-07-053534-5.
4. Introduction to algorithms: 3rd ed. / Т.Н. Cormen, С.Е. Leiserson, R.L. Rivest, С. Stein. Cambridge; London: The MIT Press, 2009. 1312 p. ISBN: 978-0-262-03384-8.

Бердышев Виталий Иванович

Поступила 29.12.2017

академик РАН

научный руководитель

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

e-mail: bvi@imm.uran.ru

Костоусов Виктор Борисович

канд. физ.-мат. наук

зав. отд.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

e-mail: vkost@imm.uran.ru

Попов Александр Андреевич

ведущий программист

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

e-mail: aap@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Berdyshev V.I. A moving object and observers. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 92, no. 2, pp. 643–645. doi: 10.1134/S1064562415050178.
2. Popov A.A., Kostousov V.B., Berdyshev V.I. The farthest from observers trajectory. *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 1894. Proc. of the 48th International Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, Yekaterinburg, Russia, February 5 – February 11, 2017, pp. 129–136. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-1894> (in Russian).
3. Rogers D.F. *Procedural elements for computer graphics*. N Y, McGraw-Hill. 1985, 433 p. ISBN: 0-07-053534-5.
4. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. *Introduction to algorithms. 3rd ed.*, Cambridge; London: The MIT Press, 2009, 1312 p. ISBN: 978-0-262-03384-8.

The paper was received by the Editorial Office on Dezember 29, 2017.

Vitalii Ivanovich Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: bvi@imm.uran.ru.

Viktor Borisovich Kostousov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: vkost@imm.uran.ru.

Aleksandr Andreevich Popov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: aap@imm.uran.ru.