ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ДИСКРЕТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

А. Л. Багно, А. М. Тарасьев

В статье рассматривается задача оптимального управления на бесконечном горизонте с подынтегральным индексом, входящим в функционал качества с дисконтирующим множителем. Основной особенностью постановки задачи является неограниченность подынтегрального индекса. Это позволяет проводить анализ моделей экономического роста с линейными, степенными и логарифмическими функциями полезности. Исследуется дискретная аппроксимация уравнения Гамильтона — Якоби для построения функции цены исходной задачи. Показано выполнений условий Гёльдера и подлинейного роста для решения уравнения дискретной аппроксимации. Показана равномерная сходимость решений аппроксимационных уравнений к функции цены задачи оптимального управления. Полученные результаты могут быть использованы для построения сеточных методов аппроксимации функции цены задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени. Разрабатываемые методы являются эффективными средствами в моделировании процессов экономического роста.

Ключевые слова: дискретная аппроксимация, оптимальное управление, уравнение Гамильтона — Якоби, вязкостное решение, бесконечный горизонт, функция цены.

A. L. Bagno, A. M. Taras'ev. Discrete approximation of the Hamilton–Jacobi equation for the value function in an optimal control problem with infinite horizon.

An infinite horizon optimal control problem is considered in which the quality functional contains an index with discount factor under the integral sign. The main feature of the problem is the unbounded index, which allows to analyze economic growth models with linear, power, and logarithmic utility functions. A discrete approximation of the Hamilton–Jacobi equation is explored for constructing the value function of the original problem. The Hölder condition and the sublinear growth condition are derived for the solution of the discrete approximation equation. Uniform convergence of solutions of approximation equations to the value function of the optimal control problem is shown. The obtained results can be used to construct grid approximation methods for the value function of an optimal control problem on an infinite time interval. The proposed methods are effective tools in the modeling of economic growth processes.

Keywords: discrete approximation, optimal control, Hamilton–Jacobi equation, viscosity solution, infinite horizon, value function.

MSC: 49K15, 49L25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-27-39

Введение

Метод дискретной аппроксимации уравнения Гамильтона — Якоби рассматривался И. Капуццо Дольчетта в работе [3], где изучались свойства аппроксимационных решений уравнения и их связь с задачами оптимального управления. Исследование метода было продолжено в статье [4], в которой были получены оценки отклонения аппроксимационных решений и вязкостного решения уравнения Гамильтона — Якоби, конструкция которого введена в работе М. Дж. Крэндалла и П. –Л. Лионса [2]. В дальнейшем эти идеи были развиты в исследовании Р. А. Адиатулиной и А. М. Тарасьева [5] для аппроксимации функции цены задач оптимального управления и дифференциальных игр как обобщенного минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби, предложенного А. И. Субботиным [10].

В упомянутых работах рассматривались управляемые системы на бесконечном горизонте с функционалом качества, содержащим дисконтирующий множитель. При этом существенным условием, стесняющим постановку задачи, являлось условие ограниченности функции полезности — интегранда в функционале качества. Долгое время без внимания оставался вопрос, как соотносятся решения уравнений дискретной аппроксимации и функция цены задачи оптимального управления в случае, когда функция полезности не удовлетворяет, вообще говоря, условию ограниченности. Ответу на этот вопрос посвящена настоящая статья. Отметим, что в работах авторов [6;7] проведены исследования свойств функций цены в задачах оптимального управления с неограниченными функциями полезности на бесконечном интервале времени и получены оценки на рост и параметры непрерывности по Гёльдеру. Эти результаты играют существенную роль в получении аналогичных оценок для аппроксимационных решений уравнений Гамильтона — Якоби.

Следует отметить, что тематика аппроксимации уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана в последнее время приобретает важное значение при установлении связи конструкций теории устойчивости и принципа динамического программирования в теории оптимального управления (см., например, работу Д. П. Бертсекаса [1]). В статье А. А. Красовского и А. М. Тарасьева [8] предложено решение задачи оптимального управления на бесконечном горизонте в рамках принципа максимума Л. С. Понтрягина, а также проведено исследование свойств соответствующей гамильтоновой системы и рассмотрены возможности по ее стабилизации.

Структура настоящей работы следующая. В разд. 1 дается постановка задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом, описывается уравнение дискретной аппроксимации и вводятся определения основных понятий, используемых в статье. В разд. 2 показывается, что решение уравнения дискретной аппроксимации удовлетворяет условию Гёльдера и условию подлинейного роста. Устанавливается, что решения аппроксимационных уравнений равномерно сходятся к функции цены задачи оптимального управления.

1. Постановка задачи и основные определения

В этой статье рассматривается следующая управляемая система:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$ — управляющий параметр, P — компакт.

Функционал качества задается равенством

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad \lambda > 0, \quad t_0 > 0. \tag{1.2}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия.

1. Функции f и h непрерывны по совокупности переменных на $\mathbb{R}^n \times P$.

2. Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ при любом $p \in P$ справедливы соотношения Липшица по аргументу x:

$$\|f(x_1, p) - f(x_2, p)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \tag{1.3}$$

$$|h(x_1, p) - h(x_2, p)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \tag{1.4}$$

где L — константа Липшица, не зависящая от p.

3. Для любых x, p выполняется условие подлинейного роста по аргументу x:

$$\|f(x, p)\| \leqslant \varkappa(1 + \|x\|), \tag{1.5}$$

$$|h(x, p)| \leqslant \varkappa(1 + \|x\|), \tag{1.6}$$

где $\varkappa$ — положительная константа, не зависящая от p.

Ставится задача максимизации функционала (1.2) с бесконечным горизонтом на траекториях системы (1.1) на множестве U измеримых по Лебегу управлений $u(\cdot)$ со значениями в компакте P.

О п р е д е л е н и е 1. *Ценой в задаче с бесконечным горизонтом* для начальной позиции (t_0, z_0), где $t_0 > 0$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \widetilde{y}_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, называется величина

$$\omega(t_0, z_0) = \sup_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \Bigg(\widetilde{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \Bigg). \tag{1.7}$$

Здесь $T > t_0$, $x(\cdot)$ удовлетворяет условию $\dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(\tau))$, τ пробегает значения внутри отрезка $[t_0, T]$, $x(t_0) = x_0$.

О п р е д е л е н и е 2. *Функцией цены задачи с бесконечным горизонтом* называется функция, сопоставляющая каждой позиции цену по правилу (1.7).

Заметим, что для функции цены w_T в задаче с конечным горизонтом T справедливы соотношения [10]

$$\begin{aligned} w_T(t_0, z_0) &= -\inf_{u(\cdot)\in U} \Bigg(-\widetilde{y}_0 - \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \Bigg) \\ &= \widetilde{y}_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \Bigg(\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} (-h(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau \Bigg), \end{aligned}$$

которыми удобно пользоваться при двойственных переходах в задачах оптимизации.

Введя обозначения $g(x, u) = -h(x, u)$, $y = -\widetilde{y}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, можно записать

$$w_T(t_0, z_0) = -\widetilde{y}_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \Bigg(\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \Bigg) =: -\omega_T(t_0, z_0)$$

и также считать функцию $\omega_T(t_0, z_0)$ функцией цены. Отметим, что функция h удовлетворяет свойствам (1.4) и (1.6), а для параметра y справедливо соотношение

$$y = -\widetilde{y} = -e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau)) = e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau)).$$

Аналогично для функции цены $w(t_0, z_0)$ введем ее аналог

$$w(t_0, z_0) = -\inf_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \Bigg(-\widetilde{y}_0 - \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \Bigg)$$

$$= -y_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \Bigg(\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} (g(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau \Bigg) =: -\omega(t_0, z_0) =: -\omega(t_0, x_0, y_0).$$

В дальнейшем будем исследовать свойства именно функции $\omega(t_0, z_0)$.

Функция цены обладает свойствами, аналогичными свойствам 2 и 3 функций f и h, причем она удовлетворяет условию Гёльдера. Справедливость условия подлинейного роста для функции цены была показана в работе [7, теорема 1], а выполнение условия Гёльдера — в работе [6, теорема 2]. Приведем здесь формулировки упомянутых утверждений.

Утверждение 1. *Если $\lambda > \varkappa$, тогда для функции цены в задаче с бесконечным горизонтом справедлива оценка*

$$|\omega(t,z)| \leqslant A + B\|x\|, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad t \geq t_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

где

$$A = |y| + \frac{\varkappa}{\lambda} e^{-\lambda t}, \quad B = \frac{1}{\lambda - \varkappa} e^{-\lambda t}.$$

Для упрощения дальнейших выкладок нам будет удобнее взять величину $B = \varkappa/(\lambda - \varkappa)e^{-\lambda t}$.

Утверждение 2. *Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$|\omega(0,x_1,0) - \omega(0,x_2,0)| \leqslant C\|x_1 - x_2\|^{\gamma}, \tag{1.9}$$

где $C > 0$, $\gamma > 0$.

Значения констант C и γ в зависимости от соотношения между параметрами $\varkappa$, L и λ введены в [6, теорема 2].

Определим гамильтониан задачи управления соотношением

$$H(x,s) = \frac{1}{\lambda} \min_{u \in P}(\langle s, f(x,u)\rangle + g(x,u)). \tag{1.10}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать для функции $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ уравнение Гамильтона — Якоби вида

$$-\varphi(x) + H(x, \nabla\varphi(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

Здесь $\nabla\varphi(x)$ — вектор частных производных функции $\varphi(x)$.

Отметим, что, как правило, уравнение Гамильтона — Якоби не имеет гладких решений. Для введения определения минимаксного решения уравнения (1.11) дадим определения производных Дини по направлению.

Определение 3. *Нижней (верхней) производной Дини функции ω в точке x по направлению d* называется функция

$$\partial_{-}\omega(x)|(d) = \inf_{\varepsilon(\cdot)\in\Delta} \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\omega(x + \delta d + \varepsilon(\delta)) - \omega(x)}{\delta}$$

$$\left(\partial_{+}\omega(x)|(d) = \sup_{\varepsilon(\cdot)\in\Delta} \varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\omega(x + \delta d + \varepsilon(\delta)) - \omega(x)}{\delta}\right),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$, Δ — класс функций $\varepsilon(\cdot)\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, таких что $\lim\limits_{\delta\to 0} \|\varepsilon(\delta)\|/\delta = 0$.

Рассмотрим вспомогательный гамильтониан

$$\overline{H}(t,x,s,m) = \begin{cases} e^{-t}|m| H\Big(x, \dfrac{s}{e^{-t}|m|}\Big), & m \neq 0, \\ \lim\limits_{m\to 0} e^{-t} m H\Big(x, \dfrac{s}{e^{-t}m}\Big), & m = 0, \end{cases}$$

где $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{R}$.

Символом S обозначим шар единичного радиуса $\overline{S} = \{\bar{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon \|\bar{s}\| = 1\}$. Введем также следующие обозначения для множеств, определяющих динамические возможности системы:

$$A(x) := \{\bar{f} = (f_1, f_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon \|\bar{f}\| \leqslant \sqrt{2}\varkappa(1 + \|x\|)\},$$

где $\bar{f} = \|f_1\| + |f_2|$. Ограничимся рассмотрением гамильтониана для момента времени $t = 0$:

$$A_{\text{в}}(x, q_1, q_2) := \{\bar{f} \in A(x) \colon \langle f_1, q_1 \rangle + \langle f_2, q_2 \rangle \geqslant \overline{H}(0, x, q_1, q_2)\}$$

$$A_{\text{н}}(x, p_1, p_2) := \{\bar{f} \in A(x) \colon \langle f_1, p_1 \rangle + \langle f_2, p_2 \rangle \leqslant \overline{H}(0, x, p_1, p_2)\},$$

где $q_1, p_1 \in \mathbb{R}^n$, $q_2, p_2 \in \mathbb{R}^n$.

Приведем определение минимаксного решения в терминах производных по направлению согласно работам [5;10] и в терминах сопряженных производных в соответствии со статьей [11].

Определение 4. *Минимаксным решением уравнения* (1.11) называется непрерывная функция $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Гёльдера (1.9) и подлинейного роста (1.8) при нулевой $(n+1)$-й координате, $y = 0$, для которой справедливы дифференциальные неравенства в терминах производных по направлению:

$$\min_{(d_1,d_2) \in A_{\text{в}}(x,q_1,q_2)} \{d_2 + \partial_- \varphi(x) \mid (d_1)\} - \varphi(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{q} = (q_1, q_2) \in \overline{S},$$

$$\max_{(d_1,d_2) \in A_{\text{н}}(x,p_1,p_2)} \{d_2 + \partial_+ \varphi(x) \mid (d_1)\} - \varphi(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{p} = (p_1, p_2) \in \overline{S},$$

или дифференциальные неравенства в терминах сопряженных производных:

$$\partial_-^* \varphi(x) := \sup_{d \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, d \rangle - \partial_- \varphi(x) \mid (d)\} \geqslant -\varphi(x) + H(x, s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\partial_+^* \varphi(x) := \inf_{d \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, d \rangle - \partial_+ \varphi(x) \mid (d)\} \leqslant -\varphi(x) + H(x, s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

В статье [7, теорема 2] было показано, что некоторая функция является функцией цены задачи оптимального управления (1.1), (1.2) тогда и только тогда, когда она является минимаксным решением уравнения (1.11). Введем определение вязкостного решения уравнения (1.11) в смысле Крэндалла — Лионса [2].

Определение 5. Непрерывная по Гёльдеру (1.9) функция $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию подлинейного роста (1.8), называется *вязкостным решением уравнения* (1.11), если для каждой непрерывно-дифференцируемой функции $\omega \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выполняются следующие неравенства:

$$H(x_1, \nabla \omega(x_1)) - \varphi(x_1) \leqslant 0,$$

если x_1 — точка локального максимума функции $(\varphi - \omega)(x)$;

$$H(x_2, \nabla \omega(x_2)) - \varphi(x_2) \geqslant 0,$$

если x_2 — точка локального минимума функции $(\varphi - \omega)(x)$.

По аналогии с работами [10;12] можно показать, что вязкостное решение уравнения (1.11) совпадает с минимаксным решением этого уравнения, и, следовательно, можно говорить об эквивалентности понятий минимаксного решения, вязкостного решения и функции цены задачи (1.1), (1.2).

2. Свойства решений уравнений дискретной аппроксимации

Наше уравнение Гамильтона — Якоби содержит гамильтониан (1.10), который неограниченно растет при x, стремящемся к бесконечности. Поэтому для удобства дальнейшего исследования нам будет удобно сделать замену функции $\varphi(x)$ из (1.11):

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{M + N\|x\|}, \tag{2.1}$$

где M и N — некоторые положительные константы. Отметим, что функция $\varphi(x)/(M+N\|x\|)$ не является гладкой в точке $x=0$, но ее можно сгладить в окрестности нуля. В качестве сглаживающей для функции $\|x\|$ в ε-окрестности нуля, $\varepsilon>0$, введем функцию

$$r_\varepsilon(x)=\begin{cases}\|x\|, & \text{если } \ \|x\|>\varepsilon,\\ \|x\|^2/(2\varepsilon)+\varepsilon/2, & \text{если } \ \|x\|\leqslant\varepsilon.\end{cases} \tag{2.2}$$

Эта функция носит название функции Хубера (см., например, [9, с. 33]). Отметим некоторые ее свойства. Во-первых, очевидно, что

$$\|x\|\leqslant r_\varepsilon(x) \tag{2.3}$$

для всех $x\in\mathbb{R}^n$. Производная функции $r_\varepsilon(x)$ определяется как

$$r'_\varepsilon(x)=\begin{cases}x/\|x\|, & \text{если } \ \|x\|>\varepsilon,\\ x/\varepsilon, & \text{если } \ \|x\|\leqslant\varepsilon.\end{cases}$$

Отсюда следует, что производная ограничена, т. е.

$$r'_\varepsilon(x)\leqslant 1, \tag{2.4}$$

и что производная липшицева. Действительно, при $\|x_1\|\geqslant\varepsilon$, $\|x_2\|\geqslant\varepsilon$ имеем

$$|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_2)|=\left\|\frac{x_1}{\|x_1\|}-\frac{x_2}{\|x_2\|}\right\|=\left\|\frac{x_1\|x_2\|-x_2\|x_1\|}{\|x_1\|\|x_2\|}\right\|$$
$$=\left\|\frac{x_1\|x_2\|-x_2\|x_1\|+x_1\|x_1\|-x_1\|x_1\|}{\|x_1\|\|x_2\|}\right\|=\frac{\|x_1(\|x_2\|-\|x_1\|)+\|x_1\|(x_1-x_2)\|}{\|x_1\|\|x_2\|}$$
$$\leqslant\frac{\|x_1\|(\|x_2\|-\|x_1\|)+\|x_1\|\|x_1-x_2\|}{\|x_1\|\|x_2\|}\leqslant\frac{\|x_1\|\|x_2-x_1\|+\|x_1\|\|x_1-x_2\|}{\|x_1\|\|x_2\|}$$
$$=\frac{2}{\|x_2\|}\|x_1-x_2\|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\|x_1-x_2\|.$$

При $\|x_1\|\leqslant\varepsilon$, $\|x_2\|\leqslant\varepsilon$ имеем

$$|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_2)|=\left\|\frac{\|x_1\|}{\varepsilon}-\frac{\|x_2\|}{\varepsilon}\right\|\leqslant\frac{\|x_1-x_2\|}{\varepsilon}<\frac{2}{\varepsilon}\|x_1-x_2\|.$$

В случае, когда $\|x_1\|<\varepsilon$, $\|x_2\|>\varepsilon$, выберем точку x_3 так, чтобы $\|x_3\|=\varepsilon$ и она лежала на отрезке, соединяющем точки x_1, x_2. Тогда

$$|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_2)|=|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_3)+r'_\varepsilon(x_3)-r'_\varepsilon(x_2)|$$
$$\leqslant|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_3)|+|r'_\varepsilon(x_3)-r'_\varepsilon(x_2)|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\|x_1-x_3\|+\frac{1}{\varepsilon}\|x_3-x_2\|$$
$$<\frac{2}{\varepsilon}(\|x_1-x_3\|+\|x_3-x_2\|)=\frac{2}{\varepsilon}\|x_1-x_2\|,$$

так как x_3 принадлежит отрезку, соединяющему точки x_1, x_2. Итак,

$$|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_2)|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\|x_1-x_2\|. \tag{2.5}$$

Вернемся к функции $\psi(x)$ (2.1), заменив $\|x\|$ на сглаживающую функцию $r_\varepsilon(x)$ (2.2). Можно показать, что она удовлетворяет условию подлинейного роста (1.8) и условию Гёльдера (1.9). Более того, из условия (1.8) следует, что функция $\psi(x)$ ограничена:

$$|\psi(x)|=\frac{\varphi(x)}{M+Nr_\varepsilon(x)}\leqslant\frac{A+Br_\varepsilon(x)}{M+Nr_\varepsilon(x)}\leqslant K, \tag{2.6}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $K = \max\left\{\dfrac{B}{N}, \dfrac{A + B\varepsilon/2}{M + N\varepsilon/2}\right\}$. Действительно, выражение $(A + Br_\varepsilon(x))/(M + Nr_\varepsilon(x))$ можно представить как монотонную функцию переменной $\|x\|$. На интервале $[0, +\infty)$ при $A/M < B/N$ эта функция монотонно возрастает и при $\|x\| \to +\infty$ стремится к пределу B/N. При $A/M > B/N$ картина обратная: функция монотонно убывает, максимум достигается в нуле и равен $(A + B\varepsilon/2)/(M + N\varepsilon/2)$.

Возьмем $M = N = \varkappa$ и подставим замену (2.1) в уравнение Гамильтона — Якоби (1.11). Тогда из соотношений (2.6) вытекают следующие соотношения:

$$\varphi(x) = \psi(x)(\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))),$$
$$\nabla\varphi(x) = \nabla\psi(x)(\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))) + \varkappa\,\psi(x)r'_\varepsilon(x).$$

Поэтому уравнение Гамильтона — Якоби примет вид

$$-\psi(x)(\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))) + \frac{1}{\lambda}\min_{u\in P}\big(\langle\nabla\psi(x)\big(\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))\big) + \varkappa\,\psi(x)r'_\varepsilon(x), f(x,u)\rangle + g(x,u)\big) = 0.$$

Эта запись эквивалентна уравнению Гамильтона — Якоби следующего вида:

$$\min_{u\in P}\Big(- \lambda\psi(x) + \langle\nabla\psi(x), f(x,u)\rangle + \varkappa\,\psi(x)\Big\langle r'_\varepsilon(x), \frac{f(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big\rangle + \frac{g(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big) = 0, \qquad (2.7)$$

в которое входит гамильтониан задачи управления (1.1)

$$\hat{H}(x, \psi(x), \nabla\psi(x)) = \min_{u\in P}\Big(\langle\nabla\psi(x), f(x,u)\rangle + \varkappa\psi(x)\Big\langle r'_\varepsilon(x), \frac{f(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big\rangle + \frac{g(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big).$$

Уравнение (2.7) можно переписать в виде

$$-\lambda\psi(x) + \hat{H}(x, \psi(x), \nabla\psi(x)) = 0.$$

Для полученного уравнения Гамильтона — Якоби можно ввести определения обобщенных минимаксного и вязкостного решений аналогично определениям 4 и 5. Например, вязкостное решение определяется следующим образом.

Непрерывная по Гёльдеру (1.9) функция $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию ограниченности (2.6), называется *вязкостным решением уравнения* (2.7), если для каждой непрерывно-дифференцируемой функции $\omega\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выполняются следующие неравенства:

$$-\lambda\psi(x) + \hat{H}(x, \psi(x), \nabla\omega(x)) \leqslant 0 \qquad (2.8)$$

в точке x_1, где x_1 — точка локального максимума функции $(\psi - \omega)(x)$;

$$-\lambda\psi(x) + \hat{H}(x, \psi(x), \nabla\omega(x)) \geqslant 0 \qquad (2.9)$$

в точке x_2, где x_2 — точка локального минимума функции $(\psi - \omega)(x)$.

Теперь перейдем к дискретной аппроксимации полученного в результате замены переменных уравнения Гамильтона — Якоби (2.7) с непрерывными по Гёльдеру и ограниченными обобщенными (минимаксными, вязкостными) решениями. По формуле Тейлора функцию $\psi(x)$ можно приблизить функцией $\psi^h(x)$ следующим образом:

$$\psi^h(x + hf(x,u)) - \psi^h(x) \approx h\langle\nabla\psi(x), f(x,u)\rangle.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.7) и домножая его на h, получим

$$\min_{u\in P}\Big(- \lambda h\psi^h(x + hf(x,u)) + \psi^h(x + hf(x,u)) - \psi^h(x)$$
$$+ \varkappa h\psi^h(x + hf(x,u))\Big\langle r'_\varepsilon(x), \frac{f(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big\rangle + \frac{hg(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big) = 0.$$

Или, что то же самое, имеем соотношение

$$\min_{u\in P}\Big(-\psi^h(x)+\Big(1-\lambda h+\varkappa h\Big\langle r'_\varepsilon(x),\frac{f(x,u)}{\varkappa\,(1+r_\varepsilon(x))}\Big\rangle\Big)\psi^h(x+hf(x,u))$$
$$+\frac{hg(x,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x))}\Big)=0; \tag{2.10}$$

здесь $x\in\mathbb{R}^n$, $h>0$.

Определение 6. Уравнение (2.10) будем называть *дискретной аппроксимацией* уравнения Гамильтона — Якоби (1.11). Функцию ψ^h будем называть *решением уравнения дискретной аппроксимации.*

Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначения

$$p(x,u,h,\lambda,\varkappa)=1-\lambda h+\varkappa h\Big\langle r'_\varepsilon(x),\frac{f(x,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x))}\Big\rangle,\quad q(x,u,h,\varkappa)=\frac{hg(x,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x))}.$$

Покажем, что функции $p(x,u,h,\lambda,\varkappa)$ и $q(x,u,h,\varkappa)$ удовлетворяют условию Липшица.

Действительно,

$$|q(x_1,u,h,\varkappa)-q(x_2,u,h,\varkappa)|=\left|\frac{hg(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))}-\frac{hg(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))}\right|$$
$$=\frac{h}{\varkappa}\left|\frac{g(x_1,u)(1+r_\varepsilon(x_2))-g(x_2,u)(1+r_\varepsilon(x_1))}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\right|$$
$$=\frac{h}{\varkappa}\left|\frac{(g(x_1,u)-g(x_2,u))+(g(x_1,u)r_\varepsilon(x_2)-g(x_1,u)r_\varepsilon(x_1))+(g(x_1,u)r_\varepsilon(x_1)-g(x_2,u)r_\varepsilon(x_1)}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\right|$$
$$=\frac{h}{\varkappa}\left|\frac{(g(x_1,u)-g(x_2,u))+g(x_1,u_1)(r_\varepsilon(x_1)-r_\varepsilon(x_2))+r_\varepsilon(x_1)(g(x_1,u)-g(x_2,u))}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\right|$$
$$=\frac{h}{\varkappa}\left|\frac{(g(x_1,u)-g(x_2,u))(1+r_\varepsilon(x_1))+g(x_1,u)(r_\varepsilon(x_1)-r_\varepsilon(x_2))}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\right|.$$

Так как для функции $g(x,u)$ выполняются соотношения Липшица (1.4) и подлинейного роста (1.6), а для функции $r_\varepsilon(x)$ — условие (2.3), имеем

$$|q(x_1,u,h,\varkappa)-q(x_2,u,h,\varkappa)|\leqslant\frac{h}{\varkappa}\Big(\frac{L(\|x_1-x_2\|)(1+r_\varepsilon(x_1))+\varkappa(1+\|x_1\|)(r_\varepsilon(x_1)-r_\varepsilon(x_2))}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\Big)$$
$$\leqslant\frac{h}{\varkappa}\Big(\frac{L(\|x_1-x_2\|)(1+r_\varepsilon(x_1))+\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))\|x_1-x_2\|}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\Big)$$
$$=\frac{h(L+\varkappa)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))}\|x_1-x_2\|\leqslant\frac{h(L+\varkappa)}{\varkappa}\|x_1-x_2\|. \tag{2.11}$$

Таким образом, функция $q(x,u,h,\varkappa)$ является липшицевой по переменной x с константой

$$C_q=hC'_q,\quad C'_q=\frac{L+\varkappa}{\varkappa}. \tag{2.12}$$

Аналогичным образом можно выполнить рассуждения для функции $p(x,u,h,\lambda,\varkappa)$. Имеем

$$|p(x_1,u,h,\lambda,\varkappa)-p(x_2,u,h,\lambda,\varkappa)|$$
$$=\left|\left(1-\lambda h+\varkappa h\left\langle r'_\varepsilon(x_1),\frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))}\right\rangle\right)-\left(1-\lambda h+\varkappa h\left\langle r'_\varepsilon(x_2),\frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))}\right\rangle\right)\right|$$

$$= \varkappa h \left| \left\langle r'_\varepsilon(x_1), \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\rangle - \left\langle r'_\varepsilon(x_2), \frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))} \right\rangle \right|$$

$$= \varkappa h \Bigg| \left\langle r'_\varepsilon(x_1), \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\rangle - \left\langle r'_\varepsilon(x_2), \frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))} \right\rangle$$

$$+ \left\langle r'_\varepsilon(x_2), \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\rangle - \left\langle r'_\varepsilon(x_2), \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\rangle \Bigg|$$

$$= \varkappa h \left| \left\langle \left(r'_\varepsilon(x_1) - r'_\varepsilon(x_2) \right), \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\rangle + \left\langle r'_\varepsilon(x_2), \left(\frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} - \frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))} \right) \right\rangle \right|.$$

Воспользуемся неравенством Коши — Буняковского:

$$|p(x_1,u,h,\lambda,\varkappa) - p(x_2,u,h,\lambda,\varkappa)|$$

$$\leqslant \varkappa h \left(\|r'_\varepsilon(x_1) - r'_\varepsilon(x_2)\| \cdot \left\| \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\| + \|r'_\varepsilon(x_2)\| \cdot \left\| \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} - \frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))} \right\| \right).$$

Так как функция $f(x,u)$ удовлетворяет условию подлинейного роста (1.5), а функция $r_\varepsilon(x)$ — условиям (2.3) и (2.4), получаем

$$|p(x_1,u,h,\lambda,\varkappa) - p(x_2,u,h,\lambda,\varkappa)|$$

$$\leqslant \varkappa h \left(\|r'_\varepsilon(x_1) - r'_\varepsilon(x_2)\| + \left\| \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} - \frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))} \right\| \right). \quad (2.13)$$

Оценку разности производных функции $r_\varepsilon(x)$ мы произвели выше (см. (2.5)). Второе слагаемое представляет собой в точности до обозначений разность $|q(x_1,u,h,\varkappa) - q(x_2,u,h,\varkappa)|$, оценку которой мы тоже получили в (2.11). Подставляя эти выражения в (2.13), имеем

$$|p(x_1,u,h,\lambda,\varkappa) - p(x_2,u,h,\lambda,\varkappa)| \leqslant \varkappa h \Big(\frac{2}{\varepsilon} \|x_1 - x_2\| + \frac{(L+\varkappa)}{\varkappa} \|x_1 - x_2\| \Big)$$

$$= \Big(\frac{2\varkappa h}{\varepsilon} + h(L+\varkappa) \Big) \|x_1 - x_2\|. \quad (2.14)$$

Тем самым показано, что функция $p(x,u,h,\lambda,\varkappa)$ является липшицевой с константой

$$C_p = hC'_p, \quad C'_p = \frac{2\varkappa}{\varepsilon} + L + \varkappa. \quad (2.15)$$

Теорема 1. *Если $\lambda > \varkappa + \gamma L$, то решение уравнения дискретной аппроксимации ψ^h единственно для любого $h \in [0, 1/(\lambda - \varkappa))$, причем выполняются оценки*

$$|\psi^h(x_1) - \psi^h(x_2)| \leqslant C\|x_1 - x_2\|^\gamma, \quad (2.16)$$

где $C = \dfrac{C'_p K + C'_q}{\lambda - \varkappa - \gamma L}$, константы C'_p и C'_q определяются соотношениями (2.15) *и* (2.12),

$$|\psi^h(x)| \leqslant \frac{1}{\lambda - \varkappa}. \quad (2.17)$$

Доказательство. Аппроксимационное уравнение (2.10) эквивалентно уравнению

$$\psi^h(x) = T\psi^h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь оператор T определяется следующим образом:

$$T\psi(x) = \min_{u \in P} \left(p(x,u,h,\lambda,\varkappa)\psi(x + hf(x,u)) + q(x,u,h,\varkappa) \right) \quad (2.18)$$

на функциях ψ, удовлетворяющих условию непрерывности по Гёльдеру и условию ограниченности.

Выберем управление u, на котором оператор T достигает минимума для функции ψ. Рассмотрим разность значений оператора T на функциях ψ, $\hat{\psi}$. Для любого управления $\hat{u}$ справедливы оценки

$$\begin{gathered} T\psi(x) - T\hat{\psi}(x) \\ = p(x,u,h,\lambda,\varkappa)(\psi(x+f(x,u)h) - \hat{\psi}(x+f(x,\hat{u})h)) + (q(x,u,h,\varkappa) - q(x,\hat{u},h,\varkappa)) \\ \leqslant p(x,u,h,\lambda,\varkappa)(\psi(x+f(x,\hat{u})h) - \hat{\psi}(x+f(x,\hat{u})h)) \leqslant p(x,u,h,\lambda,\varkappa)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\psi(x) - \hat{\psi}(x)|. \end{gathered}$$

Аналогично получаем неравенство

$$T\hat{\psi}(x) - T\psi(x) \leqslant p(x,u,h,\lambda,\varkappa)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\psi(x) - \hat{\psi}(x)|.$$

Следовательно,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|T\psi(x) - T\hat{\psi}(x)| \leqslant p(x,u,h,\lambda,\varkappa)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\psi(x) - \hat{\psi}(x)|.$$

Оценим функцию $p(x,u,h,\lambda,\varkappa)$. По неравенству Коши — Буняковского, свойству подлинейного роста для функции $f(x,u)$ (1.5) и ограниченности производной $r'_\varepsilon(x)$ (2.4) имеем

$$p(x,u,h,\lambda,\varkappa) = 1 + h\Big(-\lambda + \varkappa\Big\langle r'_\varepsilon(x), \frac{f(x,u)}{\varkappa(1+\|x\|)}\Big\rangle\Big) \leqslant 1 - \lambda h + \varkappa h. \tag{2.19}$$

Отметим, что так как по условию теоремы $\lambda > \varkappa + \gamma L$, в соответствии с выбором $h \in [0, 1/(\lambda-\varkappa))$ значения множителя $p(x,u,h,\lambda,\varkappa)$ лежат между 0 и 1, т. е. оператор T является сжимающим, и по принципу сжимающих отображений существует единственная функция $\psi^h(x)$, удовлетворяющая уравнению дискретной аппроксимации (2.10).

Перейдем к доказательству оценок (2.16), (2.17). По определению оператора T (2.18) имеем

$$\begin{gathered} |T\psi(x_1) - T\psi(x_2)| \\ = |(p(x_1,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x+hf(x_1,u_1)) + q(x_1,u_1,h,\varkappa)) \\ - (p(x_2,u_2,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_2+hf(x_2,u_2)) + q(x_2,u_2,h,\varkappa))|, \end{gathered}$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2 \in P$ — управления, реализующие минимум определенного на функции $\psi(x)$ оператора T в точках x_1 и x_2 соответственно. При любом управлении, отличном от u_2, в точке x_2 значение оператора T больше, чем при управлении u_1. Следовательно

$$\begin{gathered} |T\psi(x_1) - T\psi(x_2)| \\ \leqslant |(p(x_1,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_1+hf(x_1,u_1)) + q(x_1,u_1,h,\varkappa)) \\ - (p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_2+hf(x_2,u_1)) + q(x_2,u_1,h,\varkappa))| \\ \leqslant |p(x_1,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x+hf(x_1,u_1)) - p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_2+hf(x_2,u_1)) \\ + p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_1+hf(x_1,u_1)) - p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_1+hf(x_1,u_1))| \\ + |q(x_1,u_1,h,\varkappa) - q(x_2,u_1,h,\varkappa)| \\ \leqslant |p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)||\psi(x_1+hf(x_1,u_1)) - \psi(x_2+hf(x_2,u_1))| \\ + |p(x_1,u_1,h,\lambda,\varkappa) - p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)||\psi(x_1+hf(x_1,u_1))| + |q(x_1,u_1,h,\varkappa) - q(x_2,u_1,h,\varkappa)|. \end{gathered}$$

Оценим разность точек

$$\|x_1 + f(x_1, u_1)h - x_2 - f(x_2, u_1)h\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + h\|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_1)\|$$
$$\leqslant \|x_1 - x_2\| + hL\|x_1 - x_2\| \leqslant (1 + hL)\|x_1 - x_2\|. \tag{2.20}$$

Для удобства дальнейших выкладок введем функцию

$$\Omega(x_1, x_2) = \frac{|\psi(x_1) - \psi(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|^\gamma}.$$

Используя (2.6), (2.11), (2.14), (2.19) и (2.20), имеем

$$|T\psi(x_1) - T\psi(x_2)|$$
$$\leqslant (1 - \lambda h + \varkappa h)\Omega(x_1 + hf(x_1, u_1), x_2 + hf(x_2, u_1))\|x_1 + hf(x_1, u_1) - x_2 - hf(x_2, u_1)\|^\gamma$$
$$+ hC'_pK\|x_1 - x_2\|^\gamma + hC'_q\|x_1 - x_2\|^\gamma$$
$$\leqslant (1 - \lambda h + \varkappa h)(1 + hL)^\gamma\Omega(x_1 + hf(x_1, u_1), x_2 + hf(x_2, u_1))\|x_1 - x_2\|^\gamma$$
$$+ hC'_pK\|x_1 - x_2\|^\gamma + hC'_q\|x_1 - x_2\|^\gamma.$$

Очевидно, что

$$\frac{|T\psi(x_1) - T\psi(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|^\gamma} \leqslant (1 - \lambda h + \varkappa h)(1 + hL)^\gamma\Omega(x_1 + hf(x_1, u_1), x_2 + hf(x_2, u_1)) + hC'_pK + hC'_q.$$

Так как $\lambda > \varkappa + \gamma L$, то число $D = \dfrac{hC'_pK + hC'_q}{1 - (1 - \lambda h + \varkappa h)(1 + hL)^\gamma}$ положительно, и легко увидеть, что $\dfrac{|T\psi(x_1) - T\psi(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|^\gamma} \leqslant D$ для любого $|\psi| \leqslant D$. Поэтому последовательность $T^n\psi_0$, начинающаяся с любого $|\psi_0| \leqslant D$, сходится к единственному решению ψ^h уравнения (2.10). Так как D убывает с ростом h, то выполняется оценка

$$\frac{|\psi^h(x_1) - \psi^h(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|^\gamma} \leqslant \lim_{h\to 0} \frac{hC'_pK + hC'_q}{1 - (1 - \lambda h + \varkappa h)(1 + hL)^\gamma} = \frac{C'_pK + C'_q}{\lambda - \varkappa - \gamma L}.$$

Неравенство (2.16) доказано.

Теперь покажем, что верно неравенство (2.17). Из (1.6) и (2.18) следует, что

$$|T\psi^h(x)| \leqslant (1 - \lambda h + \varkappa h)|\psi^h(x)| + \frac{h|g(x, u)|}{\varkappa(1 + \|x\|)} \leqslant (1 - \lambda h + \varkappa h)|\psi^h(x)| + \frac{h\varkappa(1 + \|x\|)}{\varkappa(1 + \|x\|)}.$$

Так как оператор T сжимающий, то $(\lambda - \varkappa)h|\psi^h(x)| \leqslant h$. Переходя к пределу при $h \to 0$, получим $(\lambda - \varkappa)|\psi^h(x)| \leqslant 1$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *На любом ограниченном шаре из* $\mathbb{R}^{n+2}$ *решения* ψ^h *уравнений дискретной аппроксимации* (2.10) *сходятся равномерно к функции цены* ψ *задачи* (1.1) *при* $h \to 0$.

Доказательство. По теореме Асколи — Арцела и оценке (2.16) в условии теоремы 1 существуют подпоследовательность $h_p \to 0$ при $p \to +\infty$ и функция ψ такие, что $\psi^{h_p} \rightrightarrows \psi$ на любом ограниченном шаре из $\mathbb{R}^{n+2}$ при $p \to +\infty$.

Покажем, что ψ — вязкостное решение уравнения (1.11). Предположим, что существует замкнутый шар E с центром в точке x_0 такой, что

$$(\psi - \omega)(x_0) > (\psi - \omega)(x) \quad \forall x \in E.$$

Пусть в точке $x_0^{h_p}$ функция $\psi^{h_p}-\omega$ достигает максимальное значение в шаре E. Следовательно, последовательность $x_0^{h_p}$ сходится к x_0 при $p\to+\infty$. Так как функция f удовлетворяет условию Липшица (1.3), то верно соотношение $x_0^{h_p}+f(x_0^{h_p})h_p\in E$ при достаточно больших p. Поэтому

$$\psi^{h_p}(x_0^{h_p})-\omega^{h_p}(x_0^{h_p})\geqslant\psi^{h_p}(x_0^{h_p}+f(x_0^{h_p})h_p)-\omega^{h_p}(x_0^{h_p}+f(x_0^{h_p})h_p).$$

Это дает соотношение

$$0=\min_u\Big\{\Big(1-\lambda h_p+\varkappa h_p\Big\langle r'_\varepsilon(x_0^{h_p}),\frac{f(x_0^{h_p})}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_0^{h_p}))}\Big\rangle\Big)\psi^{h_p}(x_0^{h_p}+f(x_0^{h_p})h_p)$$

$$-\psi^{h_p}(x_0^{h_p})+\frac{h_p g(x_0^{h_p})}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_0^{h_p}))}\Big\}\leqslant\min_u\Big\{\omega(x_0^{h_p}+f(x_0^{h_p})h_p)-\omega(x_0^{h_p})$$

$$+\Big(-\lambda h_p+\varkappa h_p\Big\langle r'_\varepsilon(x_0^{h_p}),\frac{f(x_0^{h_p})}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_0^{h_p}))}\Big\rangle\Big)\psi^{h_p}(x_0^{h_p}+f(x_0^{h_p})h_p)+\frac{h_p g(x_0^{h_p})}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_0^{h_p}))}\Big\}$$

$$\leqslant\min_u\Big\{h_p^{-1}\sum_{i=1}^n\frac{\partial\omega}{\partial x_i}(x_0^{h_p}+\beta_p f(x_0^{h_p})h_p)f_i(x_0^{h_p})h_p$$

$$+\Big(-\lambda+\varkappa\Big\langle r'_\varepsilon(x_0^{h_p}),\frac{f(x_0^{h_p})}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_0^{h_p}))}\Big\rangle\Big)\psi^{h_p}(x_0^{h_p}+f(x_0^{h_p})h_p)+\frac{g(x_0^{h_p})}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_0^{h_p}))}\Big\},$$

где $\beta_p\in[0,1]$. Переходя к пределу при $p\to+\infty$, получаем второе неравенство определения вязкостного решения (2.9).

Аналогично можно показать справедливость первого неравенства (2.8). Так как вязкостное решение единственно [2], получаем, что функции цены ψ^h сходятся к ψ при $h\to 0$.

Это завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bertsekas D. P.** Dynamic programming and optimal control. Vol. I. Belmont: Athena Scientific, 2017. 576 p. ISBN: 1-886529-26-4.
2. **Crandall M. G., Lions P.-L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8.
3. **Dolcetta I. C.** On a discrete approximation of the Hamilton — Jacobi equation of dynamic programming // Appl. Math. Optimiz. 1983. Vol. 10, no. 4. P. 367–377. doi: 10.1007/BF01448394.
4. **Dolcetta I. C., Ishii H.** Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory // Appl. Math. Optimiz. 1984. Vol. 11, no. 2. P. 161–181. doi: 10.1007/bf01442176.
5. **Адиатулина Р. А., Тарасьев А. М.** Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 4. С. 531–537.
6. **Багно А. Л., Тарасьев А. М.** Свойства функции цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 3–14. doi: 10.20537/vm160101.
7. **Багно А. Л., Тарасьев А. М.** Свойства стабильности функции цены в задаче оптимального управления с бесконечным горизонтом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 43–56. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-43-56.
8. **Красовский А. А. Тарасьев А. М.** Динамическая оптимизация инвестиций в моделях экономического роста // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 38–52.
9. **Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А.** Эконометрика. Начальный курс: учеб. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2004. 576 с. ISBN: 5-7749-0055-X.

10. **Субботин А. И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
11. **Субботин А. И., Тарасьев А. М.** Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 559–564.
12. **Султанова Р. А.** Минимаксные решения уравнений в частных производных: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Урал. гос. ун-т им. А. М. Горького. Екатеринбург, 1995. 192 с.

Багно Александр Леонидович
аспирант
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: bagno.alexander@gmail.com

Поступила 1.12.2017

Тарасьев Александр Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: tam@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Bertsekas D.P. *Dynamic programming and optimal control. Vol. I.* Belmont: Athena Scientific, 2017, 576 p. ISBN: 1-886529-26-4.
2. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8.
3. Dolcetta I.C. On a discrete approximation of the Hamilton–Jacobi equation of dynamic programming. *Appl. Math. Optimiz.*, 1983, vol. 10, no. 4, pp. 367–377. doi: 10.1007/BF01448394.
4. Dolcetta I.C., Ishii H. Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optimiz.*, 1984, vol. 11, no. 2, pp. 161–181. doi: 10.1007/bf01442176.
5. Adiatulina R.A., Tarasyev A.M.. A differential game of unlimited duration. *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 4, pp. 415–420. doi: 10.1016/0021-8928(87)90077-3.
6. Bagno A.L., Tarasyev A.M. Properties of the value function in optimal control problems with infinite horizon. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 3–14 (in Russian). doi: 10.20537/vm160101.
7. Bagno A.L., Tarasyev A.M. Stability properties of the value function in an infinite horizon optimal control problem. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 43–56. (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-43-56.
8. Krasovskii A.A., Tarasyev A.M. Dynamic optimization of investments in the economic growth models. *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 10, pp. 1765–1777. doi: 10.1134/S0005117907100050.
9. Magnus J.R., Katyshev P.K., Peresetsky A.A. *Econometrika. Nachalnyj kurs.* [Econometrics: A First Course]. Moscow, Delo Publ., 2004, 576 p. ISBN: 5-7749-0055-X.
10. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona – Yakobi.* (Minimax Inequalities and Hamilton – Jacobi Equations). Moscow, Nauka Publ., 1991, 216 p.
11. Subbotin A.I., Tarasyev A.M.. Conjugate derivatives of the value function of a differential game. *Soviet Math. Dokl.*, 1985, no. 32, pp. 162–166.
12. Sultanova R.A. *Minimaksnye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh.* [Minimax solutions of partial differential equations]. Can. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Ekaterinburg, 1995, 192 p.

The paper was received by the Editorial Office on Dezember 1, 2017.

Aleksandr Leonidovich Bagno, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: bagno.alexander@gmail.com.

Aleksandr MIkhailovich Taras'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: tam@imm.uran.ru.