ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

О НЕОБХОДИМЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ГРАДИЕНТАХ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Д. В. Хлопин

В работе исследуются необходимые условия оптимальности в задачах управления на бесконечном промежутке. В качестве критерия оптимальности выбран обгоняющий критерий (overtaking optimality). В предположении, что все градиенты платежной функции ограничены, для сопряженной переменной построено необходимое для оптимальности условие в терминах предельных точек градиентов $\frac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, T)$ при $\xi \to \tilde{x}(0), T \to \infty$. В случае непрерывности на бесконечности градиента платежной функции вдоль оптимальной траектории (единственности такой предельной точки) это условие, дополняя систему принципа максимума до полной системы соотношений, выделяет единственное решение. Показано, что при этом сопряженная переменная данного решения может быть явно выписана с помощью формулы (типа Коши), предложенной ранее в работах А. М. Асеева и А. В. Кряжимского. Также показано, что найденное решение автоматически удовлетворяет еще одному условию (уже на гамильтониан), предложенному недавно А. О. Беляковым для поиска оптимальных в смысле обгоняющего критерия решений. Отмечено, что в случае более слабого требования — существования предела $\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(0), 0; \tilde{u}, T)$ при $T \to \infty$ — формула типа Коши может оказаться несовместной с условием максимизации гамильтониана, а значит и с принципом максимума Понтрягина. Ключевая идея доказательства — применение в рамках схемы Халкина теоремы о сходимости субдифференциалов для последовательности равномерно сходящихся функций.

Ключевые слова: задача управления на бесконечном промежутке, необходимые условия, условия трансверсальности на бесконечности, принцип максимума Понтрягина, сходимость субдифференциалов.

D. V. Khlopin. On necessary limit gradients in control problems with infinite horizon.

We study necessary optimality conditions in control problems with infinite horizon and an overtaking optimality criterion. Under the assumption that all gradients of the payoff function are bounded, we construct a necessary optimality condition for the adjoint variable in terms of the limit points of the gradients $\frac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, T)$ as $\xi \to \tilde{x}(0), T \to \infty$. In the case when the gradient of the payoff function is continuous at infinity along an optimal trajectory (the limit point is unique), this condition supplements the system of the maximum principle to a complete system of relations and defines a unique solution. It is shown that the adjoint variable of this solution can be written explicitly with the use of the (Cauchy type) formula proposed earlier by A. M. Aseev and A. V. Kryazhimskii. It is also shown that the solution automatically satisfies one more condition (on the Hamiltonian) proposed recently by A. O. Belyakov for finding solutions optimal with respect to the overtaking criterion. We note that, in the case of the weaker requirement of the existence of the limit $\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(0), 0; \tilde{u}, T)$ as $T \to \infty$, a Cauchy type formula may be inconsistent with the Hamiltonian maximization condition and, hence, with Pontryagin's maximum principle. The key idea of the proof is the application of the theorem on the convergence of subdifferentials for a sequence of uniformly convergent functions within Halkin's scheme.

Keywords: infinite horizon control problem, necessary conditions, transversality conditions at infinity, Pontryagin maximum principle, convergence of subdifferentials.

MSC: 49J52, 49K15, 91B62

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-247-256

Введение

Необходимые условия оптимальности для задач управления на бесконечном промежутке в максимально общей постановке были доказаны Х. Халкиным в виде принципа максимума Понтрягина в [1, § 4], но показанные соотношения не содержали какого-либо краевого условия на бесконечности и не позволяли выделить единственное решение сопряженной системы.

В данной статье предлагается модификация предложенной Х. Халкиным общей схемы построения необходимых условий оптимальности, при этом начальное значение сопряженной переменной описывается как предельный градиент платежной функции, а условие трансверсальности напрямую следует из теорем о сходимости субдифференциалов. Для простоты изложения в работе предполагается ограниченность градиентов платежной функции (что автоматически подразумевает также нормальность системы принципа максимума), а в качестве критерия оптимальности принят обгоняющий критерий (overtaking optimality). При дополнительных предположениях на систему, а именно при непрерывности градиента платежной функции от начального условия, показано, что указанное условие трансверсальности выделяет единственное решение принципа максимума, т. е. дополняет систему принципа максимума до полной системы соотношений.

Сама работа построена следующим образом. В первых двух разделах приведены постановка задачи, соотношения принципа максимума и все необходимые определения, в том числе из выпуклого анализа. В следующем разделе даны необходимые условия для критерия обгоняющей оптимальности в предположении ограниченности градиента платежной функции (теорема 1) и точная формула для сопряженной переменной в предположении непрерывности градиента платежной функции (теорема 2). Там же приведен пример, уточняющий применимость этой формулы. Последний раздел посвящен доказательству теорем 1 и 2.

Сходные предположения исследовались также в работах [2; 3, §4; 4–7]. Показанные там результаты не покрывают ни теоремы 1, ни теоремы 2.

Предварительная версия данной статьи была выложена в архиве библиотеки Корнéллского университета (см. [8]).

1. Базовые определения и постановки

Зафиксируем фазовое пространство исходной управляемой системы — некоторое конечномерное евклидово пространство $\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим задачу минимизации на бесконечном промежутке

$$l(b) + \int_0^\infty f_0(t,x,u)\,dt \to \min, \tag{1.1a}$$

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u \in U, \tag{1.1b}$$

$$x(0) \in \mathcal{C}. \tag{1.1c}$$

Здесь функции l, f_0 скалярны; x — это фазовая переменная, принимающая значения в $\mathbb{X}$, а u — некоторый управляющий параметр из некоторого замкнутого подмножества U конечномерного евклидового пространства. Обозначим через $\mathcal{U}$ множество всех ограниченных на каждом компактном промежутке измеримых по Борелю отображений $u : [0,\infty) \to U$.

Мы будем предполагать выполненными следующие условия:

- $\mathcal{C}$ является замкнутым подмножеством в $\mathbb{X}$;
- l — локально липшицевая скалярная функция от $x \in \mathbb{X}$;
- для всякого $u \in \mathcal{U}$ функции $[0,\infty) \times \mathbb{X} \ni (t,x) \mapsto f(t,x,u(t)) \in \mathbb{X}$, $[0,\infty) \times \mathbb{X} \ni (t,x) \mapsto f_0(t,x,u(t)) \in \mathbb{R}$ вместе со своими производными по x измеримы по Борелю по t, локально липшицевы по x и удовлетворяют условию подлинейного роста по x.

Теперь для любых допустимого управления $u \in \mathcal{U}$, момента времени $\theta \geq 0$ и начальной позиции $b \in \mathbb{X}$ найдется решение $y(b,\theta,u;\cdot)$ системы (1.1b) с начальным условием $x(\theta) = b$, можно считать это решение заданным на всей полуоси $[0,\infty)$. Введем теперь скалярную функцию J правилом:

$$J(b,\theta;u,T) \stackrel{\triangle}{=} \int_\theta^T f_0\big(t, y(b,\theta,u;t), u(t)\big)\,dt \quad \forall b \in \mathbb{X}, \quad u \in \mathcal{U}, \quad \theta \geq 0, \quad T > \theta.$$

Наложенных выше условий также достаточно, чтобы гарантировать как гладкость отображения J по x, так и принцип максимума Понтрягина [9, Theorem 5.2.1] для задачи минимизации $J(b,\theta;u,T)$ на любом конечном промежутке времени $[\theta,T]\subset[0,\infty)$.

Пару $(x,u)\in C([0,\infty),\mathbb{X})\times\mathfrak{U}$ назовем допустимым управляемым процессом, если $x(0)\in\mathcal{C}$, $x(\cdot)=y(x(0),0,u;\cdot)$.

Определение 1 [10]. Назовем допустимый процесс $(\tilde{x},\tilde{u})$ обгоняюще оптимальным (overtaking optimal) для задачи (1.1a)–(1.1c), если для любого допустимого процесса (x,u) выполнено

$$\liminf_{T\to\infty}\left[l(x(0))-l(\tilde{x}(0))+\int_0^T[f_0(t,x(t),u(t))-f_0(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))]\,dt\right]\geq 0.$$

Всюду далее мы будем предполагать, что некоторый допустимый управляемый процесс $(\tilde{x},\tilde{u})$ является обгоняюще оптимальным для задачи (1.1a)–(1.1c). Для краткости мы также введем для платежных функций и траекторий, порожденных управлением $\tilde{u}$, следующие обозначения:

$$\tilde{J}(b;T)\stackrel{\triangle}{=}J(b,0;\tilde{u},T),\quad \tilde{y}(b;T)\stackrel{\triangle}{=}y(b,0,\tilde{u};T)\quad \forall T>0,\quad b\in\mathbb{X}.$$

Нам понадобятся простейшие определения невыпуклого анализа [11]. Для всякой липшицевой функции $g:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ и точки $\xi\in\mathbb{X}$ через $\hat{\partial}g(\xi)$ будем обозначать субдифференциал Фреше этой функции в точке $\xi\in\mathbb{X}$; он состоит из всех градиентов $h'(\xi)\in\mathbb{X}^*$ по всем таким дифференцируемым (по Фреше) функциям $h:\mathbb{X}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, что $g(\xi)=h(\xi)$, а кроме того, $h(\xi')\leq g(\xi')$ для всех $\xi'\in\mathbb{X}$. Предельный субдифференциал функции g в точке ξ, обозначаемый далее через $\partial g(\xi)$, состоит из всех таких элементов $\zeta\in\mathbb{X}^*$, что для некоторых последовательностей элементов $y_n\in\mathbb{X},\zeta_n\in\hat{\partial}g(y_n)$ выполнено

$$y_n\to\xi,\quad \zeta_n\to\zeta,\quad g(y_n)\to g(\xi).$$

Обозначим также через $N^{\mathcal{C}}(\xi)$ предельный нормальный конус множества $\mathcal{C}$ в точке ξ.

2. Принцип максимума Понтрягина и его краевые условия

Зададим функцию Гамильтона — Понтрягина $H:\mathbb{X}\times\mathbb{X}^*\times U\times[0,\infty)^2\mapsto\mathbb{R}$ правилом

$$H(x,\psi,u,\lambda,t)\stackrel{\triangle}{=}\psi f\big(t,x,u\big)-\lambda f_0\big(t,x,u\big)\quad \forall(x,\psi,u,\lambda,t)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}^*\times U\times[0,\infty)^2.$$

Нам понадобятся соотношения принципа максимума Понтрягина:

$$\dot{x}(t) = f\big(t,x(t),\tilde{u}(t)\big); \tag{2.1a}$$

$$-\dot{\psi}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}\big(x(t),\psi(t),\tilde{u}(t),\lambda,t\big); \tag{2.1b}$$

$$\sup_{u'\in U}H\big(x(t),\psi(t),u',\lambda,t\big) = H\big(x(t),\psi(t),\tilde{u}(t),\lambda,t\big). \tag{2.1c}$$

Как следует из [1], для всякого обгоняюще оптимального процесса найдется нетривиальное решение принципа максимума Понтрягина (2.1a)–(2.1c). Тем не менее в этой системе необходимых для оптимальности соотношений не хватает еще одного краевого условия на сопряженную переменную, соответствующего условию трансверсальности на бесконечности. Такое условие можно построить, в частности, в случае, если известна функция цены (см., например, [12–14]). Еще один подход связан с использованием подходящих соболевских пространств (см. например, [7; 15]). В отличие от этих работ, полученное в данной работе условие трансверсальности опирается на следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что нетривиальное решение $(\tilde{x}, \tilde{\psi}, \tilde{\lambda})$ системы (2.1a)–(2.1b) является точным предельным, если для некоторых последовательностей $y_n \in \mathbb{X}, t_n \geq 0, \lambda_n > 0$ выполнено

$$t_n \to \infty, \quad y_n \to \tilde{x}(0), \quad \lambda_n \to \tilde{\lambda},$$
$$-\lambda_n \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(y_n; t_n) \to \tilde{\psi}(0), \quad \tilde{J}(y_n; t_n) - \tilde{J}(\tilde{x}(0); t_n) \to 0. \tag{2.2}$$

Как показано в [6, Proposition 2.1] всякому слабо равномерно обгоняюще оптимальному [10] для задачи (1.1a)–(1.1c) процессу $(\tilde{x}, \tilde{u})$ соответствует точное предельное решение $(\tilde{\psi}, \tilde{\lambda})$ принципа максимума Понтрягина (2.1a)–(2.1c) с $\tilde{\lambda} \in \{0, 1\}$. В данной работе мы перенесем полученный в [6, Proposition 2.1] результат на обгоняющий критерий оптимальности. Отметим, что ни слабо равномерно обгоняющий критерий [10], ни обгоняющий критерий не вкладываются друг в друга.

Принципиальной сложностью для получения в задачах управления на бесконечном промежутке дополнительных условий, условий трансверсальности, является необходимость нахождения для сопряженной системы такой асимптотики, что была бы выполнена хотя бы для одного, но и не для континуального числа решений. Отметим, что точных предельных решений может быть в общем случае и континуум, следовательно дополнительное требование точного предельного решения принципа максимума не гарантирует полной системы соотношений. Тем не менее в ряде задач удается найти условие, выделяющее каждому оптимальному процессу в точности одно решение сопряженной системы. Для того чтобы выразить это решение явно, нам понадобится формула Коши для сопряженной системы.

Обозначим через $\mathbb{L}$ линейное пространство всех действительнозначных $m \times m$ матриц; здесь $m = \dim \mathbb{X}$. Всякому вектору $\xi \in \mathbb{X}$ соответствует решение $A(\xi; \cdot) \in C([0, \infty), \mathbb{L})$ задачи Коши

$$\frac{dA(\xi; t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\tilde{y}(\xi; t), \tilde{u}(t)\big) A(\xi; t), \quad A(\xi; 0) = 1_{\mathbb{L}}. \tag{2.3}$$

Теперь для всех $\xi \in \mathbb{X}, T \geq 0$ выполнено

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(\xi; T) = A(\xi; T), \quad \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi; T) = \int\limits_0^T \frac{\partial f_0}{\partial x}\big(t, \tilde{y}(\xi; t), \tilde{u}(t)\big)\, A(\xi; t)\, dt, \tag{2.4}$$

и у каждого положительного λ соответствующее ему решение (x, ψ) системы (2.1a)–(2.1b) удовлетворяет формуле Коши:

$$\psi(t) A(x(0); t) - \psi(0) = \lambda \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(x(0); t) \quad \forall t \geq 0. \tag{2.5}$$

В работах [2;3] а затем [4;7;16] найден ряд предположений на асимптотики функций f, f_0, J и их производных, при выполнении которых решение принципа максимума однозначно (по $(\tilde{x}, \tilde{u})$) восстанавливается правилами

$$-\tilde{\psi}(0) = \lim_{T \to \infty} \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0); T) = \int\limits_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial x}\big(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)\big)\, A(\tilde{x}(0); t)\, dt, \quad \tilde{\lambda} = 1. \tag{2.6}$$

Другие представления этого условия смотрите, например, в [5; 6].

Мы исследуем применимость условий (2.2),(2.6) в предположении лишь ограниченности $\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial x}$. Кроме того, на основе условия (2.6) мы покажем необходимость еще одного условия: для всех $u \in U$ и почти всех $t \geq 0$

$$\liminf_{T \to \infty} \Big[H\big(\tilde{x}(t), -\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(t), t; \tilde{u}, T), \tilde{u}(t), 1, t\big) - H\big(\tilde{x}(t), -\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(t), t; \tilde{u}, T), u, 1, t\big) \Big] \geq 0. \tag{2.7}$$

Такое условие было предложено в [16] для поиска обгоняюще оптимального управления.

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть дан некоторый обгоняюще оптимальный для задачи* (1.1a)–(1.1c) *процесс* $(\tilde{x}, \tilde{u})$ *такой, что для любой ограниченной окрестности* Ξ *точки* $\tilde{x}(0)$*, для всех* $T > 0, \xi \in \Xi$ *градиенты* $\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi; T) = \dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, T)$ *равномерно ограничены.*

Тогда существует точное предельное решение $(\tilde{x}, \tilde{\psi}, 1)$ *принципа максимума Понтрягина* (2.1a)–(2.1c)*, для которого*

$$\tilde{\psi}(0) \in \partial l(\tilde{x}(0)) + N^{\mathcal{C}}(\tilde{x}(0)). \tag{3.1}$$

В частности, $-\tilde{\psi}(0)$ *является частичным пределом градиентов* $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, T)$ *при* $\xi \to \tilde{x}(0)$*,* $T \to \infty$.

Более того, при любом выборе неограниченно возрастающей последовательности моментов времени t_n *найдется удовлетворяющее* (3.1) *точное предельное решение* $(\tilde{x}, \tilde{\psi}, 1)$ *принципа максимума Понтрягина* (2.1a)–(2.1c)*, для которого* $-\tilde{\psi}(0)$ *является частичным пределом градиентов* $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, t_n)$ *при* $\xi \to \tilde{x}(0), n \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 *также существует конечный предел*

$$\lim_{\xi \to \tilde{x}(0), T \to \infty} \frac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, T). \tag{3.2}$$

Тогда несобственный интеграл в (2.6) *сходится, а система соотношений* (2.1a)–(2.1c), (2.6) *имеет в точности одно решение. Кроме того, это решение также удовлетворяет условию* (2.7).

Доказательство этих утверждений вынесено в следующий раздел.

Покажем, что в общем случае условие (3.2) в теореме 2 отбросить нельзя. Для этого приведем пример, в котором все отображения $x \mapsto \tilde{J}(x; T)$ являются 1-липшицевыми, в точке $\tilde{x}(0)$ их градиенты по x сходятся, т. е. существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(0), 0; \tilde{u}, T), \tag{3.3}$$

более того, условие (2.6) выделяет решение системы (2.1a)-(2.1b), но тем не менее это решение не удовлетворяет условию максимума гамильтониана (2.1c).

В работе [17] рассмотрена задача управления

$$\int_1^2 \frac{1}{2} \sin(2x)\, dt + \int_2^\infty \Big[\frac{x}{t} \cos(tx) - \frac{1}{t^2} \sin(tx)\Big]\, dt \to \min,$$
$$\dot{x} = u 1_{[0,1]}(t), \quad u \in [-1, 1],$$
$$x(0) = 0,$$

в которой любой допустимый процесс (x, u) является обгоняюще оптимальным (а также сильно оптимальным [10] и классическим оптимальным [18]), соответствующая любому управлению платежная функция 1-липшицева по x, таким образом для всякого произвольного допустимого процесса $(\tilde{x}, \tilde{u})$ все условия теоремы 1 выполнены.

При этом для обгоняюще оптимального процесса $(\tilde{x}, \tilde{u}) \equiv 0$ результат теоремы 2 не имеет места, а именно $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(0), 0; \tilde{u}, t) = 1$ при $t > 2$ (в частности, выполнено и (3.3)), однако решение $(\tilde{x}, \tilde{\psi}, 1)$ соотношений (2.1a)–(2.1c), удовлетворяющее начальному условию $\tilde{\psi}(0) = -1$, не удовлетворяет соотношению (2.1c) на промежутке $[0, 1]$.

Таким образом, как показывает построенный выше пример, в общем случае условие (3.2) в теореме 2 отбросить или хотя бы ослабить до (3.3) нельзя.

4. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Поскольку для всякой ограниченной компактной окрестности Ξ точки $\tilde{x}(0)$ отображения

$$\Xi \ni \xi \mapsto \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi;T), \quad \Xi \ni \xi \mapsto \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi;T) - \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);T) \quad \forall T > 0$$

равномерно (по $T > 0$) ограничены, то отображения $\Xi \ni \xi \mapsto \tilde{J}(\xi;T) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);T)(\forall T > 0)$ равностепенно непрерывны. Поскольку при $\xi = \tilde{x}(0)$ эти отображения обращаются в ноль, все они также равномерно ограничены на каждом компакте. Отсюда, семейство этих отображений на каждом компакте предкомпактно в равномерной метрике, т. е. семейство отображений $\{\mathbb{X} \ni \xi \mapsto \tilde{J}(\xi;T) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);T) \,|\, T > 0\}$ предкомпактно на $\mathbb{X}$ в компактно-открытой топологии.

Теперь выберем произвольную, неограниченно возрастающую последовательность положительных чисел t_n. Проредив ее при необходимости, можно считать, что отображения $\mathbb{X} \ni \xi \mapsto \tilde{J}(\xi;t_n) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);t_n)$ равномерно на каждом компакте сходятся к некоторому локально липшицевому отображению.

Заметим, что для всех $\xi \in \mathbb{X}, T \geq 0, t_k > T$ выполнено

$$\tilde{J}(\xi;T) = \tilde{J}(\xi,t_k) - J(\tilde{y}(\xi,T),T;\tilde{u},t_k). \tag{4.1}$$

Поскольку для всех $\xi \in \mathbb{X}, t \geq 0$ найдется такое $\xi_1 = y(\xi,t,\tilde{u};0) \in \mathbb{X}$, что $\xi = \tilde{y}(\xi_1,t)$, то имеем

$$\begin{aligned} J(\xi,t;\tilde{u},t_k) - J(\tilde{x}(t),t;\tilde{u},t_k) &= J(\xi_1,0;\tilde{u},t_k) - J(\xi_1,0;\tilde{u},t) - J(\tilde{x}(0),0;\tilde{u},t_k) + J(\tilde{x}(0),0;\tilde{u},t) \\ &= \tilde{J}(y(\xi,t,\tilde{u};0);t_k) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);t_k) - \big(\tilde{J}(y(\xi,t,\tilde{u};0);t) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);t)\big); \end{aligned}$$

тогда для любого положительного t в силу выбора последовательности моментов времени t_k существует предел

$$J_*(\xi,t) \ \stackrel{\triangle}{=}\ \lim_{k\to\infty} \big[J(\xi,t;\tilde{u},t_k) - J(\tilde{x}(t),t;\tilde{u},t_k)\big] \quad \forall \xi \in \mathbb{X}, \tag{4.2}$$

и, из ограниченности и локальной липшицевости отображения $\xi \mapsto y(\xi,t,\tilde{u};0)$ следует также, что этот предел равномерен на каждом компакте и является локально липшицевой функцией.

Кроме того, при любых $\xi \in \mathbb{X}, T > 0$ для всех достаточно больших t_k имеем равенство

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\xi;T) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);T) \ &\stackrel{(4.1)}{=}\ \tilde{J}(\xi;t_k) - J(\tilde{y}(\xi,T),T;\tilde{u},t_k) - \big(\tilde{J}(\tilde{x}(0);t_k) - J(\tilde{x}(T),T;\tilde{u},t_k)\big) \\ &= \ J_*(\xi,0) - J_*(\tilde{y}(\xi,T),T). \end{aligned}$$

Рассмотрим предельный субдифференциал $\partial_x J_*(\xi;0)$ отображений $\xi \mapsto J_*(\xi;0)$. Заметим, что, поскольку отображения $\xi \to \tilde{J}(\xi;T)$ непрерывно дифференцируемы, из [11, Proposition 1.107(ii)] в силу показанного выше имеем

$$\partial_x J_*(\xi,0) = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi;T) + \partial_\xi\big(J_*(\tilde{y}(\xi,T),T)\big) \quad \forall \xi \in \mathbb{X}, \quad T > 0.$$

Напомним также, что отображения $\mathbb{X} \ni \xi \to \tilde{y}(\xi;T)$ непрерывно дифференцируемы, а их производные $\dfrac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\xi;T) = A(\xi;T)$ являются сюрьективными операторами как решения линейной сопряженной системы (2.3) с условием $A(\xi;0) = 1_{\mathbb{L}}$. Отсюда, воспользовавшись цепным правилом [11, Proposition 1.112(i)], получаем

$$\partial_x J_*(\xi,0) = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi;T) + \partial_x J_*(\tilde{y}(\xi,T),T)A(\xi;T) \quad \forall \xi \in \mathbb{X}, \quad T > 0. \tag{4.3}$$

Вернемся к задаче оптимизации. Напомним, что $\tilde{u}$ — обгоняюще оптимальное решение, в частности

$$\liminf_{n\to\infty}\big[l(b)+J(b,0;u,t_n)-\tilde{J}(\tilde{x}(0);t_n)\big]\geq l(\tilde{x}(0))\quad \forall u\in\mathcal{U},\quad b\in\mathcal{C}.$$

Тогда это справедливо и для таких $u\in\mathcal{U}$, что $u|_{[t_n,\infty)}=\tilde{u}|_{[t_n,\infty)}$ при некотором $n\in\mathbb{N}$, откуда

$$\begin{aligned} l(\tilde{x}(0)) &\leq \liminf_{k\to\infty}\big[l(b)+J(b,0;u,t_n)+J(\tilde{y}(b;t_n),t_n;\tilde{u},t_k)-\tilde{J}(\tilde{x}(0);t_k)\big] \\ &= l(b)+J(b,0;u,t_n)-\tilde{J}(\tilde{x}(0);t_n)+J_*(\tilde{y}(b;t_n),t_n) \end{aligned}$$

при всех $u\in\mathcal{U}$, $b\in\mathcal{C}$, $n\in\mathbb{N}$. Таким образом, для всякого $n\in\mathbb{N}$ оптимальное значение задачи

$$l(x(0))+\int_0^{t_n}\big[f_0\big(t,x(t),u(t)\big)-f_0\big(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)\big)\big]dt+J_*(x(t_n),t_n)\to\min$$

$$\dot{x}=f(t,x,u),\quad u\in U,$$
$$x(0)\in\mathcal{C}$$

не меньше $l(\tilde{x}(0))$. Следовательно, процесс $(\tilde{x},\tilde{u})$ оптимален в такой задаче для всякого натурального n.

Теперь для всякого $n\in\mathbb{N}$ по [9, Theorem 5.2.1] найдутся такие $\psi_n\in C([0,\infty),\mathbb{X}^*)$, что каждая тройка $(\tilde{x},\psi_n,1)$ удовлетворяет почти всюду на $[0,t_n]$ принципу максимума Понтрягина (2.1a)–(2.1c) с краевыми условиями

$$\psi_n(0)\in\partial l(\tilde{x}(0))+N^{\mathcal{C}}(\tilde{x}(0)),\tag{4.4}$$

$$-\psi_n(t_n)\in\partial_x J_*(\tilde{x}(t_n),t_n).\tag{4.5}$$

В частности, ψ_n как решение сопряженного уравнения (2.1b) удовлетворяет формуле Коши (2.5); далее, последовательно применяя (2.5),(4.5),(4.3), имеем

$$\begin{aligned} -\psi_n(0) &\overset{(2.5)}{=} -\psi_n(t_n)A(\tilde{x}(0);t_n)+\frac{\partial\tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);t_n)\in\partial_x J_*(\tilde{x}(t_n),t_n)A(\tilde{x}(0);t_n)+\frac{\partial\tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);t_n) \\ &\overset{(4.3)}{=} \partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)-\frac{\partial\tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);t_n)+\frac{\partial\tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);t_n)=\partial_x J_*(\tilde{x}(0),0), \end{aligned}$$

т. е. $-\psi_n(0)\in\partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)$.

Поскольку J_* локально липшицево по x, нами показана ограниченность векторов $\psi_n(0)$. Теперь, переходя при необходимости от последовательности моментов времени t_n к их подпоследовательности, можно считать, что $\psi_n(0)$ сходятся. Отсюда по теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий, последовательность решений ψ_n сходится на $[0,\infty)$ к некоторому решению $\tilde{\psi}$ сопряженной системы (2.1b), причем сходится равномерно на всяком компактном промежутке времени. Но тогда и тройка $(\tilde{x},\tilde{\psi},1)$ удовлетворяет соотношениям (2.1a)–(2.1c) на всей полуоси $[0,\infty)$, более того, условие (3.1) для $\tilde{\psi}$ следует из (4.4), а из $-\psi_n(0)\in\partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)$ мы имеем $-\tilde{\psi}(0)\in\partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)$.

Осталось показать, что $(\tilde{x},\tilde{\psi},1)$ является точным предельным решением системы (2.1a)–(2.1b). Напомним, что $J_*(\xi;0)$ является равномерным в каждой компактной окрестности точки $\tilde{x}(0)$ пределом последовательности отображений $\xi\mapsto\tilde{J}(\xi;t_n)-\tilde{J}(\tilde{x}(0);t_n)$. Как показано в [19, Theorem 6.1(ii)], тогда каждый элемент субдифференциала Фреше $\hat{\partial}_x J_*(z,0)$ (для всех $z\in\mathbb{X}$) может быть представлен в виде предела градиентов $\dfrac{\partial\tilde{J}}{\partial x}(\xi_i;t_{n(i)})=\dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi_i,0;\tilde{u},t_{n(i)})$ для некоторых последовательностей $\xi_i\to z, n(i)\to\infty$. В силу определения предельного субдифференциала всякий элемент из $\partial_x J_*(z,0)$ (для всех $z\in\mathbb{X}$) также может быть представлен в виде предела элементов из $\hat{\partial}_x J_*(\xi_i,0)$ для некоторой сходящейся к z последовательности ξ_i, но тогда ко всякому элементу из $\partial_x J_*(z,0)$ сходятся градиенты $\dfrac{\partial \tilde J}{\partial x}(\xi_i;t_{n(i)}) = \dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi_i,0;\tilde u,t_{n(i)})$ для некоторых последовательностей $\xi_i \to z$, $n(i)\to\infty$. В силу $-\tilde\psi(0)\in\partial_x J_*(\tilde x(0),0)$ найдутся некоторая сходящаяся к $\tilde x(0)$ последовательность ξ_i и неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел $n(i)$, для которых $-\psi^*(0) = \lim_{i\to\infty}\dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi_i,0;t_{n(i)})$. Теперь осталось лишь заметить, что за счет общей константы Липшица у отображений $\Xi\ni\xi\mapsto\tilde J(\xi;t)$ в любой ограниченной области $\Xi\subset\mathbb{X}$ из $\|\xi_i-\tilde x(0)\|\to 0$ автоматически следует $|J(\xi_i,0;\tilde u,t_{n(i)}) - J(\tilde x(0),0;\tilde u,t_{n(i)})|\to 0$. Таким образом тройка $(\tilde x,\tilde\psi,1)$ является точным предельным решением максимума Понтрягина, что и требовалось. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Сходимость несобственного интеграла в (2.6) следует непосредственно из (2.4) и (3.2). По доказанной теореме 1 для всякой неограниченно возрастающей последовательности моментов времени t_n мы найдем решение $(\tilde x,\tilde\psi,1)$ принципа максимума (2.1a)–(2.1c), для которого $-\tilde\psi(0)$ является частичным пределом градиентов $\dfrac{\partial\tilde J}{\partial x}(\xi_n;t_n)$ для некоторой сходящейся к $\tilde x(0)$ последовательности векторов ξ_n. Тогда из (3.2) $-\tilde\psi(0)$ является пределом градиентов $\dfrac{\partial\tilde J}{\partial x}(\tilde x(0);t)$ при $t\to\infty$, в частности не зависит от выбора t_n. Теперь из (2.4) следует, что (2.6) выполнено для $(\tilde x,\tilde\psi,1)$. При этом равенство (2.1c) имеет место для всех неотрицательных t, кроме некоторого нулевого (возможно пустого) подмножества $N\subset[0,\infty)$. Зафиксируем это множество.

Покажем условие (2.7). Пусть оно не имеет места. Тогда для некоторого $\tau\in[0,\infty)\setminus N$, для некоторого $u\in P$ найдутся такие неограниченно возрастающая последовательность моментов времени t'_n и положительное число ε, что

$$H\Big(\tilde x(\tau),-\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde x(\tau),\tau;\tilde u,t'_n),\tilde u(\tau),1,\tau\Big)\le H\Big(\tilde x(\tau),-\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde x(\tau),\tau;\tilde u,t'_n),u,1,\tau\Big)-\varepsilon. \tag{4.6}$$

Вновь перейдя к подпоследовательности, можно также считать, что при $n\to\infty$ последовательность градиентов $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\tilde x(0),0;\tilde u,t'_n)$ сходится, а отображения $\xi\mapsto J(0,\xi;\tilde u,t'_n)$ сходятся равномерно на всяком компакте.

Теперь по теореме 1 уже для моментов времени $t_n=t'_n$ мы получаем ту же сопряженную переменную $\tilde\psi$, при этом $-\tilde\psi(0)\in\partial_x J_*(\tilde x(0),0)$ для заданного в (4.2) равномерного на всяком компакте предела J_*. В силу [19, Theorem 6.1(ii)] любой элемент субдифференциала $\partial_x J_*(\tilde x(0),0)$ является частичным пределом градиентов $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi_n,0;\tilde u,t'_n)$ для некоторых сходящихся к $\tilde x(0)$ векторов ξ_n. Отсюда, благодаря (3.2), множество $\partial_x J_*(\tilde x(0),0)$ — синглетон, но тогда синглетоном будет и $\partial_x J_*(\tilde x(\tau),\tau)$ в силу показанного в условиях теоремы 1 равенства (4.3).

Покажем теперь, что выполнено $\{-\tilde\psi(\tau)\} = \partial_x J_*(\tilde x(\tau),\tau)$. В силу невырожденности $A(\tilde x(0);\tau)$ для этого достаточно показать $-\tilde\psi(\tau)A(\tilde x(0);\tau)\in\partial_x J_*(\tilde x(\tau),t)A(\tilde x(0);\tau)$. Действительно, последовательно применяя (2.5), $-\tilde\psi(0)\in\partial_x J_*(\tilde x(0),0)$ и (4.3), имеем

$$-\tilde\psi(\tau)A(\tilde x(0);\tau)\overset{(2.5)}{=}-\tilde\psi(0)-\frac{\partial\tilde J}{\partial x}(\tilde x(0);\tau)\in\partial_x J_*(\tilde x(0),0)-\frac{\partial\tilde J}{\partial x}(\tilde x(0);\tau)\overset{(4.3)}{=}\partial_x J_*(\tilde x(\tau),\tau)A(\tilde x(0);\tau).$$

Теперь, вновь воспользовавшись [19, Theorem 6.1(ii)] для заведомо сходящейся последовательности градиентов $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\tilde x(\tau),\tau;\tilde u,t'_n)$, мы получаем, что они сходятся к некоторому элементу из $\partial_x J_*(\tilde x(\tau),\tau)$, т. е. к $-\tilde\psi(\tau)$. Переходя к пределу в (4.6), мы имеем для так выбранного момента времени $\tau\in[0,\infty)\setminus N$ неравенство

$$H\big(\tilde x(\tau),\tilde u(\tau),\tilde\psi(\tau),1,\tau\big)\le H\big(\tilde x(\tau),u,\tilde\psi(\tau),1,\tau\big)-\varepsilon,$$

что противоречит выполненному на $[0,\infty)\setminus N$ равенству (2.1c). Условие (2.7) показано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Halkin H.** Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. Vol. 42. P. 267–272. doi: 10.2307/1911976 .
2. **Aseev S.M., Kryazhimskii A.V.** The Pontryagin Maximum Principle and problems of optimal economic growth // Proc. Steklov Inst. Math. 2007. Vol. 257. P. 1–255. doi: 10.1134/2FS0081543807020010 .
3. **Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Besov K.** Infinite-horizon optimal control problems in economics // Russ. Math. Surv. 2012. Vol. 67. P. 195–253. doi:10.1070/RM2012v067n02ABEH004785 .
4. **Aseev S.M., Veliov V.** Needle variations in infinite-horizon optimal control // Variational and optimal control problems on unbounded domains / ed. by G. Wolansky, A.J. Zaslavski. Providence: AMS, 2014. P. 1–17.
5. **Khlopin D.V.** Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems // J. Dyn. Con. Sys. 2013. Vol. 19, no. 4. P. 519–552. doi: 10.1007/s10883-013-9192-5 .
6. **Khlopin D.V.** Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem // Optimization. 2015. Vol. 64, no. 11. P. 2417–2440. doi: 10.1080/02331934.2014.971413 .
7. **Tauchnitz N.** The pontryagin maximum principle for nonlinear optimal control problems with infinite horizon // J. Optim. Theory Appl. 2015. Vol. 167, no. 1. P. 27–48. doi: 10.1007/s10957-015-0723-y .
8. **Khlopin D**. On transversality condition for overtaking optimality in infinite horizon control problem [e-resource]. 2017. 9 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1704.03053v1.pdf .
9. **Clarke F.** Necessary conditions in dynamic optimization. Providence: AMS, 2005. 113 p.
10. **Carlson D.A.** Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite–horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64, no. 1. P. 55–69. doi: 10.1007/BF00940022 .
11. **Mordukhovich B.S.** Variational analysis and generalized differentiation I. Basic theory. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 579 p.
12. **Cannarsa P., Frankowska H.** Value function, relaxation, and transversality conditions in infinite horizon optimal control // J. Math. Anal. Appl. 2018. Vol. 457. P. 1188–1217. doi: 10.1016/j.jmaa.2017.02.009 .
13. **Khlopin D.V.** On Lipschitz continuity of value functions for infinite horizon problem // Pure Appl. Funct. Anal. 2017. Vol. 2, no. 3. P. 535–552.
14. **Sagara N.** Value functions and transversality conditions for infinite-horizon optimal control problems // Set-Valued Var. Anal. 2010. Vol. 18. P. 1–28. doi: 10.1007/2Fs11228-009-0132-1 .
15. **Aubin J., Clarke F.** Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 1979. Vol. 17. P. 567–586. doi: 10.1137/0317040 .
16. **Belyakov A.O.** Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited [e-resource]. 2017. 19 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1512.01206.pdf .
17. **Khlopin D.V.** On boundary conditions at infinity for infinite horizon control problem // IEEE Xplore. (Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics, dedicated to the memory of V.F. Demyanov, CNSA). 2017. P. 1–3. doi: 10.1109/CNSA.2017.7973969 .
18. **Bogusz, D.** On the existence of a classical optimal solution and of an almost strongly optimal solution for an infinite-horizon control problem // J. Optim. Theory Appl. 2013. Vol. 156. P. 650–682. doi: 10.1007/s10957-012-0126-2 .
19. **Ledyaev Y.S., Treiman J.S.** Sub-and supergradients of envelopes, semicontinuous closures, and limits of sequences of functions // Russ. Math. Surv. 2012. Vol. 67. P. 345–373. doi: 10.1070/RM2012v067n02ABEH004789 .

Хлопин Дмитрий Валерьевич
канд. физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Поступила 7.12.2017

REFERENCES

1. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. *Econometrica*, 1974, vol. 42, pp. 267–272. doi: 10.2307/1911976 .
2. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin Maximum Principle and problems of optimal economic growth. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2007, vol. 257, pp. 1–255. doi:10.1134/2FS0081543807020010 .
3. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Besov K. Infinite-horizon optimal control problems in economics. *Russ. Math. Surv.*, 2012, vol. 67, pp. 195–253. doi:10.1070/RM2012v067n02ABEH004785 .
4. Aseev S.M., Veliov V. Needle variations in infinite-horizon optimal control. *Variational and optimal control problems on unbounded domains*, eds. by G. Wolansky, A.J. Zaslavski. Providence: AMS, 2014, pp. 1–17.
5. Khlopin D.V. Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems. *J. Dyn. Con. Sys.*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 519–552. doi: 10.1007/s10883-013-9192-5 .
6. Khlopin D.V. Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem. *Optimization*, 2015, vol. 64, no. 11, pp. 2417–2440. doi:10.1080/02331934.2014.971413 .
7. Tauchnitz N. The pontryagin maximum principle for nonlinear optimal control problems with infinite horizon. *J. Optim. Theory Appl.*, 2015, vol. 167, no. 1, pp. 27–48. doi: 10.1007/s10957-015-0723-y .
8. Khlopin D. On transversality condition for overtaking optimality in infinite horizon control problem [e-resource], 2017, 9 p. Preprint available at https://arxiv.org/pdf/1704.03053v1 .
9. Clarke F. *Necessary conditions in dynamic optimization.* Providence: AMS, 2005, 113 p.
10. Carlson D.A. Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite–horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable. *J. Optim. Theory Appl.*, 1990, vol. 64, no. 1, pp. 55–69. doi: 10.1007/BF00940022 .
11. Mordukhovich B.S. *Variational analysis and generalized differentiation I. Basic theory.* Berlin: Springer-Verlag, 2006, 579 p.
12. Cannarsa P., Frankowska H. Value function, relaxation, and transversality conditions in infinite horizon optimal control. *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, vol. 457, pp. 1188–1217. doi:10.1016/j.jmaa.2017.02.009 .
13. Khlopin D.V. On Lipschitz continuity of value functions for infinite horizon problem. *Pure Appl. Funct. Anal.*, 2017, vol. 2, no. 3, pp. 535–552.
14. Sagara N. Value functions and transversality conditions for infinite-horizon optimal control problems. *Set-Valued Var. Anal.*, 2010, vol. 18, pp. 1–28. doi:10.1007/2Fs11228-009-0132-1 .
15. Aubin J., Clarke F. Shadow prices and duality for a class of optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 1979, vol. 17, pp. 567–586. doi:10.1137/0317040 .
16. Belyakov A.O. Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited. 2017. 19 p. Preprint available at https://arxiv.org/pdf/1512.01206.pdf .
17. Khlopin D.V. On boundary conditions at infinity for infinite horizon control problem. In: Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov)(CNSA), *IEEE Xplore*, 2017, pp. 1–3. doi: 10.1109/CNSA.2017.7973969 .
18. Bogusz D. On the existence of a classical optimal solution and of an almost strongly optimal solution for an infinite-horizon control problem. *J. Optim. Theory Appl.*, 2013, vol. 156, pp. 650–682. doi: 10.1007/s10957-012-0126-2 .
19. Ledyaev Y.S., Treiman J.S. Sub-and supergradients of envelopes, semicontinuous closures, and limits of sequences of functions. *Russ. Math. Surv.*, 2012, vol. 67, pp. 345–373. doi: 10.1070/RM2012v067n02ABEH004789 .

The paper was received by the Editorial Office on December 7, 2017.

Dmitrii Valer'evich Khlopin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: khlopin@imm.uran.ru .