ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ВЕКТОРНЫХ МЕР[1]

Е. С. Половинкин

В работе исследованы свойства параметризованной последовательности счетно аддитивных векторных мер, имеющих плотность, определенных на компактном пространстве с неотрицательной неатомарной мерой Радона и со значениями, принадлежащими сепарабельному банахову пространству. Каждая векторная мера из этой последовательности непрерывно зависит от параметра, принадлежащего некоторому метрическому пространству. Предполагается, что в метрическом пространстве параметров задано счетное локально конечное открытое покрытие и вписанное в него разбиение единицы. Доказано, что в компактном пространстве носителя векторных мер (с мерой Радона) при каждом значении параметра существует последовательность измеримых (относительно меры Радона на пространстве носителя векторных мер) подмножеств этого компактного пространства, которая образует разбиение этого пространства. При этом последовательность измеримых разбиений равномерно непрерывно зависит от параметра, и при каждом значении параметра и каждом значении индекса последовательности мер относительное значение меры соответствующего подмножества разбиения компактного пространства может быть равномерно приближено соответствующим значением функции разбиения единицы.

Ключевые слова: теорема Ляпунова, счетно аддитивная векторная мера, плотность векторной меры, разбиение единицы, непрерывное отображение.

E. S. Polovinkin. On some properties of vector measures.

We study the properties of a parameterized sequence of countably additive vector measures having a density, defined on a compact space with a nonnegative nonatomic Radon measure, and taking values in a separable Banach space. Each vector measure in this sequence depends continuously on a parameter belonging to some metric space. It is assumed that a countable locally finite open covering and a partition of unity inscribed in it are given in the metric space of the parameters. It is proved that, in the compact support space of the vector measures (with Radon measure), for each value of the parameter, there exists a sequence of measurable (with respect to the Radon measure on the support space of the vector measures) subsets of this compact space that forms a partition of this space. Moreover, the sequence of measurable partitions depends uniformly continuously on the parameter and, for each value of the parameter and for each value of the index of the sequence of measures, the relative value of the measure of the corresponding subset of the partition of the compact space can be approximated uniformly by the corresponding value of the partition function of unity.

Keywords: Lyapunov theorem, countably additive vector measure, density of a vector measure, partition of unity, continuous mapping.

MSC: 28B05, 46G10, 49J53, 49K99

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-175-188

Введение

Из знаменитой теоремы А. А. Ляпунова (см. [1;2; 3, гл. 8]) о векторных мерах, заданных на компактном топологическом пространстве $T=(T,\mathcal{T},\mu)$ с σ-алгеброй измеримых множеств $\mathcal{T}$ и конечной неотрицательной неатомарной мерой Радона μ, следует, что для всякой счетно аддитивной векторной меры $m:\mathcal{T}\to\mathbb{R}^n$ и любого числа $\alpha\in[0,1]$ существует множество $A_\alpha\in\mathcal{T}$ такое, что справедливо равенство $m(A_\alpha)=\alpha\, m(T)$.

Опираясь на это следствие, в нашей работе [4] мы доказали следующее утверждение (см. Lemma 3.1). *Пусть на действительной прямой выбран отрезок $T:=[t_0,t_1]$ с мерой Лебега μ и измеримыми по Лебегу множествами $\mathcal{T}$ на нем, и пусть задано семейство счетно аддитивных мер $m_s:\mathcal{T}\to\mathbb{R}^n$, непрерывно зависящих от параметра s, принадлежащего некоторому компактному метрическому пространству S, на котором задано произвольное (непрерывное) разбиение единицы $\{p_j(s)\}_{j=1}^J$. Тогда для любого числа $\delta>0$ найдется*

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00259а) .

набор непрерывно зависящих от $s \in S$ непересекающихся множеств $\{A_j(s)\}_{j=1}^J \subset \mathcal{T}$ таких, что $\bigcup_{j=1}^J A_j(s) = T$ (т. е. при каждом $s \in S$ множества $\{A_j(s)\}_{j=1}^J$ образуют измеримое разбиение пространства T), и при каждом $s \in S$ и $j \in \overline{(1,J)}$ справедливы оценки $\|m_s(A_j(s)) - p_j(s)\, m_s(T)\| < \delta$ *и* $\mu(A_j(s)) = p_j(s)\,\mu(T)$. Опираясь на данный результат, мы доказали существование непрерывного отображения из некоторого компактного функционального пространства параметров во множество решений дифференциального включения, что, в свою очередь, позволило в работе [5] получить необходимые условия оптимальности решения экстремальной задачи Майера, в которой одним из ограничений является дифференциальное включение с липшицевой правой частью.

В случае, когда вместо евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ берется сепарабельное банахово пространство E, а вместо отрезка $[t_0, t_1]$ — компактное топологическое пространство $T = (T, \mathcal{T}, \mu)$, из соответствующего обобщения теоремы А. А. Ляпунова (см. [6]) следует более слабое утверждение о том, что для любой счетно аддитивной векторной меры $m : \mathcal{T} \to E$, обладающей плотностью, и любых чисел $\alpha \in [0,1]$ и $\delta > 0$ существует множество $A_\alpha \in \mathcal{T}$ такое, что справедлива оценка в виде неравенства $\|m(A_\alpha) - \alpha\, m(T)\| < \delta$.

В задачах оптимального управления системами в банаховом пространстве возникает потребность для произвольных счетных наборов векторных мер $\{m_j\}_{j=1}^\infty$, $m_j : \mathcal{T} \to E$, обладающих плотностью, и чисел $\{\alpha_j\}_{j=1}^\infty$ таких, что $\alpha_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j = 1$, для любого числа $\delta > 0$ найти разбиение пространства T на непересекающиеся измеримые подмножества $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{T}$, для которых справедливы оценки $\|m_j(A_j) - \alpha_j\, m_j(T)\| < \delta$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

Особый интерес представляет случай, когда каждая из векторных мер m_j еще и непрерывно зависит от параметра s, принадлежащего некоторому метрическому пространству S, т. е. имеем меры вида $m_{j,s} : \mathcal{T} \to E$, а числа $\{\alpha_j\}$ зависят от параметра и соответствуют некоторому разбиению единицы $\{p_j(s)\}$ пространства параметров S. При этом для любого числа $\delta > 0$ требуется доказать существование непрерывного по параметру семейства $\{A_j(s)\}_{j=1}^\infty$ измеримых разбиений пространства T такого, что справедливы оценки $\|\sum_{j=1}^\infty m_{j,s}(A_j(s)) - \sum_{j=1}^\infty p_j(s)\, m_{j,s}(T)\| < \delta$. Данная проблема во многом решена в работе [7], что позволило авторам этой работы доказать теорему о релаксации для дифференциальных включений с липшицевой правой частью и со значениями из сепарабельного банахова пространства.

Данная статья посвящена развитию результатов указанных работ. Для счетного семейства векторных мер, обладающих плотностью, непрерывно зависящих от параметра, принадлежащего метрическому пространству, построено счетное семейство измеримых разбиений компактного носителя этого семейства мер, непрерывно параметризованного тем же параметром и дающего приближенное разложение выпуклой комбинации значений мер на единице с более точными равномерными оценками вида $\sum_{j=1}^\infty \|m_{j,s}(A_j(s)) - p_j(s)\, m_{j,s}(T)\| < \delta$.

1. Основные обозначения и определения

Мы в дальнейшем полагаем, что $(T, \mathcal{T}, \mu)$ — компактное топологическое пространство с σ-алгеброй измеримых подмножеств $\mathcal{T}$ и с конечной неотрицательной неатомарной мерой Радона μ на них. Также пусть E — сепарабельное банахово пространство. Пусть S — сепарабельное метрическое пространство параметров. Через I обозначаем числовой отрезок $I := [0,1]$.

Напомним, что функция $m : \mathcal{T} \to E$ называется *конечно аддитивной векторной мерой*, если для любых непересекающихся множеств $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ следует, что $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$. Если, дополнительно, для любой последовательности $\{A_n\}$ попарно не пересекающихся множеств из $\mathcal{T}$ имеет место равенство

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \sum_{n=1}^\infty m(A_n),$$

где правый ряд сходится по норме в пространстве E, тогда m называется *счетно аддитивной векторной мерой.*

Напомним, что семейство множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ называется *возрастающим*, если для любых $\alpha,\beta\in I=[0,1]$, $\alpha<\beta$, следует включение $A_\alpha\subset A_\beta$.

Важнейшим примером счетно аддитивных векторных мер является неопределенный интеграл Бохнера. Поясном это. Пусть $f:T\to E$ – интегрируемая по Бохнеру функция. Тогда функция $m_f:\mathcal{T}\to E$ вида

$$m_f(A):=\int\limits_A f(t)d\mu(t),\quad A\in\mathcal{T},$$

является счетно аддитивной и μ — непрерывной векторной мерой ограниченной вариации (см., например, [6]). В этом случае функцию $f(\cdot)\in L^1(T,E)$ называют *плотностью (или производной Радона — Никодима) векторной меры* m_f.

Отметим, что мы будем иметь дело лишь с такими счетно аддитивными векторными мерами, для которых существуют плотности. Совокупность всех таких счетно аддитивных векторных мер, обладающих плотностями, будем обозначать через $\mathcal{M}(T,E)$.

Для каждой векторной меры $m\in\mathcal{M}(T,E)$, обладающей плотностью $f(\cdot)\in L^1(T,E)$, определим *норму этой меры* через норму ее плотности, т. е.

$$\|m\|=\|f(\cdot)\|_{L^1}.$$

Поэтому если для каждого $s\in S$ определена векторная мера $m_s\in\mathcal{M}(T,E)$ с плотностью $f_s(\cdot)\in L^1(T,E)$, то отображение m_s из S в $\mathcal{M}(T,E)$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение f_s из S в $L^1(T,E)$ непрерывно.

В случае, когда имеется конечный набор векторных мер $m_1,\dots,m_n\in\mathcal{M}(T,E)$, определим *составную векторную меру* вида

$$\widetilde{m}:=(m_1,\dots,m_n)\in\mathcal{M}(T,E\times\dots\times E),$$

норму такой меры определим по формуле

$$\|\widetilde{m}\|:=\max\{\|m_1\|,\dots,\|m_n\|\}.$$

Напомним, что *характеристической функцией произвольного множества* $B\subset T$ называется функция вида $\chi_B(t):=1$, если $t\in B$, и $\chi_B(t):=0$, если $t\notin B$.

Для всякой векторной меры $m\in\mathcal{M}(T,E)$ *сужением меры* m *на некоторое множество* $B\in\mathcal{T}$ называется следующая мера:

$$m_{|B}(D):=m(D\cap B)\ \ \forall D\in\mathcal{T}.$$

Заметим, что если $f(\cdot)\in L^1(T,E)$ — плотность векторной меры m, то очевидно, что плотностью векторной меры $m_{|B}$ является функция $f(\cdot)\,\chi_B(\cdot)$.

Для измеримых подмножеств пространства T, точнее для классов эквивалентностей из $\mathcal{T}$, можно ввести метрику по формуле

$$\varrho(B,C):=\mu(B\triangle C)\ \ \forall B,C\in\mathcal{T},$$

где $B\triangle C$ означает симметрическую разность множеств B и C.

В смысле этой метрики будем говорить *о непрерывности отображений* вида $A:S\to\mathcal{T}$.

Предложение 1. *Пусть для каждого* $s\in S$ *заданы векторная мера* $m(s)\in\mathcal{M}(T,E)$ *и множество* $A(s)\in\mathcal{T}$, *а также определена векторная мера* $\hat{m}(s):=m(s)_{|A(s)}$. *Тогда если отображения* $m:S\to\mathcal{M}(T,E)$ *и* $A:S\to\mathcal{T}$ *непрерывны, то и отображение* $\hat{m}:S\to\mathcal{M}(T,E)$ *также непрерывно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(s)(\cdot)\in L^1(T,E)$ — плотность векторной меры $m(s)$ для любого $s\in S$. Выберем точку $s_0\in S$ и произвольное $\varepsilon>0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого $A\in\mathcal{T}$, у которого

$\mu(A) < \delta$, справедливо неравенство $\displaystyle\int_A \|f(s_0)(t)\| d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{3}$. В свою очередь, существует окрестность $U(s_0) \subset S$ точки s_0 такая, что в силу непрерывности мер $s \to m(s)$ и множеств $s \to A(s)$ справедливы неравенства $\|f(s)(\cdot) - f(s_0)(\cdot)\|_{L^1} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $\mu(A(s)\triangle A(s_0)) < \delta$ при всех $s \in U(s_0)$. В итоге имеем

$$\|\hat{m}(s) - \hat{m}(s_0)\| = \int\limits_T \|f(s)(t)\,\chi_{A(s)}(t) - f(s_0)(t)\,\chi_{A(s_0)}(t)\| d\mu(t)$$

$$\le 2\int\limits_T \|f(s)(t) - f(s_0)(t)\| d\mu(t) + \int\limits_{A(s)\triangle A(s_0)} \|f(s_0)(t)\| d\mu(t) < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство предложения. □

2. Некоторые следствия теоремы Ляпунова

Напомним формулировку теоремы А. А. Ляпунова о векторных мерах [1].

Теорема 1 (А. А. Ляпунов). *Пусть на компактном топологическом пространстве $(T, \mathcal{T}, \mu)$ с конечной неотрицательной неатомарной мерой Радона μ задана интегрируемая по Лебегу вектор-функция $f\colon T \to \mathbb{R}^n$. Определим векторную меру $m : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^n$ вида*

$$m(A) := \int\limits_A f(t)\,d\mu(t), \quad A \in \mathcal{T}.$$

Тогда множество

$$m(\mathcal{T}) := \{m(A) \mid A \in \mathcal{T}\},$$

т. е. совокупность всех векторов $m(A)$, отвечающих всевозможным измеримым подмножествам A из T, есть выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что для произвольного измеримого множества $D_0 \subset T$ меры ноль (например, пустого множества) получаем, что $m(D_0) = 0 \in m(\mathcal{T})$. Аналогично $m(T) \in m(\mathcal{T})$. Поэтому в силу теоремы А. А. Ляпунова получаем, что отрезок $[0, m(T)]$ принадлежит выпуклому компакту $m(\mathcal{T})$, соответственно для любого числа $\alpha \in [0,1]$ точка $\alpha \cdot m(T)$ также принадлежит этому компакту $m(\mathcal{T})$. В результате получили

Следствие 1. *Пусть вектор-функция $f\colon T \to \mathbb{R}^n$ интегрируема по Лебегу. Тогда для любого числа $\alpha \in [0,1]$ существует измеримое множество $A_\alpha \subset T$ такое, что $m(A_\alpha) = \alpha \cdot m(T)$,* т. е.

$$\alpha \int\limits_T f(t)\,d\mu(t) = \int\limits_{A_\alpha} f(t)\,d\mu(t).$$

Заметим, что для произвольных счетно аддитивных неатомарных векторных мер со значениями в бесконечномерном пространстве (и не обладающих плотностью) прямое распространение теоремы Ляпунова невозможно.

Для векторной меры, обладающей плотностью, со значениями в сепарабельном банаховом пространстве E известно обобщение теоремы Ляпунова (см. [6]), из которого следует, что в этом случае лишь замыкание совокупности всех векторов $m(D)$, отвечающих всевозможным измеримым подмножествам D из T, является выпуклым компактом в E.

Поэтому из обобщенной теоремы Ляпунова аналогично следствию 1 получаем лишь неравенство, т. е.

Следствие 2. *Пусть функция $f\colon T \to E$ интегрируема по Бохнеру. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in [0,1]$ существует измеримое множество $A_\alpha \subset T$ такое, что*

$$\left\|\alpha \int\limits_T f(t)\,d\mu(t) - \int\limits_{A_\alpha} f(t)\,d\mu(t)\right\| < \varepsilon.$$

Объединяя следствия 1 и 2, получаем

Следствие 3. *Пусть функции $f\colon T \to E$ и $g\colon T \to \mathbb{R}^p$ интегрируемы по Бохнеру и по Лебегу соответственно. Определим векторные меры $m : \mathcal{T} \to E$ и $m_0 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^p$ вида*

$$m(A) := \int\limits_A f(t)d\mu(t); \quad m_0(A) := \int\limits_A g(t)d\mu(t) \quad \forall A \in \mathcal{T}. \tag{2.1}$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in [0,1]$ существует множество $A_\alpha \in \mathcal{T}$ такое, что $\|m(A_\alpha) - \alpha \cdot m(T)\| < \varepsilon$ и $m_0(A_\alpha) = \alpha \cdot m_0(T)$, т.е.

$$\left\|\alpha \int\limits_T f(t)\, d\mu(t) - \int\limits_{A_\alpha} f(t)\, d\mu(t)\right\| < \varepsilon, \tag{2.2}$$

$$\alpha \int\limits_T g(t)\, d\mu(t) = \int\limits_{A_\alpha} g(t)\, d\mu(t). \tag{2.3}$$

Отметим, что в следствии 3 ничего не говорится о взаимосвязи полученных в нем измеримых множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и, кроме того, что для них выполнены соотношения (2.2) и (2.3). Нам хотелось бы, чтобы это семейство множеств было еще и возрастающим.

3. Сегменты и ε-сегменты

Определение 1 [8]. Пусть заданы функция $f \in L^1(T, E)$ и соответствующая ей векторная мера $m : \mathcal{T} \to E$ с плотностью f. Возрастающее семейство множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathcal{T}$, у которого $A_0 = \varnothing$ и $A_1 = T$, называется

1) сегментом для меры m тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha \in I = [0,1]$ справедливо равенство

$$m(A_\alpha) = \alpha \cdot m(T);$$

2) ε-сегментом для меры m тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha \in I$ справедливо неравенство

$$\|m(A_\alpha) - \alpha \cdot m(T)\| < \varepsilon.$$

В работе [9] доказана следующая теорема, которой мы будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема 2 [9, теорема 15]. *Пусть заданы функции $f \in L^1(T, E)$ и $g \in L^1(T, \mathbb{R}^p)$, а также соответствующие им векторные меры $m : \mathcal{T} \to E$ и $m_0 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^p$ (см. формулы (2.1)). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует семейство $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathcal{T}$, которое одновременно является ε-сегментом для векторной меры m и сегментом для векторной меры m_0.*

В дальнейшем нам также потребуются три леммы, которые либо доказаны в работе [9], либо являются небольшой модификацией утверждений из [9]. Для самодостаточности изложения и по согласованию с редакцией мы приводим доказательство ключевых вспомогательных утверждений.

Лемма 1 [8; 9, предложение 18]. *Пусть S — компактное хаусдорфово топологическое пространство, и пусть задано множество векторных мер $\{m_s\}_{s\in S} \subset \mathcal{M}(T, E)$ (т. е. имеющих плотности), которые непрерывно зависят от параметра $s \in S$. Пусть еще задана конечномерная векторная мера $m_0 \in \mathcal{M}(T, \mathbb{R}^p)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует семейство множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathcal{T}$, которое является сегментом для меры m_0 и ε-сегментом для каждой из векторных мер m_s при $s \in S$.*

Отметим, что для одной и той же векторной меры $m \in \mathcal{M}(T, E)$ можно построить несколько различных ε-сегментов в $\mathcal{T}$. В дальнейшем нам потребуется находить пути непрерывного перехода от одного ε-сегмента такой меры к другому. Небольшое усиление предложения 2 из [7] (или предложения 19 из [9]) (в п. 3)) приводит к следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть задана векторная мера* $m \in \mathcal{M}(T,E)$ (*т. е. обладающая плотностью*). *Пусть* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *и* $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — *два семейства из* $\mathcal{T}$, *каждое из которых является* ε-*сегментом для меры* m *и сегментом для меры* μ. *Тогда существует непрерывное отображение* $D\colon I\times I\to\mathcal{T}$, *обладающее следующими свойствами*:

1) $D(0,\alpha)=A_\alpha$ *и* $D(1,\alpha)=B_\alpha$ *для любого* $\alpha\in I$;

2) *для каждого* $z\in I$ *семейство* $\{D(z,\alpha)\}_{\alpha\in I}$ *является* $\varepsilon-$ *сегментом как для меры* m, *так и для меры* μ;

3) $\mu(D(z_1,\alpha_1)\triangle D(z_2,\alpha_2))\le(|z_1-z_2|+2|\alpha_1-\alpha_2|)\mu(T)$, $\alpha_1,\alpha_2,z_1,z_2\in I$.

Доказательство. Так как семейства $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ являются сегментами для меры μ, то отображения $\alpha\to\chi_{A_\alpha}(\cdot)$ и $\alpha\to\chi_{B_\alpha}(\cdot)$ из I в $L^1(T,\mathbb{R}^1)$ непрерывны. Поэтому и отображения $\alpha\to m(A_\alpha)$ и $\alpha\to m(B_\alpha)$ также непрерывны. Следовательно, если определить величину

$$a:=\max\{\max_{\alpha\in I}\|m(A_\alpha)-\alpha\,m(T)\|\,;\,\max_{\alpha\in I}\|m(B_\alpha)-\alpha\,m(T)\|\},$$

то получим, что $a<\varepsilon$. Возьмем число $\eta>0$ такое, что $a+2\eta<\varepsilon$.

Определим при каждом $\alpha\in I$ векторную меру вида

$$m_\alpha:=(m_{|A_\alpha},m_{|B_\alpha},\mu_{|A_\alpha},\mu_{|B_\alpha})\in\mathcal{M}(T,E\times E\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1). \tag{3.1}$$

В силу предложения 1 отображение $\alpha\to m_\alpha$ непрерывно. Для выбранного числа η по лемме 1 существует семейство $\{C_z\}_{z\in I}$, которое является η-сегментом для каждой меры из семейства $\{m_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и сегментом для меры μ. Определим множества

$$D(z,\alpha):=(B_\alpha\cap C_z)\cup(A_\alpha\cap(T\setminus C_z)). \tag{3.2}$$

Покажем, что это искомое множество. По построению из (3.2) следует, что свойство 1) выполнено. По определению η-сегмента для семейства $\{C_z\}_{z\in I}$ имеем

$$\|m_\alpha(C_z)-z\,m_\alpha(T)\|<\eta \tag{3.3}$$

и поэтому

$$\|m_\alpha(T\setminus C_z)-(1-z)\,m_\alpha(T)\|<\eta. \tag{3.4}$$

Из неравенства (3.3), в частности, следует для второго компонента в (3.1)

$$\|m(B_\alpha\cap C_z)-z\,m(B_\alpha)\|<\eta.$$

Так как семейство $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ является ε-сегментом для меры m, то

$$\|m(B_\alpha\cap C_z)-z\,\alpha\,m(T)\|\le\|m(B_\alpha\cap C_z)-z\,m(B_\alpha)\|$$
$$+\|z\,m(B_\alpha)-z\,\alpha\,m(T)\|<\eta+z\,a. \tag{3.5}$$

Аналогично из (3.4) для первого компонента в (3.1) получаем

$$\|m((T\setminus C_z)\cap A_\alpha)-(1-z)\,\alpha\,m(T)\|<\eta+(1-z)\,a. \tag{3.6}$$

Суммируя неравенства (3.5) и (3.6), получаем для любого $\alpha\in I$

$$\|m(D(z,\alpha))-\alpha\,m(T)\|\le2\,\eta+a<\varepsilon.$$

Аналогично из неравенств (3.3) и (3.4) для последних двух компонентов в (3.1) имеем

$$|\mu(D(z,\alpha))-\alpha\,\mu(T)|<\varepsilon.$$

Для доказательства непрерывности отображения $D : I \times I \to \mathcal{T}$, точнее свойства 3), отметим равенство

$$D(z,\alpha)\triangle D(y,\alpha) = (A_\alpha \triangle B_\alpha) \cap (C_z \triangle C_y).$$

Так как семейство $\{C_z\}_{z\in I}$ является сегментом для меры μ, то, например, при $z_1 > z_2$ имеем $C_{z_1} \supset C_{z_2}$, откуда $C_{z_1}\triangle C_{z_2} = C_{z_1} \setminus C_{z_2}$. В результате имеем

$$\mu(D(z_1,\alpha)\triangle D(z_2,\alpha)) \le \mu(C_{z_1}\triangle C_{z_2}) \le |z_1 - z_2|\,\mu(T).$$

С другой стороны, из формулы (3.2) следует

$$\mu(D(z,\alpha_1)\triangle D(z,\alpha_2)) = \int\limits_T \big|\chi_{D(z,\alpha_1)}(t) - \chi_{D(z,\alpha_2)}(t)\big| d\mu(t)$$

$$= \int\limits_T \big|\chi_{B_{\alpha_1}\cap C_z}(t) + \chi_{A_{\alpha_1}\cap(T\setminus C_z)}(t) - \chi_{B_{\alpha_2}\cap C_z}(t) - \chi_{A_{\alpha_2}\cap(T\setminus C_z)}(t)\big| d\mu(t)$$

$$\le \int\limits_T \big|\chi_{B_{\alpha_1}}(t) - \chi_{B_{\alpha_2}}(t)\big| \cdot \chi_{C_z}(t) d\mu(t) + \int\limits_T \big|\chi_{A_{\alpha_1}}(t) - \chi_{A_{\alpha_2}}(t)\big| \cdot \chi_{T\setminus C_z}(t) d\mu(t)$$

$$\le \mu(A_{\alpha_1}\triangle A_{\alpha_2}) + \mu(B_{\alpha_1}\triangle B_{\alpha_2}) \le 2|\alpha_1 - \alpha_2|\,\mu(T).$$

Сложив последние неравенства, получаем свойство 3). □

Лемма 3 [9, теорема 17]. *Пусть* $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ *— произвольная последовательность векторных мер с плотностями, т. е.* $\{m_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}(T,E)$, *и пусть мера* $m_0 = \mu$. *Определим векторные меры вида*

$$\widetilde{m}_j := (m_0, m_1, \ldots, m_j) : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^1 \times E \times \cdots \times E \quad \forall j = 0,1,2,\ldots.$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ *существует непрерывное отображение* $D : [0,\infty) \times I \to \mathcal{T}$, *обладающее следующими свойствами*:

1) *для каждого* $z \in [0,\infty)$ *семейство множеств* $\{D(z,\alpha)\}_{\alpha\in I}$ *является* ε*-сегментом для меры* $\widetilde{m}_j$ при $j = [z]$;

2) $\mu(D(z_1,\alpha_1)\triangle D(z_2,\alpha_2)) \le (|z_1 - z_2| + 2|\alpha_1 - \alpha_2|)\,\mu(T)$ $\forall \alpha_1,\alpha_2 \in I,\ z_1,z_2 \in [0,\infty)$.

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. По теореме 2 для каждого $j = 0,1,2,\ldots$ существует семейство множеств $\{D(j,\alpha)\}_{\alpha\in I}$, которое является ε-сегментом для векторной меры $\widetilde{m}_j$ и сегментом для меры μ. Чтобы расширить это семейство до значений $\{D(z,\alpha)\}_{\alpha\in I}$, определенных при всех $z \in [0,\infty)$, при каждом $j = 0,1,2,\ldots$ применим к паре семейств $\{D(j,\alpha)\}_{\alpha\in I}$ и $\{D(j+1,\alpha)\}_{\alpha\in I}$, являющихся ε-сегментами для векторной меры $\widetilde{m}_j$ и сегментами для меры μ, лемму 2, по которой существует непрерывное отображение $C_j : I \times I \to \mathcal{T}$, соединяющее эту пару семейств. Тогда для всех $z \in [j, j+1)$ определим отображение $D(z,\alpha) := C_j(z - [z], \alpha)$, которое очевидно удовлетворяет свойствам 1) и 2). □

4. Покрытия и разбиения

Далее будем полагать, что $S = (S,d)$ — сепарабельное метрическое пространство с метрикой d. *Открытым покрытием метрического пространства* (S,d) назовем некоторую совокупность непустых открытых множеств $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset S$ таких, что $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = S$ и для любого $\lambda \in \Lambda$ выполнено $V_\lambda \ne S$.

Открытое покрытие $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ сепарабельного метрического пространства (S,d) назовем *локально конечным*, если для любой точки $s_0 \in S$ существует ее окрестность $U(s_0)$ такая, что $V_n \cap U(s_0) \ne \varnothing$ лишь для конечного набора индексов $n \in \mathbb{N}$.

Нам потребуется следующее свойство открытых покрытий.

Лемма 4. *Пусть $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset S$ локально конечное покрытие метрического пространства (S,d). Тогда существует локально конечное покрытие $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ пространства (S,d) такое, что при любом $\lambda \in \Lambda$ выполнено включение $\overline{W}_\lambda \subset V_\lambda$ (где $\overline{W}_\lambda$ — замыкание множества W_λ).*

Доказательство. Для любого $s \in S$ определим множество индексов $\Lambda_s := \{\lambda \in \Lambda \mid s \in V_\lambda\}$. Так как покрытие $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ локально конечное, то каждое множество Λ_s конечно и непусто. Для любого $\lambda \in \Lambda$ определим множество

$$S_\lambda := \{s \in V_\lambda \mid d(s, S\setminus V_\lambda) = \max_{\nu\in\Lambda_s} d(s, S\setminus V_\nu)\}.$$

Таким образом, каждой точке $s \in S$ сопоставили те множества V_λ, в которых она содержится с наибольшим шаром. В результате получили, что для любого $s \in S$ найдется индекс $\lambda \in \Lambda$ такой, что $s \in S_\lambda$, а также $S_\lambda \subset V_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$.

Зафиксируем произвольное $\lambda_0 \in \Lambda$. Рассмотрим произвольную точку $s_1 \in S\setminus V_{\lambda_0}$. По определению покрытия существует индекс $\lambda_1 \in \Lambda$ такой, что $s_1 \in V_{\lambda_1}$. Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_{3\varepsilon}(s_1) \subset V_{\lambda_1}$. Покажем, что $B_\varepsilon(s_1) \cap S_{\lambda_0} = \varnothing$. Если это не так, то существует точка $s_2 \in B_\varepsilon(s_1) \cap S_{\lambda_0}$. Тогда получаем, что $B_{2\varepsilon}(s_2) \subset B_{3\varepsilon}(s_1) \subset V_{\lambda_1}$. Следовательно, $\lambda_1 \in \Lambda_{s_2}$ и справедливы неравенства

$$d(s_2, S\setminus V_{\lambda_0}) \le d(s_2, s_1) \le \varepsilon < 2\varepsilon \le d(s_2, S\setminus V_{\lambda_1}),$$

т. е. $s_2 \notin S_{\lambda_0}$, противоречие. Итак, показали, что любая точка $s_1 \in S\setminus V_{\lambda_0}$ имеет окрестность, не пересекающуюся с S_{λ_0}. Следовательно, справедливо следующее включение:

$$\overline{S_{\lambda_0}} \subset V_{\lambda_0}.$$

Рассмотрим замкнутые множества $\overline{S_{\lambda_0}}$ и $\overline{U}_{\lambda_0} := S\setminus V_{\lambda_0}$. Как только что показали, они не пересекаются. В силу того что всякое метрическое пространство является нормальным пространством, существуют непересекающиеся окрестности $U(\overline{S_{\lambda_0}})$ и $U(\overline{U}_{\lambda_0})$ этих множеств $\overline{S_{\lambda_0}}$ и $\overline{U}_{\lambda_0}$. Обозначим $W_{\lambda_0} := U(\overline{S_{\lambda_0}})$. Тогда по построению $W_{\lambda_0} \subset S\setminus U(\overline{U}_{\lambda_0}) \subset V_{\lambda_0}$, причем множество $S\setminus U(\overline{U}_{\lambda_0})$ замкнуто. Следовательно, W_{λ_0} – открытое подмножество V_{λ_0}, принадлежащее ему вместе со своим замыканием.

Поскольку для любого $s \in S$ существует $\lambda \in \Lambda$ такое, что $s \in S_\lambda \subset W_\lambda$, то таким образом мы построили искомое покрытие $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ пространства S. □

Семейство непрерывных функций $p_n : S \to I$ (где $I := [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$) называется *разбиением единицы, подчиненным локально конечному открытому покрытию* $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ пространства S, если для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо включение $\operatorname{supp} p_n \subset V_n$ и для любой точки $s \in S$ справедливо равенство $\sum_{n=1}^\infty p_n(s) = 1$, причем в силу локальной конечности покрытия $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ лишь конечное число слагаемых в данной сумме отлично от нуля. (Напомним, что $\operatorname{supp} f := \overline{\{s \in S \mid f(s) > 0\}}$.)

Измеримым разбиением пространства T называется совокупность измеримых подмножеств $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{T}$ таких, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $\forall i \ne j$ и $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = T$.

Если $\{A_n(s)\}_{n=1}^\infty$ — измеримое разбиение пространства T, зависящее от параметра $s \in S$, и если отображения $A_n : S \to \mathcal{T}$ непрерывны при любом $n \in \mathbb{N}$, то говорят, что $\{A_n(s)\}_{n=1}^\infty$ — *непрерывное семейство измеримых разбиений пространства* T.

Семейство измеримых разбиений $\{A_n(s)\}_{n=1}^\infty$ пространства T называется *конечным*, если при любом $s_0 \in S$ измеримое разбиение $\{A_n(s_0)\}_{n=1}^\infty$ является конечным, т. е. $\mu(A_n(s_0)) > 0$ лишь для конечного набора индексов $n \in \mathbb{N}$, а для остальных индексов $A_n(s_0) = \varnothing$.

В работе [9] доказана следующая замечательная теорема.

Теорема 3 [9, теорема 18]. *Рассмотрим локально конечное открытое покрытие $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ метрического пространства S, и пусть $\{p_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty$ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Пусть для каждого $s \in S$ задана последовательность векторных мер $\{m_{n,s}\}_{n=1}^\infty$ с плотностями, т. е. $\{m_{n,s}\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}(T,E)$, причем при каждом $n \in \mathbb{N}$ отображение $m_{n,\cdot}$:*

$S \to E$ непрерывно. Тогда для любого $\delta > 0$ существует конечное и непрерывное семейство $\{A_n(s)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}$ измеримых разбиений пространства T такое, что для любого значения $s \in S$ справедливы неравенства

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} m_{n,s}(A_n(s)) - \sum_{n=1}^{\infty} p_n(s) \cdot m_{n,s}(T) \Big\| < \delta,$$

$$|\mu(A_n(s)) - p_n(s)\mu(T)| < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Наша цель — привести важное для приложений обобщение указанной теоремы.

5. Основной результат

Теорема 4. *Рассмотрим локально конечное открытое покрытие $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства S, и пусть $\{p_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Пусть для каждого $s \in S$ задана последовательность векторных мер $\{m_{n,s}\}_{n=1}^{\infty}$ с плотностями, т. е. $\{m_{n,s}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(T, E)$, причем при каждом $n \in \mathbb{N}$ отображение $m_{n,\cdot} : S \to E$ непрерывно. Тогда для любого $\delta > 0$ существует конечное и непрерывное семейство $\{A_n(s)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}$ измеримых разбиений пространства T такое, что*

1) *при любых значениях $s \in S$ и $n \in \mathbb{N}$, для которых $\mu(A_n(s)) > 0$, следует, что и $p_n(s) > 0$;*

2) *для любого значения $s \in S$ справедливы соотношения*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|m_{n,s}(A_n(s)) - p_n(s) m_{n,s}(T)\| < \delta, \tag{5.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n(s)) - p_n(s)\mu(T)| < \delta, \tag{5.2}$$

$$\lim_{s' \to s} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n(s') \triangle A_n(s)) = 0. \tag{5.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f_n(s)(\cdot) \in L^1(T, E)$ — соответствующие плотности векторных мер $m_{n,s} : \mathcal{T} \to E$. По условию теоремы при каждом $n \in \mathbb{N}$ отображения $f_n : S \to L^1(T, E)$ непрерывны. Для каждого $s \in S$ обозначим

$$N_s := \{n \in \mathbb{N} \mid p_n(s) > 0\}.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим непрерывные функции $h_n : S \to I$ такие, что $h_n(s) \equiv 1$ при $s \in \operatorname{supp} p_n$ и $\operatorname{supp} h_n \subset V_n$. Определим функцию $r(s) := \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s)$. В силу локальной конечности покрытия $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства S для любого $s \in S$ мощность множества N_s (которую обозначаем $\operatorname{card}\{N_s\}$) конечна, точнее, $\operatorname{card}\{N_s\} \le r(s) < \infty$.

Определим функции $\widetilde{f_n} : S \to L^1(T, \mathbb{R}^1 \times E)$ вида $\widetilde{f_n}(s)(\cdot) := (1, f_n(s)(\cdot))$.

Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $s \in S$ определим функцию $k_n(s) : T \to L^1(T, \mathbb{R}^1 \times E)$ вида

$$k_n(s)(t) := r(s) \cdot h_n(s) \cdot \widetilde{f_n}(s)(t), \quad t \in T. \tag{5.4}$$

Очевидно, что при всех $s \in S$ имеем $r(s) \ge 1$, также отображения $r : S \to \mathbb{R}^1$ и $k_n : S \to L^1(T, \mathbb{R}^1 \times E)$ очевидно непрерывны. Для произвольного $s_0 \in S$ определим множество

$$U_{s_0} := \bigcap_{n \in N_{s_0}} \Big\{ s \in S \big| p_n(s) > 0, \|f_n(s) - f_n(s_0)\|_{L^1} < \frac{\delta}{16 r(s_0)}, 3r(s) < 4r(s_0) \Big\}. \tag{5.5}$$

Очевидно, что семейство множеств $\{U_s\}_{s\in S}$ является открытым покрытием метрического пространства S. В силу паракомпактности пространства S и в силу леммы 4 существует последовательность непрерывных функций $r_i : S \to I$ такая, что семейство множеств $\{\operatorname{int}\operatorname{supp} r_i\}_{i=1}^{\infty}$ является локально конечным подпокрытием покрытия $\{U_s\}_{s\in S}$, причем множества

$$\overline{W}_i := \{s \in S \mid r_i(s) = 1\}$$

все еще покрывают пространство S. Поэтому существуют точки $s_i \in S$ такие, что $\overline{W}_i \subset U_{s_i}$ при $\forall i \in \mathbb{N}$. Определим функции $u_j \in L^1(T, \mathbb{R}^1 \times E)$, $j \in \mathbb{N}$, по формуле

$$u_j(t) := \begin{cases} k_n(s_i)(t), & \text{если } j = 2^i 3^n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5.6}$$

Через эти функции (как плотности) определим векторные меры $m_j(A) := \int_A u_j(t)d\mu(t)$ при всех $j \in \mathbb{N}$, и пусть $m_0(A) = \mu(A)$ при $A \in \mathcal{T}$. Определим также векторные меры вида

$$\widetilde{m}_j := (m_0, m_1, \ldots, m_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots .$$

По лемме 3 для полученной последовательности векторных мер $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ существует непрерывное отображение $D : [0, \infty) \times I \to \mathcal{T}$, обладающее следующими свойствами:

1) Для каждого $z \in [0, \infty)$ семейство множеств $\{D(z, \alpha)\}_{\alpha\in I}$ является $\dfrac{\delta}{4}$-сегментом для меры $\widetilde{m}_j$ при $j = [z]$;

2) $\mu(D(z_1, \alpha_1) \triangle D(z_2, \alpha_2)) \le (|z_1 - z_2| + 2|\alpha_1 - \alpha_2|)\, \mu(T), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in I,\ z_1, z_2 \in [0, \infty)$.

Определим функцию $\tau : S \to \mathbb{R}^1_+$ вида

$$\tau(s) := \sum_{n,\, i=1}^{\infty} r_i(s)\, h_n(s)\, 2^i\, 3^n. \tag{5.7}$$

В силу локальной конечности покрытий $\{\operatorname{supp} r_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства S для любого $s \in S$ сумма в формуле (5.7) конечна и функция $\tau : S \to \mathbb{R}^1_+$ непрерывна.

Определим семейство измеримых множеств из T вида

$$A(s, \alpha) := D(\tau(s), \alpha), \quad s \in S, \quad \alpha \in I. \tag{5.8}$$

По доказанному и из формулы (5.8) получаем, что отображение $A : S \times I \to \mathcal{T}$ непрерывно, и для каждого $s \in S$ семейство $\{A(s, \alpha)\}_{\alpha\in I}$ является $\dfrac{\delta}{4}$-сегментом для векторной меры $\widetilde{m}_j$, у которой $j = [\tau(s)]$, и для любых $s_1, s_2 \in S$, $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ справедлива оценка

$$\mu(A(s_1, \alpha_1) \triangle A(s_2, \alpha_2)) \le (|\tau(s_1) - \tau(s_2)| + 2|\alpha_1 - \alpha_2|)\, \mu(T).$$

Зафиксируем точку $s \in S$. Чтобы оценить $\tau(s)$ и найти значения $j \le [\tau(s)]$, сделаем следующее. Выберем номер $n \in N_s$, т. е. такой, что $h_n(s) = 1$, и номер $m \in \mathbb{N}$ такой, что выбранная точка s принадлежит множеству $\overline{W}_m \subset U_{s_m}$. Отсюда $r_m(s) = 1$, и по определению множества U_{s_m} (см. (5.5)) имеем $n \in N_{s_m}$, т. е. $p_n(s_m) > 0$, следовательно, $h_n(s_m) = 1$. Поэтому и из формулы (5.7) получаем, что $\tau(s) \ge r_m(s)\, h_n(s)\, 2^m\, 3^n = 2^m\, 3^n$. Таким образом, выбирая $j = 2^m\, 3^n$, получаем неравенство $j \le [\tau(s)]$, в силу чего семейство $\{A(s, \alpha)\}_{\alpha\in I}$ является $\dfrac{\delta}{4}$-сегментом для векторной меры $\widetilde{m}_j$. В частности, оно является $\dfrac{\delta}{4}$-сегментом для векторной меры m_j при $j = 2^m\, 3^n$. Последнее в силу формул (5.4) и (5.6) означает, что плотностью меры m_j является функция

$u_j(\cdot) = k_n(s_m)(\cdot) = r(s_m)\,\widetilde{f_n}(s_m)(\cdot)$, поэтому, деля соответствующее неравенство на $r(s_m) > 0$, получаем (покоординатно) два неравенства

$$|\mu(A(s,\alpha)) - \alpha\,\mu(T)| < \frac{\delta}{4r(s_m)} \quad \forall \alpha \in I, \tag{5.9}$$

и

$$\Big\| \int\limits_{A(s,\alpha)} f_n(s_m)(t)d\mu(t) - \alpha \int\limits_T f_n(s_m)(t)d\mu(t) \Big\| < \frac{\delta}{4r(s_m)} \quad \forall \alpha \in I. \tag{5.10}$$

В свою очередь, для выбранной точки $s \in S$ оценим выражение вида

$$\Big\| \int\limits_{A(s,\alpha)} f_n(s)(t)d\mu(t) - \alpha \int\limits_T f_n(s)(t)d\mu(t) \Big\|$$

$$\leq \Big\| \int\limits_{A(s,\alpha)} f_n(s_m)(t)d\mu(t) - \alpha \int\limits_T f_n(s_m)(t)d\mu(t) \Big\| + 2\|f_n(s)(\cdot) - f_n(s_m)(\cdot)\|_{L^1}.$$

Так как выбранная точка удовлетворяет включению $s \in U_{s_m}$, то по формуле (5.5) для U_{s_m} и согласно (5.10) получаем, что последнее выражение меньше, чем

$$\frac{\delta}{4r(s_m)} + 2\,\frac{\delta}{16r(s_m)} = \frac{3\delta}{8r(s_m)} < \frac{\delta}{2r(s)}, \tag{5.11}$$

откуда в итоге получаем, что для любого $s \in S$ и любого $n \in N_s$ справедливо неравенство

$$\Big\| \int\limits_{A(s,\alpha)} f_n(s)(t)d\mu(t) - \alpha \int\limits_T f_n(s)(t)d\mu(t) \Big\| < \frac{\delta}{2r(s)} \quad \forall \alpha \in I. \tag{5.12}$$

Аналогично из (5.9) и (5.11) для любого $s \in S$ получаем неравенство

$$|\mu(A(s,\alpha)) - \alpha\,\mu(T)| < \frac{\delta}{2r(s)} \quad \forall \alpha \in I, \tag{5.13}$$

Введем обозначения вида $z_0(s) := 0$, $z_n(s) := p_1(s) + \cdots + p_n(s)$ и

$$A_n(s) := A(s, z_n(s)) \setminus A(s, z_{n-1}(s)). \tag{5.14}$$

Из этого определения очевидно следует свойство 1), т. е. если $p_n(s) = 0$, то $A_n(s) = \varnothing$. Так как $\{p_n(s)\}_{n=1}^\infty$ — локально конечное разбиение единицы на S, то при каждом $s \in S$ последовательность $\{z_n(s)\}_{n=1}^\infty$ является неубывающей, причем существует номер n_s такой, что при всех $n \geq n_s$ имеем равенство $z_n(s) = 1$, т. е. семейство $\{A_n(s)\}_{n=1}^\infty$ образует конечное измеримое разбиение пространства T, при этом $A_n(s) = \varnothing$, если $n \notin N_s$. Более того, так как для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $z_n : S \to I$ непрерывна, то отображения $s \to A(s, z_n(s))$ непрерывны (из S в $\mathcal{T}$). Отсюда, из (5.14) и из неравенства

$$\mu\Big(\big(A(s_1, z_n(s_1)) \setminus A(s_1, z_{n-1}(s_1))\big) \triangle \big(A(s_2, z_n(s_2)) \setminus A(s_2, z_{n-1}(s_2))\big)\Big)$$

$$\leq \mu\big(A(s_1, z_n(s_1)) \triangle A(s_2, z_n(s_2))\big) + \mu\big(A(s_1, z_{n-1}(s_1)) \triangle A(s_2, z_{n-1}(s_2))\big)$$

следует, что и отображения $A_n : S \to \mathcal{T}$ также непрерывны.

Покажем, что множества $A_n(s)$ удовлетворяют неравенствам (5.1) и (5.2). Из формулы (5.14), включения $A(s, z_{n-1}(s)) \subset A(s, z_n(s))$ и неравенств (5.12) и (5.13), взятых при $\alpha = z_n(s)$ и $\alpha = z_{n-1}(s)$, получаем для любого $n \in \mathbb{N}$ неравенства

$$\Big\| \int\limits_{A_n(s)} f_n(s)(t)d\mu(t) - p_n(s) \int\limits_T f_n(s)(t)d\mu(t) \Big\| < \frac{\delta}{r(s)},$$

$$|\mu(A_n(s)) - p_n(s)\,\mu(T)| < \frac{\delta}{r(s)}.$$

Мощность множества индексов n, для которых $A_n(s) \neq \varnothing$ (т. е. $\mathrm{card}\{n \mid A_n(s) \neq \varnothing\}$), можно оценить сверху, а именно: $\mathrm{card}\{n \mid A_n(s) \neq \varnothing\} = \mathrm{card}\{N_s\} \leq r(s)$. При суммировании последних неравенств по всем $n \in \mathbb{N}$ достаточно брать лишь $n \in N_s$, так как при $n \notin N_s$ имеем $p_n(s) = 0$ и $A_n(s) = \varnothing$. В результате получаем неравенства (5.1) и (5.2).

Поскольку покрытие $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства S является локально конечным, то для любой фиксированной точки $s_0 \in S$ выберем ее окрестность $U(s_0)$ так, что существует конечный набор индексов $N(s_0) \subset \mathbb{N}$ такой, что $V_n \cap U(s_0) \neq \varnothing$ лишь при $n \in N(s_0)$. Пусть мощность этого множества $\mathrm{card}\{N(s_0)\} := \widetilde{r}(s_0)$. Тогда для любого $s \in U(s_0)$ имеем $r(s) \leq \widetilde{r}(s_0) < \infty$. Это означает, что для любого $s \in U(s_0)$ при условии, что $n \notin N(s_0)$, имеем $p_n(s) = 0$, т. е. $A_n(s) = \varnothing$. В результате для любого $s \in U(s_0)$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n(s) \triangle A_n(s_0)) = \sum_{n \in N(s_0)} \mu(A_n(s) \triangle A_n(s_0)).$$

Отсюда и из того, что каждое отображение $A_n : S \to \mathcal{T}$ непрерывно, т. е. каждое слагаемое в этой сумме стремится к нулю при $s \to s_0$, а число слагаемых для любого s из окрестности $U(s_0)$ конечно, получаем равенство (5.3). □

В заключение покажем, как по полученному в теореме 5 конечному измеримому разбиению $\{A_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ пространства T, сильно непрерывному по параметру $s \in S$ (в смысле выполнения равенства (5.3)), можно строить непрерывные отображения.

Предложение 2. *Пусть S — сепарабельное метрическое пространство, и пусть для каждого $s \in S$ и $n \in \mathbb{N}$ заданы измеримые подмножества $A_n(s)$ компактного пространства T такие, что справедливы соотношения*

$$\begin{cases} A_{n_1}(s) \cap A_{n_2}(s) = \varnothing \quad \forall n_1 \neq n_2; \ T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n(s); \\ \lim\limits_{s \to s_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n(s) \triangle A_n(s_0)) = 0 \quad \forall s_0 \in S. \end{cases} \tag{5.15}$$

Пусть заданы функции $v_n(\cdot) \in L^1(T, E)$, $n \in \mathbb{N}$, для которых существует функция $k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\|v_n(t)\| \leq k(t)$ при п.в. $t \in T$. Пусть определено отображение g из S в $L^1(T, E)$ по формуле

$$g(s)(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n(s)}(t) v_n(t), \quad t \in T. \tag{5.16}$$

Тогда отображение g: $S \to L^1(T, E)$ непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5.15), (5.16) для любого $s, s_0 \in S$ получаем оценки интеграла

$$\int_T \|g(s)(t) - g(s_0)(t)\|\, d\mu(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_T \left| \chi_{A_n(s)}(t) - \chi_{A_n(s_0)}(t) \right| \|v_n(t)\|\, d\mu(t)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_T \chi_{A_n(s) \triangle A_n(s_0)}(t) k(t)\, d\mu(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n(s) \triangle A_n(s_0)} k(t) d\mu(t),$$

и в силу условия (5.15) при $s \to s_0$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю. □

Заключение

Полученный результат позволяет построить непрерывное отображение некоторого множества функций, являющихся приближениями решений дифференциального включения с неограниченной правой частью и значениями в банаховом пространстве, во множество решений этого включения. В свою очередь с помощью такого отображения и других результатов удается обобщить класс оптимизационных задач, для которых удается доказать необходимые условия оптимальности решения в форме Эйлера — Лагранжа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lapunov A.A.** Sur le fonction-vecteurs completement additives // Izv. Akad.Nauk SSSR. Ser Math. 1940. Vol. 4. P. 465–478.
2. **Lindenstrauss J.** A short proof of Lyapounov's convexity theorem // J. Math. Mech. 1966. Vol. 15. P. 971–972.
3. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
4. **Polovinkin E.S.** The properties of continuity and differentiation of solution sets of Lipschetzean differential inclusions // Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty / eds. G. B. Di Masi, A. Gombani, A. B. Kurzhansky. Ser. PSCT 10. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 349–360. doi: 10.1007/978-1-4612-0443-5_23 .
5. **Половинкин Е.С.** Необходимые условия оптимальности с дифференциальными включениями // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 387–400.
6. **Diestel J., J.J.Uhl** Theory of vector measures. Providence: Amer. Math. Soc., 1977. 322 p. (Math. Surveys, No. 15). doi: 10.1090/surv/015 .
7. **Fryszkowski. A., Rzezuchowski, T.** Continuous version of Filippov–Wazewski relaxation theorem // J. Diff. Eqs. 1992. Vol 94. P. 254–265. doi: 10.1016/0022-0396(91)90092-N .
8. **Fryszkowski, A.** Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps // Studia Math. 1983. Vol. 76, no. 2. P. 163–174.
9. **Fryszkowski, A.** Fixed point theory for decomposable sets. Dordrecht; Boston: Kluwer Acad. Publ., 2004. 209 p. doi: 10.1007/1-4020-2499-1 .

Половинкин Евгений Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры высшей математики
Московского физико-технического института (государственного университета),
г. Москва
e-mail: polovinkin.es@mipt.ru

Поступила 25.09.2017

REFERENCES

1. Lapunov A.A. Sur le fonction-vecteurs completement additives. *Izv. Akad.Nauk SSSR, Ser Math.*, 1940, vol. 4, pp. 465–478.
2. Lindenstrauss J. A short proof of Lyapounov's convexity theorem. *J. Math. Mech.*, 1966, vol. 15, pp. 971–972.
3. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Ser. Studies Math. Appl., vol. 6, Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland Publ. Comp., 1979, 460 p. ISBN: 0444851674 . Original Russian text published in Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 481 p.
4. Polovinkin E.S. The properties of continuity and differentiation of solution sets of Lipschetzean differential inclusions. In: *Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty*, G.B.Di Masi, A. Gombani, A.B. Kurzhansky (eds.), Ser. PSCT, vol. 10, Boston: Birkhäuser, 1991, pp. 349–360. doi: 10.1007/978-1-4612-0443-5_23 .
5. Polovinkin E.S. Necessary conditions for an optimization problem with a differential inclusion. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, vol. 211, pp. 350–361.
6. Diestel J., Uhl J.J. *Theory of vector measures*, Ser. Math. Surveys, no. 15, Providence: Amer. Math. Soc., 1977, 322 p. doi: 10.1090/surv/015 .

7. Fryszkowski. A., Rzezuchowski, T. Continuous version of Filippov–Wazewski relaxation theorem. *J. Diff. Eqs.*, 1992, vol. 94, no. 2, pp. 254–265. doi: 10.1016/0022-0396(91)90092-N .
8. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps. *Studia Math.*, 1983, vol. 76, no. 2, pp. 163–174.
9. Fryszkowski A. *Fixed point theory for decomposable sets*. Dordrecht, Boston, Kluwer Acad. Publ., 2004, 209 p. doi: 10.1007/1-4020-2499-1 .

The paper was received by the Editorial Office on September 25, 2017.

Evgeny Sergeevich Polovinkin, Dr. Phys.-Math. Sci.,, Prof., Prof. of the Chair of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, 141700 Russia,
e-mail: polovinkin.es@mipt.ru .