ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК УДК 514.132+515.162

МНОГООБРАЗИЯ БРИСКОРНА, ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ СИРАДСКИ И НАКРЫТИЯ ЛИНЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

А. Ю. Веснин, Т. А. Козловская

Многообразие Брискорна $\mathscr{B}(p,q,r)$ является r-листным разветвленным циклическим накрытием трехмерной сферы S^3 с ветвлением вдоль торического узла $T(p,q)$. Обобщенными группами Сирадски $S(m,p,q)$ называют группы с m-циклическим представлением $G_m(w)$, где слово w имеет специальный вид, зависящий от p и q. В частности, $S(m,3,2) = G_m(w)$ есть группа с m порождающими $x_1,\ldots,x_m$ и m определяющими соотношениями $w(x_i,x_{i+1},x_{i+2}) = 1$, где $w(x_i,x_{i+1},x_{i+2}) = x_i x_{i+2} x_{i+1}^{-1}$. Циклические представления групп $S(2n,3,2)$ в виде $G_n(w)$ исследовались Дж. Хоуи и Г. Вильямсом: они показали, что n-циклические представления являются геометрическими, то есть соответствуют спайнам замкнутых трехмерных многообразий. В данной работе аналогичный факт устанавливается для групп $S(2n,5,2)$. Показано, что в обоих случаях многообразия являются n-листными разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств. Для классификации некоторых из построенных многообразий была использована разработанная С. В. Матвеевым компьютерная программа “Распознаватель”.

Ключевые слова: трехмерное многообразие, многообразие Брискорна, группа с циклическим представлением, группа Сирадски, линзовое пространство, разветвленное накрытие.

A. Yu. Vesnin, T. A. Kozlovskaya. Brieskorn manifolds, generalized Sieradski groups, and coverings of lens spaces.

The Brieskorn manifold $\mathscr{B}(p,q,r)$ is the r-fold cyclic covering of the three-dimensional sphere S^3 branched over the torus knot $T(p,q)$. The generalised Sieradski groups $S(m,p,q)$ are groups with m-cyclic presentation $G_m(w)$, where the word w has a special form depending on p and q. In particular, $S(m,3,2) = G_m(w)$ is the group with m generators $x_1,\ldots,x_m$ and m defining relations $w(x_i,x_{i+1},x_{i+2}) = 1$, where $w(x_i,x_{i+1},x_{i+2}) = x_i x_{i+2} x_{i+1}^{-1}$. Cyclic presentations of $S(2n,3,2)$ in the form $G_n(w)$ were investigated by Howie and Williams, who showed that the n-cyclic presentations are geometric, i.e., correspond to the spines of closed three-dimensional manifolds. We establish an analogous result for the groups $S(2n,5,2)$. It is shown that in both cases the manifolds are n-fold branched cyclic coverings of lens spaces. For the classification of the constructed manifolds, we use Matveev's computer program “Recognizer.”

Keywords: three-dimensional manifold, Brieskorn manifold, cyclically presented group, Sieradski group, lens space, branched covering.

MSC: 57M05, 20F05, 57M50

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-85-97

Академику С. В. Матвееву к его семидесятилетию

1. Трехмерные многообразия с циклической симметрией

1.1. Примеры многообразий с циклической симметрией

В работе исследуется связь между трехмерными замкнутыми многообразиями Брискорна и обобщенными группами Сирадски. Многообразие Брискорна $\mathscr{B}(p,q,r)$ [1] является r-листным разветвленным циклическим накрытием трехмерной сферы S^3 с ветвлением вдоль торического узла $T(p,q)$. Обобщенными группами Сирадски $S(m,p,q)$ [2] называют группы с циклическим представлением $G_m(w)$, где слово w имеет указанный ниже специальный вид, зависящий от положительных целых p и q, где $p = 1+dq$ и $d \geq 1$. В частности, $S(m,3,2) = G_m(w)$ есть группа

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N 15-01-07906).

с m порождающими $x_1, \ldots, x_m$ и m определяющими соотношениями $w(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = 1$, где $w(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = x_i x_{i+2} x_{i+1}^{-1}$.

Циклические представления групп $S(2n, 3, 2)$ (случай $q = 2$, $d = 1$) в виде $G_n(w)$ исследовались Дж. Хоуи и Г. Вильямсом в [3]. А именно, они показали, что n-циклические представления $S(2n, 3, 2) = G_n(x_i x_{i+2} x_{i+1}^{-1})$ являются *геометрическими*, то есть соответствуют спайнам замкнутых трехмерных многообразий. В данной работе аналогичный факт устанавливается для групп $S(2n, 5, 2)$ (случай $q = 2$, $d = 2$). А именно, в теореме 4 показывается, что n-циклические представления

$$S(2n, 5, 2) = G_n(x_i x_{i+1} x_{i+2}^2 x_{i+3} x_{i+4} x_{i+3}^{-1} x_{i+2}^{-1} x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1})$$

являются геометрическими. В предложениях 2 и 3 устанавливается, что в обоих случаях многообразия являются n-листными разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств.

Напомним, что топологические и геометрические свойства трехмерных многообразий являются предметом многочисленных исследований с различных точек зрения. В зависимости от поставленной задачи, используются подходы к построению и описанию трехмерных многообразий, основанные на триангуляциях, разбиениях Хегора, хирургиях, разветвленных накрытиях и других методах. Каждый из подходов имеет свои сильные стороны. Основные определения и понятия теории трехмерных многообразий можно найти в книге Дж. Хемпеля [4]. Весьма плодотворным оказалось представление трехмерных многообразий их спайнами. Теория спайнов трехмерных многообразий была развита в работах С. В. Матвеева, его коллег и учеников. Основные результаты теории спайнов изложены и систематизированы в монографии [5]. Методы и результаты табулирования трехмерных многообразий представлены также в обзоре [6]. Представление трехмерных многообразий спайнами используется в программном комплексе “*Распознаватель трехмерных многообразий*” [7], созданном и развиваемом под руководством С. В. Матвеева. Этот программный комплекс содержит как оригинальные программные средства для распознавания и исследования трехмерных многообразий, так и огромную базу трехмерных многообразий, представленных своими спайнами. Так разработанные программные средства позволяют во многих частных случаях исследовать группы симметрий трехмерных многообразий и выяснять вопросы о накрытиях многообразий.

В данной работе мы будем обсуждать связные замкнутые ориентируемые трехмерные многообразия, обладающие циклической симметрией, которая действует на многообразии с неподвижными точками. Более того, нас будут интересовать те случаи, когда циклическая симметрия соответствует представлению многообразия как разветвленного циклического накрытия трехмерной сферы S^3 или линзового пространства $L(p, q)$. К настоящему времени примеры таких многообразий хорошо известны. Напомним некоторые из них.

- Сферическое и гиперболическое додекаэдральные пространства, построенные К. Вебером и Г. Зейфертом в 1931 г. в работе [8]: первое из них является 3-листным циклическим накрытием S^3, разветвленным над узлом трилистник, а второе является 5-листным циклическим накрытием S^3, разветвленным над двухкомпонентным зацеплением Уайтхеда.
- Наименьшее по объему замкнутое ориентируемое трехмерное гиперболическое многообразие, обнаруженное С.В. Матвеевым и А.Т. Фоменко [9] и независимо Дж. Виксом [10], является 3-листным циклическим накрытием S^3, разветвленным над двухмостовым узлом 7/3 [11].
- Многообразия Фибоначчи, построенные Х. Хеллингом, А.Ч. Кимом и Й. Меннике в работе [12], являются n-листными накрытиями S^3, разветвленными над узлом восьмерка.
- Многообразия Сирадски, определенные А. Сирадски в [13], как установлено А. Кавиккиоли, Ф. Хагенбартом и А.Ч. Кимом [2], являются n-листными циклическими накрытиями S^3, разветвленными над узлом трилистник.

Хорошо известно, что узел трилистник принадлежит к семейству торических узлов (как торический узел трилистник имеет обозначение $T(3,2)$). Таким образом, многообразия Сирадски из [2; 13] принадлежат к более широкому классу многообразий, известных как многообразия Брискорна.

1.2. Многообразия Брискорна

Напомним, что Э. Брискорн [1] (см. также монографию Дж. Милнора [14]) инициировал исследование следующих объектов. Для целых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1} \geq 2$ рассмотрим многочлен вида

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = (z_1)^{\alpha_1} + (z_2)^{\alpha_2} + \cdots + (z_{n+1})^{\alpha_{n+1}}.$$

Очевидно, начало координат является его единственной критической точкой.

Многообразием Брискорна $\mathscr{B}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ называется пересечение комплексной гиперповерхности $V = f^{-1}(0)$ с $(2n+1)$-мерной сферой единичного радиуса

$$S^{2n+1} = \{(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \, : \, |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}.$$

Многообразие Брискорна является гладким многообразием размерности $2n-1$. Интерес к исследованию этих многообразий связан, в частности, со следующим удивительным фактом, доказанным Дж. Милнором [14]: многообразия Брискорна, соответствующие многочленам

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2$$

для $k = 1, 2, \ldots, 28$, представляют 28 попарно недиффиоморфных экзотических сфер, каждая из которых гомеоморфна обычной семимерной сфере.

Нас будет интересовать случай, когда многообразие Брискорна является трехмерным. Следуя Дж. Милнору [15], для целых $p, q, r \geq 2$ обозначим

$$\mathscr{B}(p,q,r) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \, : \, z_1^p + z_2^q + z_3^r = 0, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}.$$

Как показано в лемме 1.1 из работы [15], многообразие $\mathscr{B}(p,q,r)$ является r-листным циклическим накрытием сферы S^3, разветвленным над торическим зацеплением $T(p,q)$. В силу того, что в определение многообразия $\mathscr{B}(p,q,r)$ параметры p, q и r входят симметрично, оно также является q-листным циклическим накрытием S^3 с ветвлением вдоль $T(r,p)$ и p-листным циклическим накрытием S^3 с ветвлением вдоль $T(q,r)$.

Напомним, что торическое зацепление $T(p,q)$ может быть определено как множество точек (z_1, z_2) на единичной трехмерной сфере, которые удовлетворяют уравнению $z_1^p + z_2^q = 0$. Это зацепление имеет d компонент, где d — наибольший общий делитель чисел p и q. Компонента с номером n, $1 \leq n \leq d$, может быть параметризована следующим образом:

$$z_1 = \exp(2\pi i t/p), \qquad z_2 = \exp(2\pi i(t + n + 1/2)/q)$$

для $0 \leq t \leq pq/d$.

Другое описание торических зацеплений может быть дано на языке теории кос. Пусть B_p — группа геометрических кос на p нитях со стандартными порождающими $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$. Тогда замыкание косы $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-1})^q$ является торическим зацеплением $T(p,q)$.

В [15] показано, что многообразие Брискорна $\mathscr{B}(p,q,r)$ является сферическим, если $1/p + 1/q + 1/r > 1$; нильпотентным, если $1/p + 1/q + 1/r = 1$, и $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$-многообразием, если $1/p + 1/q + 1/r < 1$.

2. Группы с циклическим представлением

2.1. Циклическое представление и определяющее слово

Напомним [16], что группа G называется *группой с циклическим представлением*, если при некоторых m и w она допускает представление вида

$$G = G_m(w) = \langle x_1, \ldots, x_m \mid w = 1, \, \eta(w) = 1, \, \ldots, \, \eta^{m-1}(w) = 1 \rangle,$$

где $\eta : \mathbb{F}_m \to \mathbb{F}_m$ — автоморфизм свободной группы $\mathbb{F}_m = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$ ранга m, определенный по правилу $\eta(x_i) = x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, m-1$, и $\eta(x_m) = x_1$, а $w = w(x_1, \ldots, x_m)$ — циклически приведенное слово в $\mathbb{F}_m$. Слово w будем называть *определяющим словом.*

Естественно возникает вопрос о том, какие группы с циклическим представлением являются фундаментальными группами трехмерных гиперболических многообразий? Ниже мы напомним примеры групп с циклическим представлением, возникающих как фундаментальные группы трехмерных многообразий, а также покажем, что некоторые семейства групп с циклическим представлением не могут быть реализованы как группы трехмерных гиперболических орбифолдов конечного объема.

2.2. Группы Фибоначчи

Начнем обсуждение с групп, соответствующих определяющему слову $w(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3^{-1}$. Группы с циклическим представлением

$$F(2, m) = \langle x_1, \ldots, x_m \mid x_i x_{i+1} = x_{i+2}, \quad i = 1, \ldots, m \rangle,$$

где индексы берутся по модулю m, называются *группами Фибоначчи.* Если число порождающих четно, $m = 2n$, то, как доказали Х. Хеллинг, А.Ч. Ким и Й. Менникe [12], при $n \geq 4$ группы $F(2, 2n)$ реализуются как фундаментальные группы трехмерных гиперболических многообразий. Эти многообразия были названы *многообразиями Фибоначчи.* Таким образом, при четном $m \geq 8$ группы $F(2, m)$ являются бесконечными и не содержат элементов конечного порядка. В случае нечетного m ситуация иная. Как показано в [17], группы $F(2, m)$ с нечетным числом порождающих содержат элементы конечного порядка. А именно, произведение порождающих $v = x_1 x_2 \ldots, x_m$ является элементом второго порядка в $F(2, m)$. Таким образом, группа $F(2, m)$ с нечетным m не может быть фундаментальной группой гиперболического многообразия. Более того, как показал К. Маклачлан [18], она не может быть группой трехмерного гиперболического орбифолда конечного объема. Вместе с тем Дж. Хоуи и Г. Вильямс показали [3], что если $m \geq 3$ нечетно, то $F(2, m)$ является группой трехмерного многообразия тогда и только тогда, когда $m = 3, 5, 7$. Во всех этих случаях группа является конечной циклической.

Как естественное обобщение групп $F(2, m)$ в [19] были введены группы $F(r, m)$, где $r \geq 2$ и $m \geq 3$, задаваемые представлением

$$F(r, m) = \langle x_1, \ldots, x_m \quad | \quad x_i x_{i+1} \ldots x_{i+r-1} = x_{i+r}, \quad i = 1, \ldots, m \rangle,$$

где все индексы берутся по модулю m. Группы $F(r, m)$ также обычно называют *группами Фибоначчи.* Обзор результатов о конечности этих групп приведен в [16]. Естественно возникает вопрос о том, реализуются ли эти группы как фундаментальные группы трехмерных многообразий, в частности, гиперболических? Используя метод из [18], А. Щепанский [20] установил, что если r четно и $m \geq r$ нечетно, то группа Фибоначчи $F(r, m)$ не может быть группой трехмерного гиперболического орбифолда конечного объема.

2.3. Группы Сирадски

Еще один интересный класс групп с циклическим представлением соответствует определяющему слову $w(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 x_2^{-1}$. Группы с циклическим представлением

$$S(m) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \mid x_i x_{i+2} = x_{i+1}, \quad i = 1, \ldots m \rangle,$$

где все индексы берутся по модулю m, были введены А. Сирадски в работе [13]. В работе [2] эти группы были названы *группами Сирадски.* Определенные в работе [2] группы

$$S(m, p, q) = \langle x_1, \ldots, x_m \mid$$
$$x_i \, x_{i+q} \, \cdots \, x_{i+(q-1)dq-q} \, x_{i+(q-1)dq} \; = \; x_{i+1} \, x_{i+q+1} \, \cdots \, x_{i+(q-1)dq-q+1}, \quad i = 1, \ldots, m \rangle$$

будем называть *обобщенными группами Сирадски.* Здесь все индексы берутся по модулю m, а p и q — такие взаимно простые положительные числа, что $p = 1 + dq$, $d \in \mathbb{Z}$. А. Кавикиоли, Ф. Хегенбарт и А.С. Ким установили следующий результат.

Теорема 1 [2, Main Theorem]. *Циклическое представление $S(m, p, q)$ соответствует спайну замкнутого трехмерного многообразия, которое является m-листным циклическим накрытием S^3, разветвленным над торическим узлом $T(p, q)$, то есть спайну многообразия Брискорна $\mathscr{B}(m, p, q)$.*

В частности, циклическое представление группы Сирадски $S(m) = S(m, 3, 2)$ соответствует спайну многообразия $\mathscr{B}(m, 3, 2)$, которое m-листно циклически накрывает трехмерную сферу разветвленно над узлом трилистник $T(3, 2)$.

Далее нас будут интересовать обобщенные группы Сирадски с параметром $q = 2$. В этом случае $p = 1 + 2d$ и

$$S(m, 2d+1, 2) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \mid x_i x_{i+2} \cdots x_{i+2d} \; = \; x_{i+1} x_{i+3} \cdots x_{i+2d-1}, \quad i = 1, \ldots, m \rangle.$$

2.4. Обобщенные группы Фибоначчи

Рассмотрим два введенных в [21] семейства групп, которые авторы назвали *обобщенными группами Фибоначчи.* Группы первого семейства $F(r, m, k)$, где $r \geq 2$, $m \geq 3$, $k \geq 1$, имеют циклическое представление

$$F(r, m, k) = \langle x_1, \ldots, x_m \mid x_i x_{i+1} \cdots x_{i+r-1} = x_{i+r-1+k}, \quad i = 1, \ldots, m \rangle,$$

где индексы берутся по модулю m. Очевидно, что $F(r, m, 1) = F(r, m)$.

Следующее утверждение является обобщением аналогичных результатов, полученных в [18] и [20] для групп $F(2, m)$ и $F(r, m)$ соответственно.

Теорема 2 [22, Theorem]. *Пусть r четно, m нечетно и $(m, r + 2k - 1) = 1$. Тогда обобщенная группа Фибоначчи $F(r, m, k)$ не реализуется как группа трехмерного гиперболического орбифолда конечного объема.*

Обсудим некоторые группы $F(r, m, k)$, не удовлетворяющие условиям теоремы 2. Предположим, что

$$m = r + 2k - 1. \tag{2.1}$$

Полагая в (2.1) $k = 1$, имеем $m = r + 1$. Соответствующие группы $F(m - 1, m, 1)$ являются группами Фибоначчи $F(m - 1, m)$ с циклическим представлением

$$F(m-1, m) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \,|\, x_i x_{i+1} \cdots x_{i+m-2} = x_{i+m-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \rangle.$$

Группы с более общим циклическим представлением были рассмотрены в [23], где *обобщенными группами Нойвирта* (как обобщение групп Нойвирта из [24]) были названы группы

$$\Gamma_m^\ell = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} \dots x_{i+m-2} = x_{i+m-1}^\ell, \quad i = 1, 2, \dots n \rangle,$$

для $m \geq 3$ и $\ell \geq 1$. При этом $\Gamma_m^1 = F(m-1, m)$.

Предложение 1 [23, Theorem 3.1]. *Группы Γ_m^ℓ являются фундаментальными группами расслоенных пространств Зейферта Σ_m^ℓ со следующими параметрами*:

$$\Sigma_m^\ell \ = \ (0 \ o \ 0 \mid \ -1; \ \underbrace{(\ell+1, 1), \ (\ell+1, 1), \ \dots, (\ell+1, 1)}_{m \text{ times}}).$$

Полагая в (2.1) $r = 2$, получаем группы

$$F(2, 2k+1, k) = \langle x_1, \dots, x_{2k+1} \mid x_i x_{i+1} = x_{i+1+k}, \quad i = 1, \dots, 2k+1 \rangle.$$

Нетрудно видеть [22], что группы $F(2, 2k+1, k)$ и группы Сирадски

$$S(2k+1) = S(2k+1, 3, 2) = \langle a_1, a_2, \dots, a_{2k+1} \,|\, a_i a_{i+2} = a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, 2k+1 \rangle$$

изоморфны при следующем соответствии порождающих:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k & x_{k+1} & x_{k+2} & \dots & x_{2k} & x_{2k+1} \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & a_2 & \dots & a_{2k-2} & a_{2k} \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 1 это влечет, что группы $F(2, 2k+1, k)$ являются фундаментальными группами трехмерных многообразий, получаемых как $(k+1)$-листные циклические накрытия S^3, разветвленные над узлом трилистник.

Рассмотрим второе семейство групп из работы [21]. Группы $H(r, m, k)$, $r \geq 2$, $m \geq 3$, $k \geq 1$, имеют циклическое представление

$$H(r, m, k) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} \cdots x_{i+r-1} = x_{i+r} \cdots x_{i+r-1+k}, \quad i = 1, \dots, m \rangle,$$

где индексы берутся по модулю m. Очевидно, $H(r, m, 1) = F(r, m)$. Обсудим геометрические свойства групп $H(r, m, k)$. Сравним эти группы с обобщенными группами Сирадски $S(m, 2k-1, 2)$:

$$S(m, 2k-1, 2) = \langle a_1, \dots, a_m \mid a_i a_{i+2} \ \dots \ a_{i+2k-2} = a_{i+1} a_{i+3} \ \dots \ a_{i+2k-3}, \quad i = 1 \dots n \rangle.$$

Нетрудно видеть [22], что группы $H(k, 2k-1, k-1)$ и $S(2k-1, 2k-1, 2)$ изоморфны при следующем соответствии порождающих:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k & x_{k+1} & x_{k+2} & \dots & x_{2k-1} \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 1 следует, что при $k \geq 2$ группа $H(k, 2k-1, k-1) \cong S(2k-1, 2k-1, 2)$ является фундаментальной группой замкнутого трехмерного многообразия, которое может быть получено как циклическое $(2k-1)$–листное накрытие трехмерной сферы, разветвленное над $T(2k-1, 2)$, то есть многообразия Брискорна $\mathscr{B}(2k-1, 2k-1, 2)$.

2.5. Группы Джонсона — Мавдеслея

В работе [25] Д. Джонсон и Х. Мавдеслей определили класс групп с циклическим представлением

$$G_n(m, k) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \,|\, x_i x_{i+m} = x_{i+k}, \quad i = 1, 2, \dots, n \rangle.$$

Нетрудно убедиться, что этот класс содержит обсуждавшиеся выше группы Фибоначчи и группы Сирадски, а именно, $G_n(1, 2) = F(2, n)$ и $G_n(2, 1) = S(n, 3, 2)$. Строение групп $G_n(m, k)$ исследовалось в [17], а свойства групп $G_n(m, 1)$ изучались в [26]. В работе [3] за исключением двух случаев получен ответ на вопрос о том, когда группы $G_n(m, k)$ являются группами трехмерных многообразий. Исключительными случаями являются группы $G_9(4, 1)$ и $G_9(7, 1)$ для которых вопрос остается открытым.

3. Геометричность представлений групп

3.1. Циклическое представление группы $S(2n,3,2)$ с n порождающими

Как отмечено выше, группа Фибоначчи $F(2,2n)$, $n \geq 2$, является фундаментальной группой трехмерного многообразия, которое представляется как n-листное циклическое накрытие сферы S^3, разветвленное над узлом восьмерка. Это многообразие является сферическим при $n = 2$, евклидовым при $n = 3$ и гиперболическим при $n \geq 4$. Накрытие соответствует симметрии порядка n, определенной на порождающих соответствием $x_i \to x_{i+2}$, а не симметрией порядка $2n$, определенной соответствием $x_i \to x_{i+1}$ на порождающих $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ группы $F(2,2n)$. Как отмечено в [27], указанному n-листному накрытию соответствует n-циклическое представление

$$F(2,2n) \cong G_n(y_1^{-1}y_2^2y_3^{-1}y_2) = \langle y_1, y_2, \ldots y_n \mid y_i^{-1}y_{i+1}^2y_{i+2}^{-1}y_{i+1} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n\rangle,$$

где $y_i = x_{2i}$, $i = 1,\ldots,n$. При этом соответствие $\sum_i y_i^{k_i} \to \sum_i k_i t^i$ переводит определяющее слово $y_0^{-1}y_1^2y_2^{-1}y_1$ в полином $-(t^2-3t+1)$, эквивалентный полиному Александера узла восьмерка $\Delta(t) = t^2 - 3t + 1$.

Аналогично рассмотрим обобщенную группу Сирадски с четным числом порождающих $S(2n,3,2)$. Нетрудно видеть, что эта группа допускает циклическое представление с n порождающими. А именно,

$$\begin{aligned}
S(2n,3,2) &= G_{2n}(x_1x_3x_2^{-1}) \\
&= \langle x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \,|\, x_ix_{i+2} = x_{i+1}, \quad i = 1,\ldots,2n\rangle \\
&= \langle x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \,|\, x_{2j}x_{2j+2} = x_{2j+1}, \quad x_{2j+1}x_{2j+3} = x_{2j+2}, \quad j = 1,\ldots,n\rangle \\
&= \langle x_2, x_4, \ldots, x_{2n} \,|\, (x_{2j}x_{2j+2})(x_{2j+2}x_{2j+4}) = x_{2j+2}, \quad j = 1,\ldots,n\rangle \\
&= \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \,|\, y_jy_{j+1}^2y_{j+2} = y_{j+1}, \quad j = 1,\ldots,n\rangle \\
&= G_n(y_1y_2^2y_3y_2^{-1}).
\end{aligned}$$

Из теоремы 1 следует, что группа $S(2n,3,2)$ является фундаментальной группой трехмерного многообразия $\mathscr{B}(2n,3,2)$, которое представимо как $2n$-листное циклическое накрытие S^3, разветвленное над узлом трилистник, и при этом представление $S(2n,3,2)$ соответствует спайну многообразия.

Естественно возникает вопрос, является ли *геометрическим* циклическое представление $G_n(x_1x_2^2x_3x_2^{-1})$, т. е. соответствует ли оно спайну многообразия?

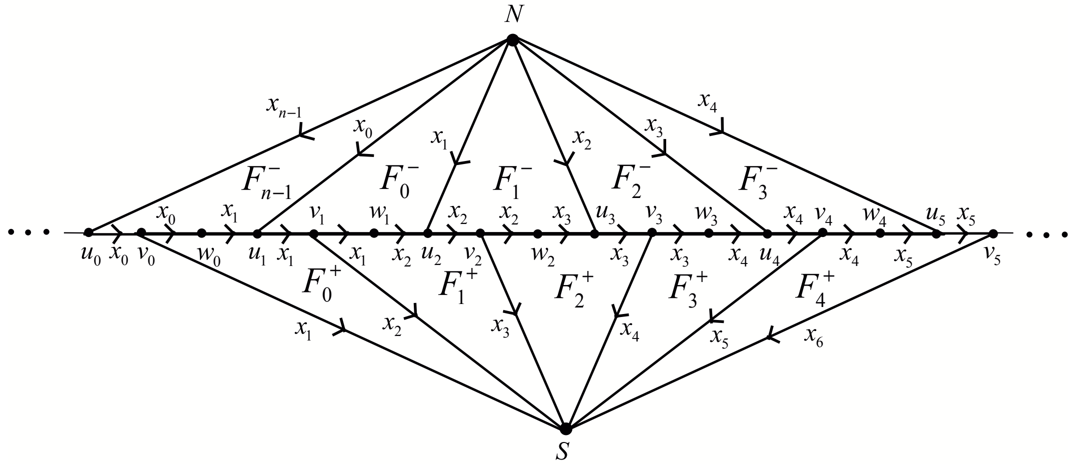

Рис. 1. Комплекс $\mathcal{P}_n$.

Положительно отвечая на этот вопрос, Дж. Хоуи и Г. Вильямс построили такой спайн в [3]. Для единообразия с обозначениями из [3] занумеруем порождающие следующим образом: $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Рассмотрим двумерный комплекс $\mathcal{P}_n$, изображенный на рис. 1. Он имеет $2n$ двумерных клеток, каждая из которых является пятиугольником. Обозначим их через F_i^+, F_i^-, $i = 0, \ldots, n-1$. Зададим на ребрах ориентацию и оснастим ребра метками $x_0, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Вершины обозначим через N, S, u_i, v_i, w_i, где $i = 0, \ldots, n-1$. Поскольку $\mathcal{P}_n$ является разбиением двумерной сферы на пятиугольники, далее мы будем называть его многогранником.

Зададим попарные отождествления F_i граней многогранника $\mathcal{P}_n$, полагая, что для каждого $i = 0, \ldots, n-1$ грани F_i^- и F_i^+ отождествляются в соответствии с указанным порядком вершин:

$$F_i : F_i^- = (N u_{i+1} v_{i+1} w_{i+1} u_{i+2}) \longrightarrow F_i^+ = (v_i w_i u_{i+1} v_{i+1} S).$$

Отождествление граней индуцирует разбиение множества ребер на классы эквивалентности. Например, в приведенных на рис. 1 обозначениях класс ребер с меткой x_3 содержит ребра, которые мы опишем их начальными и конечными вершинами

$$(x_3) \;:\; [N, u_4] \xrightarrow{F_3} [v_2, S] \xrightarrow{F_1^{-1}} [w_2, u_3] \xrightarrow{F_2^{-1}} [u_3, v_3] \xrightarrow{F_2^{-1}} [v_3, w_3] \xrightarrow{F_3^{-1}} [N, u_4].$$

Имеет место следующее свойство.

Теорема 3 [3, Theorem C]. *Циклическое представление $G_n(x_0 x_1^2 x_2 x_1^{-1})$ является геометрическим, то есть оно соответствует спайну замкнутого трехмерного многообразия.*

Построенный спайн $\mathcal{P}_n$ имеет циклическую симметрию порядка n, восходящую к циклическому представлению $G_n(x_0 x_1^2 x_2 x_1^{-1})$. Эта симметрия индуцирует циклическую симметрию порядка n на многообразии. Ниже мы опишем соответствующее фактор-пространство.

Предложение 2. *Для каждого n многообразие из теоремы 3 является разветвленным n-листным циклическим накрытием линзового пространства $L(3,1)$.*

Доказательство. Обозначим замкнутое трехмерное многообразие, построенное по спайну $\mathcal{P}_n$, через $\mathscr{S}(2n, 3, 2)$. Для доказательства утверждения перейдем стандартным методом от описания многообразия $\mathscr{S}(2n, 3, 2)$ через спайн $\mathcal{P}_n$ к его представлению диаграммой Хегора. В результате получим диаграмму Хегора рода n, приведенную на рис. 2.

Эта диаграмма обладает вращательной симметрией порядка n, которая циклически переставляет диски: $F_i^- \to F_{i+1}^-$ и $F_i^+ \to F_{i+1}^+$. Обозначим эту симметрию ρ, а ее ось вращения обозначим ℓ. При факторизации по указанной симметрии получим трехмерный орбифолд, в котором образ оси вращения образует сингулярное множество. Применяя движение Зингера типа IB [28], приведенное на рис. 3, получаем каноническую диаграмму линзового пространства $L(3,1)$. Таким образом, носителем орбифолда $\mathscr{S}(2n, 3, 2)/\rho$ является линзовое пространство $L(3,1)$. Следовательно, многообразие $\mathscr{S}(2n, 3, 2)$ является разветвленным циклическим n-листным накрытием линзового пространства $L(3,1)$. Утверждение доказано.

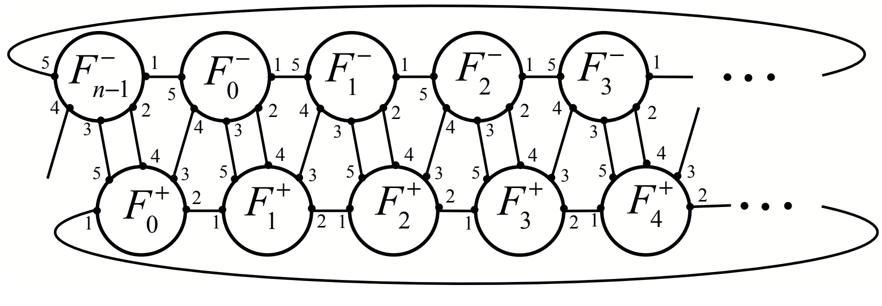

Рис. 2. Диаграмма Хегора многообразия $\mathscr{S}(2n, 3, 2)$.

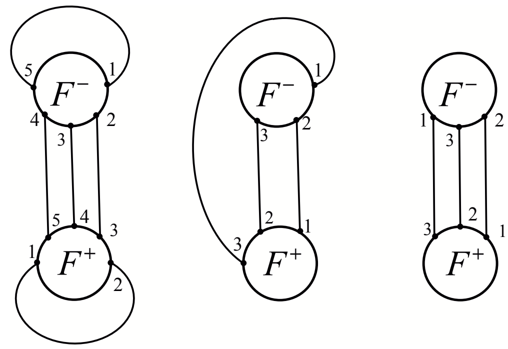

Рис. 3. Преобразования диаграммы Хегора многообразия $\mathscr{S}(2n,3,2)/\rho$.

3.2. Циклическое представление группы $S(2n,5,2)$ с n порождающими

Рассмотрим теперь обобщенные группы Сирадски $S(2n,5,2)$ с четным числом порождающих. От циклического представления с $2n$ порождающими перейдем к циклическому представлению с n порождающими:

$$
\begin{aligned}
S(2n,5,2) &= G_{2n}(x_1x_3x_5x_4^{-1}x_2^{-1}) \\
&= \langle x_1,x_2,\dots,x_{2n}\,|\,x_{i+1}x_{i+3}x_{i+5}=x_{i+2}x_{i+4},\quad i=1,\dots,2n\rangle \\
&= \langle x_1,x_2,\dots,x_{2n}\,|\,x_{j+1}x_{j+3}x_{j+5}=x_{j+2}x_{j+4}, \\
&\qquad\qquad x_{j+2}x_{j+4}x_{j+6}=x_{j+3}x_{j+5},\quad j=2,4\dots,2n\rangle \\
&= \langle x_1,x_2,\dots,x_{2n}\,|\,x_{j+5}=(x_jx_{j+2}x_{j+4})^{-1}x_{j+2}x_{j+4}, \\
&\qquad\qquad x_jx_{j+2}x_{j+4}=x_{j+1}x_{j+3},\quad j=2,4\dots,2n\rangle \\
&= \langle x_2,x_4,\dots,x_{2n}\,|\,x_jx_{j+2}x_{j+4}\left(x_{j+2}^{-1}x_j^{-1}x_{j-2}x_jx_{j+2}\right)\left(x_j^{-1}x_{j-2}^{-1}x_{j-4}x_{j-2}x_j\right)=1, \\
&\qquad\qquad j=2,4\dots,2n\rangle \\
&= \langle y_1,y_2,\dots,y_n\,|\,y_iy_{i+1}y_{i+2}y_{i+1}^{-1}y_i^{-1}y_{i-1}y_iy_{i+1}y_i^{-1}y_{i-1}^{-1}y_{i-2}y_{i-1}y_i=1,\ i=1,\dots,n\rangle \\
&= G_n(y_3y_4y_5y_4^{-1}y_3^{-1}y_2y_3y_4y_3^{-1}y_2^{-1}y_1y_2y_3) \\
&= G_n(y_1y_2y_3y_3y_4y_5y_4^{-1}y_3^{-1}y_2y_3y_4y_3^{-1}y_2^{-1}).
\end{aligned}
$$

Покажем, что полученное циклическое представление является геометрическим. В приведенном ниже утверждении для аналогии с теоремой 3 перенумеруем порождающие группы следующим образом: $x_i=y_{i+1}$, где $i=0,1,\dots,n-1$.

Теорема 4. *Циклическое представление* $G_n(x_0x_1x_2x_2x_3x_4x_3^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1})$ *является геометрическим, то есть оно соответствует спайну замкнутого трехмерного многообразия.*

Д о к а з а т е л ь с т в о будет состоять в описании двумерного комплекса Q_n, имеющего $2n$ двумерных клеток. При этом каждая двумерная клетка является 13-угольником, а на одномерных клетках расставлены метки $x_i^{\pm 1}$ таким образом, чтобы чтение меток вдоль границ 13-угольников давало определяющее соотношение группы. При этом двумерные клетки разбиваются на пары противоположно ориентированных и соответствующих одному и тому же слову.

Поскольку для рассматриваемого циклического представления определяющее слово является достаточно большим, мы продемонстрируем строение двумерного комплекса на примере. Рассмотрим комплекс Q_4, как изображено на рис. 4. Он имеет восемь двумерных граней. Мы подразумеваем, что ребра левой и правой границ циклически отождествлены и что вертикальные линии, уходящие вверх, встречаются в одной точке и, аналогично, вертикальные линии,

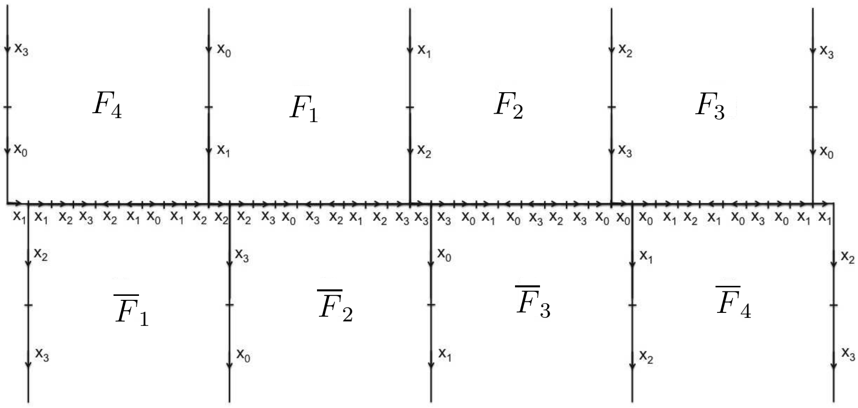

Рис. 4. Двумерный комплекс Q_4.

уходящие вниз, также встречаются в одной точке. Комплекс Q_4 соответствует рассматриваемому циклическому соотношению для $n = 4$. В этом случае группа имеет четыре порождающих, которые нам удобно обозначить x_0, x_1, x_2 и x_3, и четыре определяющих соотношения, которые мы перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_0x_1x_2x_2x_3x_0x_3^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1} &= 1, \\ x_1x_2x_3x_3x_0x_1x_0^{-1}x_3^{-1}x_2x_3x_0x_3^{-1}x_2^{-1} &= 1, \\ x_2x_3x_0x_0x_1x_2x_1^{-1}x_0^{-1}x_3x_0x_1x_0^{-1}x_3^{-1} &= 1, \\ x_3x_0x_1x_1x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1}x_0x_1x_2x_1^{-1}x_0^{-1} &= 1. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что указанные слова читаются вдоль границ двумерных клеток на рис. 4. В самом деле, первое слово читается вдоль границы клетки F_1, если ориентировать ее против часовой стрелки, и также вдоль границы клетки $\overline{F}_1$, если ориентировать ее по часовой стрелке. Оставшиеся три соотношения аналогичным образом соответствуют парам клеток F_2 и $\overline{F}_2$, F_3 и $\overline{F}_3$, F_4 и $\overline{F}_4$.

Расставленные на ребрах метки и ориентация ребер задают попарные отождествления указанных двумерных клеток комплекса Q_4, которые в свою очередь индуцируют отождествления одномерных клеток и нульмерных клеток. В результате получим трехмерное замкнутое псевдомногообразие. Как нетрудно проверить, его Эйлерова характеристика равна нулю. Следовательно, комплекс Q_4 является спайном замкнутого трехмерного многообразия [29]. Приведенная конструкция комплекса и все рассуждения с очевидностью обобщаются для произвольного n. Теорема доказана.

Обозначим замкнутое трехмерное многообразие, построенное по двумерному комплексу Q_n, через $\mathscr{S}(2n, 5, 2)$. Для малых значений n многообразия $\mathscr{S}(2n, 5, 2)$ могут быть классифицированы с помощью “*Распознавателя трехмерных многообразий*” [7]. Вычисления, проведенные нами для случая $n = 4$, показали, что $\mathscr{S}(8, 5, 2)$ является многообразием Зейферта $(S^2, (4, 1), (5, 2), (5, 2), (1, -1))$.

По аналогии с предложением 2 имеет место следующий результат.

Предложение 3. *Для каждого n многообразие из теоремы 4 является разветвленным n-листным циклическим накрытием линзового пространства $L(5, 1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. На рис. 5 приведена диаграмма Хегора рода четыре многообразия $\mathscr{S}(8, 5, 2)$, полученная из комплекса Q_4. По построению эта диаграмма обладает вращательной симметрией ρ четвертого порядка.

Аналогично доказательству предложения 2 нетрудно видеть, что фактор-пространством $\mathscr{S}(8, 5, 2)/\rho$ многообразия $\mathscr{S}(8, 5, 2)$ по действию этой симметрии является орбифолд с носите-

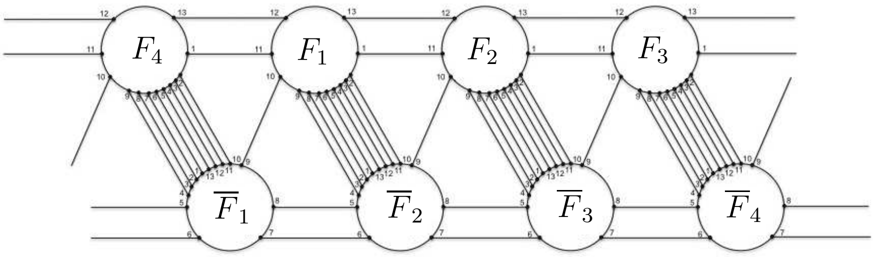

Рис. 5. Диаграмма Хегора для случая $n = 4$.

лем линзовое пространство $L(5, 1)$. Рассуждения для произвольного n проводятся аналогично. Утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brieskorn E.**. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten // Invent. Math. 1966. Vol. 2, no. 1. P. 1–14. doi: /10.1007/BF01403388 . Рус. пер.: Е. Брискорн. Примеры из дифференциальной топологии многообразий с особенностями // Математика. 1967. Vol. 11, № 6. С. 133–144.
2. **Cavicchioli A., Hegenbarth F., Kim A.** On cyclic branched coverings of torus knots // J. Geometry. 1999. Vol. 64. P. 55–66. doi: 10.1007/BF01229212 .
3. **Howie J., Williams G.** Fibonacci type presentations and 3-manifolds // Topology Appl. 2017. Vol. 215. P. 24–34. doi: 10.1016/j.topol.2016.10.012 .
4. **Hempel J.** 3-manifolds. Princeton; N.J.: Princeton University Press. 1976. 195 p. (Annals Math. Studies; vol. 86). ISBN 978-0-8218-3695-8 .
5. **Matveev S.** Algorithmic topology and classi cation of 3-manifolds. 2nd ed. Berlin: Springer, 2007. 492 p. (Algorithms Comput. Math.; vol. 9). doi: 10.1007/978-3-540-45899-9 .
6. **Матвеев С.В.** Табулирование трехмерных многообразий // Успехи мат. наук. 2005. Vol. 60, no. 4. P. 97–122.
7. Three-manifold Recognizer / The computer program developed by the research group of S. Matveev in the department of computer topology and algebra of Chelyabinsk State University.
8. **Weber C., Seifert H.** Die Beiden Dodekaederäume // Math. Z. 1933. Vol. 37. 237–253. doi: 10.1007/BF01474572 .
9. **Матвеев С.В., Фоменко А.Т.** Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий // Успехи мат. наук. 1988. Vol. 43, № 1. P. 5–22.
10. **Weeks J.** Hyperbolic structures on 3-manifolds. Thesis (Ph.D.)–Princeton University. Princeton: Princeton University, 1985. 83 p.
11. **Mednykh A., Vesnin A.** Visualization of the isometry group action on the Fomenko–Matveev–Weeks manifold // J. Lie Theory. 1998. Vol. 8, no. 1. 1998. P. 51–66.
12. **Helling H., Kim A., Mennicke J.** A geometric study of Fibonacci groups // J. Lie Theory. 1998. Vol. 8, no. 4. P. 1–23.
13. **Sieradski A.J.** Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of groups // Invent. Math. 1986. Vol. 84. P. 121–139.
14. **Milnor J.** Singular points of complex hypersurfaces. Princeton: Princeton University Press and Tokyo University Press, 1968. 130 p. (Annals of Mathematics Studies). ISBN: 9781400881819 .

   Рус. пер.: Дж. Милнор. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971. 126 с.
15. **Milnor J.** On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p, q, r)$ // Knots, Groups and 3-Manifolds / ed. L. P. Neuwirth. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1975. P. 175–225. (Ann. of Math. Studies; vol. 84).
16. **Johnson D.** Topics in the theory of group presentations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. 320 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 42). ISBN: 978-0-521-23108-4 .
17. **Бардаков В.Г., Веснин А.Ю.** Об обобщении групп Фибоначчи // Алгебра и логика. 2003. Vol. 42, no. 2. P. 131–160.

18. **Maclachlan C.** Generalizations of Fibonacci numbers, groups and manifolds // Combinatorial and Geometric Group Theory (Edinburgh, 1993). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. P. 233–238. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 204). ISBN: 0521465958 .
19. **Johnson D.J., Wamsley J.W., Wright D.** The Fibonacci groups // Proc. London Math. Soc. 1974. Vol. s3-29, no. 4. P. 577–592. doi: 10.1112/plms/s3-29.4.577 .
20. **Szczepanski A.** High dimensional knot groups and HNN extensions of the Fibonacci groups // J. Knot Theory Ramifications. 1998. Vol. 7, no. 4. P. 503–508. doi: 10.1142/S0218216598000267 .
21. **Campbell C.M., Robertson E.F.** A class of finitely presented groups of Fibonacci type // J. London Math. Soc. 1975. Vol. s2-11, no. 2. P. 249–255. doi: 10.1112/jlms/s2-11.2.249 .
22. **Szczepanski A., Vesnin A.** On generalized Fibonacci groups with odd number of generators // Communications in Algebra. 2000. Vol. 28, no. 2. P. 959–965. doi: 10.1080/00927870008826872 .
23. **Szczepanski A., Vesnin A.** Generalized Neuwirth Groups and Seifert fibered manifolds // Algebra Colloquium. 2000. Vol. 7, no. 3. P. 295–303. doi: 10.1007/s10011-000-0295-7 .
24. **Neuwirth L.** An algorithm for the construction of 3-manifolds from 2-complexes // Proc. Camb. Philos. Soc. 1968. Vol. 64. P. 603–613. doi: 10.1017/S0305004100043279 .
25. **Johnson D.L., Mawdesley H.** Some groups of Fibonacci type // J. Aust. Math. Soc. 1975. Vol. 20, no. 2. P. 199–204. doi: 10.1017/S1446788700020498 .
26. **Gilbert N., Howie J.** LOG groups and cyclically presented groups // J. Algebra. 1995. Vol. 174, no. 1. P. 118–131. doi: 10.1006/jabr.1995.1119 .
27. **Kim A.C., Vesnin A.** Cyclically presented groups and Takahashi manifolds // Analysis of discrete groups, II (Kyoto, 1996). RIMS Kokyuroku No. 1022. 1997. P. 200–212.
28. **Singer J.** Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 35, no. 1. P. 88–111. doi: 10.1090/S0002-9947-1933-1501673-5 .
29. **Зейферт Г., Трельфалль В.** Топология. М.: Изд-во ОНТИ, 1938. 400 с.

Веснин Андрей Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. лабораторией
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
профессор
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
e-mail: vesnin@math.nsc.ru

Поступила 07.08.2017

Козловская Татьяна Анатольевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Магаданский институт экономики, г. Магадан
e-mail: konus_magadan@mail.ru

REFERENCES

1. Brieskorn E. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. *Invent. Math.*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 1–14. doi: /10.1007/BF01403388 .
2. Cavicchioli A., Hegenbarth F., Kim A. On cyclic branched coverings of torus knots. *J. Geometry*, 1999, vol. 64, pp. 55–66. doi: 10.1007/BF01229212 .
3. Howie J., Williams G. Fibonacci type presentations and 3-manifolds, *Topology Appl.*, 2017, vol. 215, pp. 24–34. doi: 10.1016/j.topol.2016.10.012 .
4. Hempel J. *3-manifolds.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1976, Ser. Annals of Math. Studies, vol. 86, 195 p. ISBN 978-0-8218-3695-8 .
5. Matveev S. *Algorithmic topology and classi cation of 3-manifolds*, 2nd ed., Berlin: Springer, 2007, Ser. Algorithms Comput. Math., vol. 9, 492 pp. doi: 10.1007/978-3-540-45899-9 .
6. Matveev S.V. Tabulation of three-dimensional manifolds. *Russian Math. Surveys*, 2005, vol. 60, no. 4, pp. 673–698. doi: 10.1070/RM2005v060n04ABEH003673 .
7. *Three-manifold Recognizer*. The computer program developed by the research group of S. Matveev in the department of computer topology and algebra of Chelyabinsk State University.
8. Weber C., Seifert H. Die Beiden Dodekaederäume. *Math. Z.*, 1933, vol. 37, pp. 237–253. doi: 10.1007/BF01474572 .

9. Matveev S.V., Fomenko A.T. Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds. *Russian Math. Surveys*, 1988, vol. 43, no. 1, pp. 3–24. doi: 10.1070/RM1988v043n01ABEH001554 .
10. Weeks J. *Hyperbolic structures on 3-manifolds*. Thesis (Ph.D.)–Princeton University, Princeton: Princeton University, 1985, 83 p.
11. Mednykh A., Vesnin A. Visualization of the isometry group action on the Fomenko–Matveev–Weeks manifold. *J. Lie Theory*, 1998, vol. 8, no. 1, pp. 51–66.
12. Helling H., Kim A., Mennicke J. A geometric study of Fibonacci groups. *J. Lie Theory*, 1998, vol. 8, no. 4, pp. 1–23.
13. Sieradski A.J. Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of groups. *Invent. Math.*, 1986, vol. 84, pp. 121–139.
14. Milnor J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Princeton: Princeton University Press and Tokyo University Press,, 1968. 130 p. (Annals of Mathematics Studies). ISBN: 9781400881819 . Translated to Russian under the title Milnor Dzh. *Osobye tochki kompleksnykh giperpoverkhnostei*. Moscow, Mir Publ., 1971. 126 p.
15. Milnor J. On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p, q, r)$. In: *Knots, Groups and 3-Manifolds.* (*Neuwirth L.P. Ed.*), *Ann. of Math. Studies*, vol. 84, Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1975, pp. 175–225.
16. Johnson D. *Topics in the theory of group presentations*, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 42, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. 320 p. ISBN: 978-0-521-23108-4 .
17. Bardakov V.G., Vesnin A.Yu. A Generalization of Fibonacci Groups. *Algebra and Logic*, 2003, vol. 42, no. 2, pp. 73–91. doi: 10.1023/A:1023346206070 .
18. Maclachlan C. *Generalizations of Fibonacci numbers, groups and manifolds*. In: *Combinatorial and Geometric Group Theory* (Duncan A.J., Gilbert N.D., Howie J. eds.), London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 204, 1995, pp. 233–238. ISBN: 0521465958 .
19. Johnson D.J., Wamsley J.W., Wright D. The Fibonacci groups. *Proc. London Math. Soc.*, 1974, vol. 29, pp. 577–592. doi: 10.1112/plms/s3-29.4.577 .
20. Szczepanski A. High dimensional knot groups and HNN extensions of the Fibonacci groups. *J. Knot Theory Ramifications*, 1998, vol. 7, pp. 503–508. doi: 10.1142/S0218216598000267 .
21. Campbell C.M., Robertson E.F. A class of finitely presented groups of Fibonacci type. *J. London Math. Soc.*, 1975, vol. 11, pp. 249–255. doi: 10.1112/jlms/s2-11.2.249 .
22. Szczepanski A., Vesnin A. On generalized Fibonacci groups with odd number of generators. *Communications in Algebra*, 2000, vol. 28, no. 2, pp. 959–965. doi: 10.1080/00927870008826872 .
23. Szczepanski A., Vesnin A. Generalized Neuwirth Groups and Seifert fibered manifolds, *Algebra Colloquium*, 2000, vol. 7, no. 3, pp. 295–303. doi: 10.1007/s10011-000-0295-7 .
24. Neuwirth L. An algorithm for the construction of 3-manifolds from 2-complexes. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1968, vol. 64, pp. 603–613. doi: 10.1017/S0305004100043279 .
25. Johnson D.L., Mawdesley H. Some groups of Fibonacci type. *J. Aust. Math. Soc.*, 1975, vol. 20, pp. 199–204. doi: 10.1017/S1446788700020498 .
26. Gilbert N., Howie J. LOG groups and cyclically presented groups. *J. Algebra*, 1995, vol. 174, no. 1, pp. 118–131. doi: 10.1006/jabr.1995.1119 .
27. Kim A.C., Vesnin A. Cyclically presented groups and Takahashi manifolds. Analysis of discrete groups, II (Kyoto, 1996), *RIMS Kokyuroku*, 1997, vol. 1022, pp. 200–212.
28. Singer J. Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1933, vol. 35, no. 1, pp. 88–111. doi: 10.1090/S0002-9947-1933-1501673-5 .
29. Seifert H., Threlfall W. *Lehrbuch Der Topologie.* Chelsea Publishing, New York. 1934, 353 p. Translated from German to Russian under the title Zeifert G., Trel'fall' V. *Topologiya* [Topology]. ONTI, 1938, 400 p.

The paper was received by the Editorial Office on August 7, 2017.

Andrei Yur'evich Vesnin, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090 Russia; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: vesnin@math.nsc.ru .

Tat'yana Anatol'evna Kozlovskaya, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Magadan Institute of Economics, Magadan, 685000 Russia, e-mail: konus_magadan@mail.ru .