ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 514.132

ОБЪЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА С ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ S_4 [1]

Н. В. Абросимов, Б. Выонг Хыу

Задача вычисления объема гиперболического тетраэдра общего вида была ранее решена в работах Г. Сфорца и других авторов. При этом, полученные формулы имеют достаточно громоздкий вид. Известно, что если многогранник имеет нетривиальную симметрию, то формула его объема существенно упрощается. Этот факт был обнаружен Лобачевским, который нашел объем идеального тетраэдра. Позже Дж. Милнор выразил соответствующий объем как сумму трех функций Лобачевского. В данной работе рассматриваются компактные гиперболические тетраэдры, имеющие группу симметрий S_4, которая порождается зеркально поворотной симметрией четвертого порядка. Указанная симметрия представляет собой композицию поворота на угол $\pi/2$ вокруг оси, проходящей через середины двух противолежащих ребер, и отражения относительно плоскости, перпендикулярной данной оси и проходящей через середины оставшихся четырех ребер. Для таких тетраэдров установлены необходимые и достаточные условия существования в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$. Найдены соотношения между их двугранными углами и длинами ребер в форме теоремы косинусов. Получены точные интегральные формулы, выражающие гиперболический объем указанных тетраэдров через длины ребер.

Ключевые слова: гиперболический тетраэдр, группа симметрий, зеркальный поворот, гиперболический объем.

N. V. Abrosimov, Vuong Huu Bao. The volume of a hyperbolic tetrahedron with symmetry group S_4.

The problem of calculating the volume of a hyperbolic tetrahedron of general form was solved in a number of works by G. Sforza and other authors. The formulas obtained are rather cumbersome. It is known that if a polyhedron has nontrivial symmetry, then the volume formula is essentially simplified. This phenomenon was discovered by Lobachevsky, who found the volume of an ideal tetrahedron. Later, J. Milnor expressed the corresponding volume as the sum of three Lobachevsky functions. In this paper we consider compact hyperbolic tetrahedra having the symmetry group S_4, which is generated by a mirror-rotational symmetry of the fourth order. The latter symmetry is the composition of rotation by the angle of $\pi/2$ about an axis passing through the middles of two opposite edges and reflection with respect to a plane perpendicular to this axis and passing through the middles of the remaining four edges. We establish necessary and sufficient conditions for the existence of such tetrahedra in $\mathbb{H}^3$. Then we find relations between their dihedral angles and edge lengths in the form of a cosine law. Finally, we obtain exact integral formulas expressing the hyperbolic volume of the tetrahedra in terms of the edge lengths.

Keywords: hyperbolic tetrahedron, symmetry group, reflection followed by a rotation, hyperbolic volume.

MSC: 52B15, 51M20, 51M25, 51M10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-7-17

Введение

Вычисление объема многогранника — классическая геометрическая задача, которая и в настоящее время остается актуальной. Классификация трехмерных гиперболических многообразий — основная проблема современной маломерной топологии. Согласно теореме Тёрстона-Ёргенсена, все трехмерные гиперболические многообразия можно упорядочить по возрастанию их объемов. Начало этого списка известно. Многообразие минимального объема было независимо найдено С. В. Матвеевым и А. Т. Фоменко [1], а также Дж. Виксом [2]. Второе по объему многообразие построено У. Тёрстоном в [3] и так далее. В 2009 г. Д. Габаи, Р. Мейергоф

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00414) и Совета по грантам Президента РФ (проект МК-9572.2016.1).

и П. Майли [4] доказали, что многообразие Матвеева — Фоменко — Викса действительно имеет наименьший объем из возможных. С другой стороны, любое трехмерное гиперболическое многообразие может быть построено путем попарного отождествления конгруэнтных граней некоторого фундаментального многогранника. Объем гиперболического многообразия равен объему его фундаментального многогранника и является его важнейшим инвариантом.

Удобным инструментом для приблизительного вычисления объемов гиперболических многообразий служит разработанная Дж. Виксом компьютерная программа SnapPea. В то же время известны примеры, когда два различных многообразия имеют одинаковый объем. Для изучения подобных примеров необходимо находить точные формулы для гиперболических объемов. Точные формулы также требуются, чтобы попытаться найти решение проблемы, поставленной Тёрстоном и Милнором [5]: доказать, что объемы трехмерных гиперболических многообразий не всегда рационально связаны.

Первые частные результаты по вычислению неевклидовых объемов получены Н. И. Лобачевским, Я. Больяи и Л. Шлефли, которые нашли объемы гиперболического и сферического биортогональных тетраэдров (см., например, [5]). После пионерских работ Тёрстона и Милнора наметился большой прогресс в этом направлении. Начиная с конца 1980-х гг. получены точные формулы для объемов гиперболических и сферических многогранников во многих важных случаях.

Задача получения точных формул для объемов компактных гиперболических многогранников заданного комбинаторного типа весьма сложна. В настоящее время она решена только для тетраэдра общего вида. В 1999 г. Ю. Чо и Х. Ким [6] предложили формулу, которая была несимметрична относительно перестановки двугранных углов. Затем в 2005 г. Дж. Мураками и У. Яно [7] получили уже симметричную формулу, основываясь на квантовой теории 6j-символов. В 2006 г. А. Ушиджима [8] предложил иное доказательство формулы Мураками — Яно, которое покрывало также случай усеченного гиперболического тетраэдра. Во всех указанных формулах объем тетраэдра выражается через шестнадцать дилогарифмических функций, аргументы которых в свою очередь являются корнями уравнения с комплексными коэффициентами. В 2005 г. Д. А. Деревнин и А. Д. Медных [9] получили интегральную формулу для объема компактного гиперболического тетраэдра общего вида.

Тем более удивительно, что общая формула для объема компактного гиперболического тетраэдра была получены еще более 100 лет назад. Соответствующий результат принадлежит итальянскому математику Гаетано Сфорца и относится к 1906 г. К сожалению, работа Сфорца [10], опубликованная на итальянском языке, была до 2006 г. полностью забыта. В недавней статье [11] получены оригинальное современное доказательство формулы Сфорца и ее аналог для сферического тетраэдра. Отметим, что все упомянутые выше формулы довольно громоздкие и выражают объем гиперболического тетраэдра через двугранные углы.

Известно, что если многогранник обладает симметрией, то формула его объема существенно упрощается. Это, в частности, показывает пример идеального тетраэдра, то есть гиперболического тетраэдра, все вершины которого лежат на абсолюте. Из определения следует, что двугранные углы при противолежащих ребрах такого тетраэдра попарно равны друг другу, то есть он обладает симметрией. Его объем был известен еще Лобачевскому, а Дж. Милнор [5] в 1982 г. представил соответствующий результат в весьма простой и элегантной форме.

В настоящей работе рассматриваются компактные гиперболические тетраэдры, имеющие группу симметрий S_4. Для тетраэдров указанного типа будут установлены условия существования, найдены соотношения между двугранными углами и длинами ребер и получены точные формулы объема в терминах длин ребер. Будет использован подход, впервые предложенный в работе [12] для вычисления объема гиперболического октаэдра с $\overline{3}$-симметрией, при котором соответствующий евклидов многогранник помещается в проективную модель Кэли — Клейна гиперболического пространства.

Группа симметрии S_n (n четно) по классификации Шёнфлиса, или $\overline{n}$ по классификации Германа — Могена, порождается единственным элементом — зеркально поворотной осевой

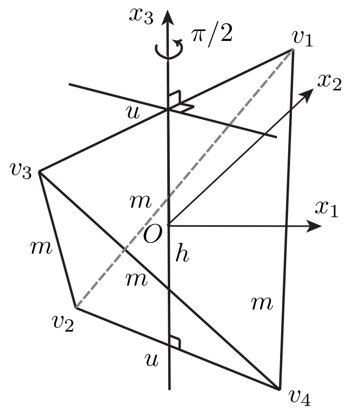

Рис. 1. Тетраэдр с группой симметрии S_4.

симметрией n-го порядка $C_n\sigma_h$ (см., например, [13, гл. 11]). Симметрия $C_n\sigma_h$ — это композиция поворота на угол $2\pi/n$ вокруг заданной оси и отражения в плоскости, перпендикулярной данной оси.

Рассмотрим сначала евклидов тетраэдр с группой симметрии S_4.

1. Тетраэдр с группой симметрий S_4 в $\mathbb{E}^3$

Введем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ в 3-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ со скалярным произведением $\langle\cdot;\cdot\rangle_{\mathbb{E}}$. Рассмотрим зеркально поворотную осевую симметрию $C_4\sigma_h$, которая является композицией поворота вокруг оси Ox_3 на угол $\pi/2$ и отражения в плоскости Ox_1x_2:

$$C_4\sigma_h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем координаты вершин тетраэдра в $\mathbb{E}^3$ с группой симметрии S_4, порожденной элементом $C_4\sigma_h$ (см. рис. 1):

$$v_1 = \left(\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2}\right), \qquad v_2 = \left(-\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2}\right),$$
$$v_3 = \left(-\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2}\right), \qquad v_4 = \left(\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2}\right).$$

Действительно, группа симметрий $S_4 = \langle C_4\sigma_h\rangle$ действует на множестве вершин такого тетраэдра как циклическая группа, порожденная подстановкой (v_1, v_2, v_3, v_4).

Вычислим квадраты длин ребер построенного тетраэдра:

$$\ell_{13}^2 = \ell_{24}^2 = u^2, \qquad \ell_{12}^2 = \ell_{34}^2 = \ell_{14}^2 = \ell_{23}^2 = m^2 = \frac{u^2}{2} + h^2,$$

где ℓ_{ij} — длина ребра, соединяющего вершины v_i и v_j.

Обозначим двугранные углы тетраэдра при ребрах длины u и m через U и M соответственно. Найдем косинусы двугранных углов, используя скалярные произведения векторов внешних нормалей к соответствующим граням:

$$\cos U = \frac{u^2 - 4\,h^2}{u^2 + 4\,h^2}, \qquad \cos M = \frac{2\,u^2}{4\,h^2 + u^2}.$$

Вычислим объем V тетраэдра T с группой симметрии S_4 в $\mathbb{E}^3$ по формуле Сервуа (см., например, [14, с. 98]): $V = 1/6\,u^2\,h$.

Перейдем к рассмотрению тетраэдров в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$.

2. Правильный тетраэдр в $\mathbb{H}^3$

Теорема 1. *Объем V правильного гиперболического тетраэдра T с ребрами длины a и двугранными углами, равными A, находится по формулам*

$$V = -3 \int\limits_{\arccos(1/3)}^{A} \operatorname{arch}\Big(\frac{\cos A}{1-2\,\cos A}\Big) dA\,,$$

$$V = \int\limits_{0}^{a} \frac{3\,a\,\operatorname{sh} a\,da}{(1+2\operatorname{ch} a)\sqrt{(\operatorname{ch} a+1)\,(3\operatorname{ch} a+1)}}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все грани тетраэдра T представляют собой правильные гиперболические треугольники со сторонами a. Обозначим углы в этих треугольниках через α. По теореме косинусов для гиперболического треугольника имеем $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a\ \cos\alpha$, откуда

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ch} a}{1+\operatorname{ch} a}\,. \tag{2.1}$$

Рассмотрим сечение тетраэдра T сферой достаточно малого радиуса с центром в любой вершине (см. рис. 2).

В сечении имеем правильный сферический треугольник с углами, равными A, и сторонами α. По теореме косинусов для сферического треугольника имеем $\cos\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos A$, откуда

$$\cos A = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1}\,.$$

Подставляя (2.1) в последнее равенство, находим соотношения между длинами ребер T и его двугранными углами:

$$\cos A = \frac{\operatorname{ch} a}{1+2\operatorname{ch} a}\,, \tag{2.2}$$

$$a = \operatorname{arch}\Big(\frac{\cos A}{1-2\,\cos A}\Big). \tag{2.3}$$

Заметим, что при $a \to 0$ тетраэдр T вырождается в точку, при этом его объем V стремится к нулю, а двугранные углы A стремятся к $\arccos(1/3)$.

Выпишем дифференциал объема тетраэдра T по формуле Шлефли (см., например, [15, с. 127]):

$$dV = -\sum_{\theta} \frac{\ell_\theta}{2}\,d\theta = -3\,a\,dA.$$

Здесь суммирование ведется по всем двугранным углам T, где ℓ_θ — длина соответствующего ребра с углом θ.

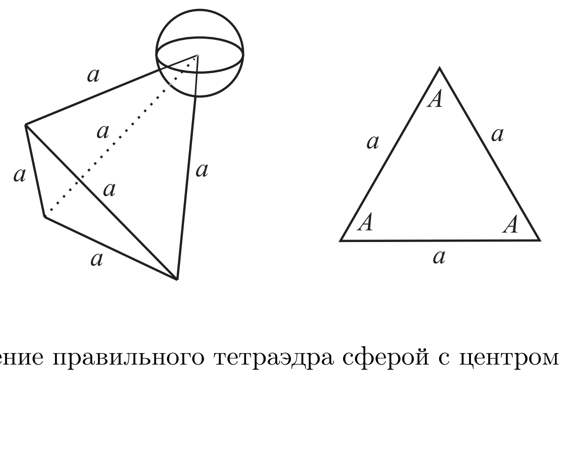

Рис. 2. Сечение правильного тетраэдра сферой с центром в вершине.

Подставляя формулу (2.3) в последнее равенство, выражаем объем через двугранные углы по формуле Ньютона — Лейбница:

$$V = -3 \int\limits_{\arccos(1/3)}^{A} \operatorname{arch}\Big(\frac{\cos A}{1 - 2\,\cos A}\Big) dA\,. \tag{2.4}$$

Из соотношения (2.2) имеем

$$\frac{dA}{da} = -\frac{\operatorname{sh} a}{(1 + 2\operatorname{ch} a)\sqrt{(\operatorname{ch} a + 1)(3\operatorname{ch} a + 1)}}\,,$$

что позволяет найти объем из формулы Шлефли в терминах длин ребер

$$V = \int\limits_{0}^{a} \frac{3\,a\,\operatorname{sh} a\; da}{(1 + 2\operatorname{ch} a)\sqrt{(\operatorname{ch} a + 1)\,(3\operatorname{ch} a + 1)}}\,. \tag{2.5}$$

□

Выражение объема (2.4) можно получить как частный случай из формулы Деревнина — Медных [9]. Соотношение (2.5) потребуется нам в дальнейшем.

3. Тетраэдр с группой симметрий S_4 в $\mathbb{H}^3$

3.1. Проективная модель Кэли — Клейна

Рассмотрим пространство Минковского $\mathbb{R}^4_1$ со скалярным произведением

$$\langle X, Y\rangle = -x_1\,y_1 - x_2\,y_2 - x_3\,y_3 + x_4\,y_4\,.$$

Моделью Кэли — Клейна называется множество векторов из $\mathbb{R}^4_1$, образующих единичный шар

$$K = \{(x_1, x_2, x_3, 1)\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}\,,$$

лежащий в гиперплоскости $x_4 = 1$. Прямыми и плоскостями в этой модели служат пересечения шара K с евклидовыми прямыми и плоскостями, лежащими в гиперплоскости $x_4 = 1$.

Пусть V, W — два вектора из K. Положим $V = (v, 1)$, $W = (w, 1)$. Тогда скалярное произведение указанных векторов в пространстве Минковского выражается через евклидово скалярное произведение по формуле $\langle V, W\rangle = 1 - \langle v, w\rangle_{\mathbb{E}}$.

Расстояние $\rho\,(V, W)$ между векторами V, W в модели Кэли — Клейна определяется равенством

$$\operatorname{ch}\rho\,(V, W) = \frac{\langle V, W\rangle}{\sqrt{\langle V, V\rangle\,\langle W, W\rangle}}\,. \tag{3.1}$$

Плоскость в модели K можно определить как множество точек $\mathcal{P} = \{V \in K\colon \langle V, N\rangle = 0\}$, где $N = (n, 1)$, $\langle n, n\rangle_{\mathbb{E}} > 0$ — вектор нормали к плоскости $\mathcal{P}$. Точка $(n, 1)$ называется *полюсом* $\mathcal{P}$ и лежит вне K.

В модели Кэли — Клейна рассмотрим плоскости $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ с нормалями N, M соответственно. Каждый из четырех двугранных углов между плоскостями $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ определяется соотношением

$$\cos\widehat{(\mathcal{P}, \mathcal{Q})} = \pm\frac{\langle N, M\rangle}{\sqrt{\langle N, N\rangle\,\langle M, M\rangle}}\,. \tag{3.2}$$

Пусть $V_1 = (v_1, 1), V_2 = (v_2, 1), V_3 = (v_3, 1)$ — три некомпланарных вектора в K. Тогда через них проходит единственная плоскость $\mathcal{P} = \{V \in K\colon \langle V, N\rangle = 0\}$ с вектором нормали

$N = (n, 1)$, где координаты вектора n однозначно определяются как решение системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \langle v_1, n\rangle_{\mathbb{E}} - 1 &= 0\,, \\ \langle v_2, n\rangle_{\mathbb{E}} - 1 &= 0\,, \\ \langle v_3, n\rangle_{\mathbb{E}} - 1 &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2. Длины ребер и условия существования

Рассмотрим гиперболический тетраэдр, имеющий группу симметрий S_4 (см. рис. 1). Пусть гиперболические длины его ребер равны, соответственно,

$$\ell_{13} = \ell_{24} = a, \qquad \ell_{14} = \ell_{23} = \ell_{12} = \ell_{34} = c. \tag{3.4}$$

Теорема 2. *Компактный гиперболический тетраэдр $T(a,c)$ с группой симметрий S_4 и заданными длинами ребер a, c (см. (3.4)) существует тогда и только тогда, когда* $1 + \operatorname{ch} a - 2\operatorname{ch} c < 0$.

Доказательство. Симметрия S_4 в $\mathbb{E}^3$ естественным образом расширяется до симметрии S_4 гиперболического пространства в модели Кэли — Клейна K. Последняя порождается композицией поворота на угол $\pi/2$ вокруг оси Ox_3 и отражения в плоскости $x_3 = 0, x_4 = 1$. Запишем ее матричное представление:

$$C_4\sigma_h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{C_4\sigma_h} : (v,1) \mapsto (C_4\sigma_h \cdot v, 1), \qquad \overline{C_4\sigma_h} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поместим евклидов тетраэдр с группой симметрии S_4 в K. Для этого каждой вершине соответствующего тетраэдра в $\mathbb{E}^3$ добавим четвертую координату, равную единице:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2}, 1\right), & V_2 &= \left(-\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2}, 1\right), \\ V_3 &= \left(-\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2}, 1\right), & V_4 &= \left(\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2}, 1\right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

при этом должно выполняться дополнительное условие

$$u^2 + h^2 < 4, \tag{3.6}$$

которое гарантирует, что все вершины V_i принадлежат K $(i = 1,2,3,4)$.

По формуле (3.1) выразим длины ребер a, c через параметры u, h, связанные с выбором системы координат:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} a &= \frac{4 + u^2 - h^2}{4 - u^2 - h^2}, \\ \operatorname{ch} c &= \frac{4 + h^2}{4 - u^2 - h^2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Выполнение условий $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{ch} c \geqslant 1$ непосредственно следует из (3.7) и (3.6).

Разрешая систему уравнений (3.7) относительно u^2 и h^2, получим следующие полезные соотношения:

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{8(\operatorname{ch} a - 1)}{1 + \operatorname{ch} a + 2\operatorname{ch} c}, \\ h^2 &= -\frac{4(1 + \operatorname{ch} a - 2\operatorname{ch} c)}{1 + \operatorname{ch} a + 2\operatorname{ch} c}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Последнее равенство означает, что длины ребер a и c гиперболического тетраэдра $T(a,c)$, допускающего симметрию S_4, не могут быть выбраны произвольно. Они должны удовлетворять неравенству

$$1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch} c < 0\,. \tag{3.9}$$

В предельном случае $1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch} c = 0$ тетраэдр $T(a,c)$ вырождается в плоский четырехугольник, который можно представить, если на рис. 1 параметр h взять равным нулю.

Отметим также, что в предположении (3.9) из равенств (3.8) следует выполнение условия (3.6). Поэтому неравенство (3.9) является необходимым и достаточным условием существования гиперболического тетраэдра $T = T(a,c)$, обладающего симметрией S_4. □

3.3. Двугранные углы

Теорема 3. *Пусть гиперболический тетраэдр $T(a,c)$ с группой симметрий S_4 задан длинами ребер a, c (см. (3.4)). Его двугранные углы A, C выражаются по формулам*

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\operatorname{ch} a + \operatorname{ch}^2 a - 2\ \operatorname{ch}^2 c}{1 + \operatorname{ch} a - 2\ \operatorname{ch}^2 c}, \\ \cos C &= \frac{\operatorname{ch} c\,(1 - \operatorname{ch} a)}{1 + \operatorname{ch} a - 2\ \operatorname{ch}^2 c}\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя координаты вершин (3.5), найдем квадраты косинусов двугранных углов тетраэдра $T(a,c)$ по формулам (3.2) и (3.3)

$$\begin{aligned} \cos^2 A &= \left(\frac{(h^2-4)u^2 + 16\,h^2}{(4-h^2)u^2 + 16\,h^2}\right)^2, \\ \cos^2 C &= \left(\frac{(h^2+4)u^2}{(4-h^2)u^2 + 16\,h^2}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Согласно (3.7) частный случай правильного гиперболического тетраэдра реализуется при $u^2 = 2\,h^2$. В этом случае формулы (3.11) приобретают вид

$$\cos^2 A = \cos^2 C = \frac{(h^2+4)^2}{(12-h^2)^2}.$$

С другой стороны, мы уже знаем из формул (2.2) и (3.7), что для правильного тетраэдра

$$\cos A = \frac{\operatorname{ch} a}{1 + 2 \operatorname{ch} a} = \frac{h^2+4}{12-h^2}.$$

Это приводит к следующему выбору знаков при извлечении квадратных корней в (3.11):

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{(h^2-4)u^2 + 16\,h^2}{(4-h^2)u^2 + 16\,h^2}, \\ \cos C &= \frac{(h^2+4)u^2}{(4-h^2)u^2 + 16\,h^2}\,. \end{aligned}$$

Подставляя соотношения (3.8) в последние два равенства, получаем искомые выражения для двугранных углов через длины ребер. □

3.4. Формулы для гиперболического объема

Теорема 4. *Объем V гиперболического тетраэдра $T(a,c)$ с группой симметрий S_4, заданного длинами ребер a, c (см. (3.4)), выражается любой из следующих формул*:

$$
\begin{aligned}
V &= \int\limits_0^a \frac{a\left((1+\operatorname{ch} a)^2 - 4\operatorname{ch}^2 c \operatorname{ch} a\right) + 4\,c\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a)\sqrt{4\operatorname{ch}^2 c - (1+\operatorname{ch} a)^2}}\, da\,, \\
V &= \int\limits_{\operatorname{arch}(\operatorname{ch} a+1)/2}^{c} \frac{2\,c\,(1-\operatorname{ch} a)(1+\operatorname{ch} a + 2\operatorname{ch}^2 c) + 4\,a\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a)\sqrt{4\operatorname{ch}^2 c - (1+\operatorname{ch} a)^2}}\, dc\,.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Доказательство. Рассмотрим гиперболический тетраэдр $T(a,c)$ с группой симметрий S_4. Согласно теореме 2 область существования такого тетраэдра в системе координат $\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} c$ имеет вид $\Omega = \{(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} c)\colon cha > 1,\ \operatorname{ch} c > 1,\ 2\operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a - 1 > 0\}$ (см. рис. 3). Граница области Ω состоит из двух лучей $\{\operatorname{ch} a = 1,\ \operatorname{ch} c \geq 1\}$ и $\{\operatorname{ch} a \geq 1,\ 2\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a + 1\}$, на каждом из которых тетраэдр теряет размерность, вырождаясь в отрезок или плоский четырехугольник соответственно. Следовательно, на границе Ω справедливо равенство $V = V(T(a,c)) = 0$.

Как известно (см., например, [8]), гиперболический тетраэдр однозначно определяется набором своих двугранных углов. Обозначим двугранные углы $T(a,c)$ при ребрах a, c через A, C соответственно. Согласно теореме 3 двугранные углы однозначно определяются по длинам ребер. Дифференцируем объем как сложную функцию от длин ребер

$$
\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial a}, \qquad \frac{\partial V}{\partial c} = \frac{\partial V}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial c} + \frac{\partial V}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial c}.
$$

По формуле Шлефли (см., например, [15, с. 127]) дифференциал объема вычисляется как

$$
dV = -\sum_{\theta} \frac{\ell_\theta}{2}\, d\theta = -a\, dA - 2\,c\, dC,
$$

откуда

$$
\frac{\partial V}{\partial A} = -\,a, \qquad \frac{\partial V}{\partial C} = -2\,c.
$$

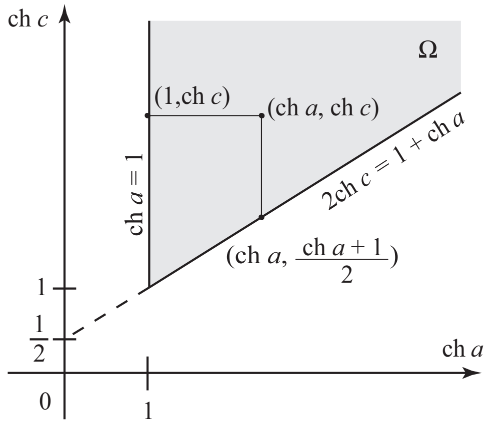

Рис. 3. Область существования гиперболического тетраэдра $T(a,c)$ с группой симметрии S_4.

Из (3.10) находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial a} &= \frac{(1+\operatorname{ch} a)^2 - 4\operatorname{ch}^2 c\, \operatorname{ch} a}{(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} 2c)\sqrt{4\operatorname{ch}^2 c - (1+\operatorname{ch} a)^2}}\,,\\
\frac{\partial C}{\partial a} &= \frac{2\operatorname{sh} c\, \operatorname{ch} c\, \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} 2c)\sqrt{4\operatorname{ch}^2 c - (1+\operatorname{ch} a)^2}}\,,\\
\frac{\partial A}{\partial c} &= \frac{4\operatorname{sh} c\, \operatorname{ch} c\, \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} 2c)\sqrt{4\operatorname{ch}^2 c - (1+\operatorname{ch} a)^2}}\,,\\
\frac{\partial C}{\partial c} &= \frac{(1-\operatorname{ch} a)(1+\operatorname{ch} a + 2\operatorname{ch}^2 c)}{(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} 2c)\sqrt{4\operatorname{ch}^2 c - (1+\operatorname{ch} a)^2}}\,.
\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial a} &= \frac{a\,((1+\operatorname{ch} a)^2 - 4\operatorname{ch}^2 c\, \operatorname{ch} a) + 4\,c\, \operatorname{sh} c\, \operatorname{ch} c\, \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a)\sqrt{4\, \operatorname{ch}^2 c - (1+\operatorname{ch} a)^2}},\\
\frac{\partial V}{\partial c} &= \frac{2\,c\,(1-\operatorname{ch} a)(1+\operatorname{ch} a + 2\operatorname{ch}^2 c) + 4\,a\, \operatorname{sh} c\, \operatorname{ch} c\, \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a)\sqrt{4\, \operatorname{ch}^2 c - (1+\operatorname{ch} a)^2}}\,.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Интеграл от дифференциальной формы

$$dV = \frac{\partial V}{\partial a}\, da + \frac{\partial V}{\partial c}\, dc \tag{3.14}$$

не зависит от пути интегрирования, а только от выбора начальной и конечной точек. Так как $V = 0$ на границе области Ω, то по формуле Ньютона — Лейбница объем равен интегралу от формы (3.14) по любой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \Omega$ с началом на границе Ω и концом в точке с координатами $(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} c)$. Подставляя выражения (3.13) в форму (3.14) и интегрируя ее по горизонтальному или вертикальному отрезку, соединяющему границу Ω с точкой $(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} c)$, приходим к формулам (3.12). $\square$

З а м е ч а н и е. В случае $a = c$ последняя теорема приводит к уже известной формуле (2.5) для объема правильного гиперболического тетраэдра.

Действительно, из формул (3.14) и (3.13) полная производная функции $V = V(a, c)$ по переменной a при условии $a = c$ находится как

$$\frac{dV}{da} = \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial c}\frac{dc}{da}\bigg|_{a=c} = \frac{3\,a\, \operatorname{sh} a}{(1+2\operatorname{ch} a)\sqrt{(\operatorname{ch} a + 1)\,(3\operatorname{ch} a + 1)}}\,.$$

Осталось заметить, что выражение справа совпадает с подынтегральной функцией в формуле (2.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Матвеев С.В., Фоменко А.Т.** Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 1. С. 5–22.
2. **Weeks J.** Hyperbolic structures on 3-manifolds. Ph. D. Thesis. Princeton: Princeton University, 1985.
3. **Thurston W.P.** The Geometry and topology of three-manifolds. Lecture Notes. Princeton: Princeton University, 1980. 502 p.
4. **Gabai D., Meyerhoff R., Milley P.** Minimum volume cusped hyperbolic three-manifolds // J. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 22. P. 1157–1215.

5. **Milnor J.** Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 6, iss. 1. P. 9–24.
6. **Cho Yu., Kim H.** On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // Disc. Comp. Geom. 1999. Vol. 22. P. 347–366.
7. **Murakami J., Yano M.** On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron // Comm. Anal. Geom. 2005. Vol. 13. P. 379–200.
8. **Ushijima A.** Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra // Non-Euclidean geometries / eds. A. Prékopa, E. Molnár. 2006. P. 249–265. (Mathematics and Its Applications, vol. 581).
9. **Деревнин Д.А., Медных А.Д.** О формуле объема гиперболического тетраэдра // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 2. С. 159–160.
10. **Sforza G.** Ricerche di estensionimetria differenziale negli spazi metrico-projettivi // Modena Mem. Acc. 1906. Ser. III, VIII (Appendice). P. 21–66 (in Italian).
11. **Abrosimov N.V., Mednykh A.D.** Volumes of polytopes in spaces of constant curvature // Rigidity and Symmetry / eds. R. Connelly, A. Ivić Weiss , W. Whiteley. N. Y.: Springer, 2014. P. 1–26. (Fields Institute Communications; vol. 70). doi: 10.1007/978-1-4939-0781-6_1 .
12. **Абросимов Н.В., Кудина Е.С., Медных А.Д.** Об объеме гиперболического октаэдра, допускающего $\overline{3}$-симметрию // Тр. МИАН. 2015. Т. 288. С. 7–15. doi: 10.1134/S037196851501001X .
13. **Johnson N.W.** Geometries and transformations. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 350 p. ISBN-10: 1107103401 .
14. **Понарин Я.П.** Элементарная геометрия: в 2-х томах. Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. М.: МЦНМО, 2015. 256 с.
15. **Винберг Э.Б.** Геометрия 2. Современные проблемы математики. ВИНИТИ (Итоги науки и техники). Т. 29. 1988. 268 с.

Поступила 15.06.2017

Абросимов Николай Владимирович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск
e-mail: abrosimov@math.nsc.ru

Выонг Хыу Бао
ведущий инженер
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск
e-mail: vuonghuubao@live.com

REFERENCES

1. Matveev S., Fomenko A. Isoenergetic surfaces of Hamiltonian systems, the enumeration of three-dimensional manifolds in order of growth of their complexity, and the calculation of the volumes of closed hyperbolic 3-manifolds. *Russian Math. Surveys*, 1988, vol. 43, no. 1, pp. 3–24. doi: 10.1070/RM1988v043n01ABEH001554 .
2. Weeks J., Hyperbolic structures on 3-manifolds. *Ph. D. Thesis.* Princeton: Princeton University, 1985.
3. Thurston W.P. *The Geometry and topology of three-manifolds. Lecture notes.* Princeton, Princeton Univ., 1980, 502 p.
4. Gabai D., Meyerhoff R., Milley P. Minimum volume cusped hyperbolic three-manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 2009, vol. 22, no. 4, pp. 1157–1215. doi: 10.1090/S0894-0347-09-00639-0 .
5. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1982, vol. 6, no. 1, pp. 9–24. doi: 10.1090/S0273-0979-1982-14958-8 .
6. Cho Yu., Kim H. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra. *Disc. Comp. Geom.*, 1999, vol. 22, no. 3, pp. 347–366. doi: 10.1007/PL00009465 .
7. Murakami J., Yano M. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron. *Comm. Anal. Geom.*, 2005, vol. 13, no. 2, pp. 379–400. doi: 10.4310/CAG.2005.v13.n2.a5 .

8. Ushijima A. Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra. In: *Non-Euclidean geometries*, eds. A. Prékopa, E. Molnár. 2006, ser. Mathematics and Its Applications, vol. 581, pp. 249–265. doi: 10.1007/0-387-29555-0_13 .
9. Derevnin D.A., Mednykh A.D. A formula for the volume of a hyperbolic tetrahedron. *Russ. Math. Surv.*, 2005, vol. 60, no. 2, pp. 346–348. doi: 10.1070/RM2005v060n02ABEH000833 .
10. Sforza G. Ricerche di estensionimetria differenziale negli spazi metrico-projettivi. *Modena Mem. Acc.*, 1906. Ser. III, VIII (Appendice), pp. 21–66 (in Italian).
11. Abrosimov N.V., Mednykh A.D. Volumes of polytopes in spaces of constant curvature. In: *Rigidity and Symmetry*, eds. R. Connelly, A. Ivić Weiss , W. Whiteley. N. Y.: Springer, 2014, Ser. Fields Institute Communications, vol. 70, pp. 1–26. doi: 10.1007/978-1-4939-0781-6_1 .
12. Abrosimov N.V., Kudina E.S., Mednykh A.D. On the volume of hyperbolic octahedron with $\overline{3}$-symmetry. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, pp. 1–9. doi: 10.1134/S0081543815010010 .
13. Johnson N.W. *Geometries and transformations.* Cambridge: Cambridge University Press, 2017, 350 p. ISBN-10: 1107103401 .
14. Ponarin Ya.P. *Elementarnaya geometriya. Tom 2. Stereometriya, preobrazovaniya prostranstva.* [Elementary geometry. Vol. 2: Stereometry, space transformation]. Moscow: Publ. MTsNMO, 2015, 256 p. ISBN: 978-5-4439-0369-9 .
15. Alekseevskij D.V., Vinberg E.B., Solodovnikov A.S. *Geometry of Spaces of Constant Curvature.* In: *Geometry II. Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. 29. ed. E. B. Vinberg, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1993, pp. 1–138. doi: 10.1007/978-3-662-02901-5_1 .

The paper was received by the Editorial Office on June 15, 2017.

Nikolai Vladimirovich Abrosimov. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: abrosimov@math.nsc.ru .

Vuong Huu Bao, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: vuonghuubao@live.com .