ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 512.54

О КОММУТАНТАХ КОНЕЧНЫХ 2-ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ИНВОЛЮЦИЯМИ

Б. М. Веретенников

Для конечной группы G минимальное число порождающих обозначается через $d(G)$. Под G' мы понимаем коммутант группы G. А. Д. Устюжанинов в 1975 г. опубликовал без доказательства список конечных 2-групп, порожденных тремя инволюциями, с элементарным абелевым коммутантом. В частности, $d(G') \leq 5$ для такой группы G. В продолжение этой темы интересно классифицировать все конечные 2-группы, порожденные n инволюциями (для любого $n \geq 2$), с элементарным абелевым коммутантом. В статье доказывается, что если конечная 2-группа G порождается n инволюциями и $d(G) = n$, то

$$d(G') \leq \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n},$$

для любого $n \geq 2$, причем верхняя граница достигается. Кроме того, для любого $n \geq 2$ строится конечная 2-группа, порожденная n инволюциями с элементарным абелевым коммутантом ранга

$$\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n}.$$

Метод построения этой группы аналогичен методу, используемому автором в ряде работ для построения конечных групп Альперина. Мы получим нашу группу как последовательное полупрямое произведение групп порядка 2. Приводится также пример бесконечной 2-группы, порожденной инволюциями, с бесконечным элементарным абелевым коммутантом, полученным из построенных конечных 2-групп.

Ключевые слова: 2-группа, порождение инволюциями, коммутант группы.

B. M. Veretennikov. On the commutator subgroups of finite 2-groups generated by involutions.

For a finite group G we denote by $d(G)$ the minimum number of its generators and by G' the commutator group of G. In 1975 Ustyuzhaninov published without proof the list of finite 2-groups generated by three involutions with elementary abelian commutator subgroup. In particular, $d(G') \leq 5$ for such a group G. Continuing this research, we pose the problem of classifying all finite 2-groups generated by n involutions (for any $n \geq 2$) with elementary abelian commutator subgroup. For a finite 2-group G generated by n involutions with $d(G) = n$, we prove that

$$d(G') \leq \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n}$$

for any $n \geq 2$ and that the upper bound is attainable. In addition, we construct for any $n \geq 2$ a finite 2-group generated by n involutions with elementary abelian commutator subgroup of rank $\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n}$. The method of constructing this group is similar to the method used by the author in a number of papers for the construction of Alperin's finite groups. We obtain G as the consecutive semidirect product of groups of order 2. We also give an example of an infinite 2-group generated by involutions with infinite elementary abelian commutator subgroup; the example is obtained from the constructed finite 2-groups.

Keywords: 2-group, generation by involutions, commutator subgroup.

MSC: 20D15

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-77-84

Введение

А. Д. Устюжанинов в [1] рассматривал конечные 2-группы, порожденные тремя инволюциями, с элементарным абелевым коммутантом. В частности, он анонсировал, что если конечная 2-группа G порождается инволюциями a, b и c, то G' порождается коммутаторами

$$[a, b], [a, c], [b, c], [a, b, c], [a, c, b].$$

На самом деле, в [1] приведен список таких групп, но доказательство полноты списка не было опубликовано.

В предлагаемой статье получен следующий результат.

Теорема. *Пусть G — конечная 2-группа, $d(G) = n \geq 2$ и G порождается n инволюциями. Тогда*

$$d(G') \leq \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \dots + (n-1)\binom{n}{n},$$

причем верхняя граница достигается.

В разд. 1 статьи доказывается неравенство для $d(G')$, а в разд. 2 для любого $n \geq 2$ строится конечная 2-группа G с элементарным абелевым коммутантом, которая удовлетворяет условию теоремы и для которой верхняя граница для $d(G')$, указанная в теореме, достигается. В конце статьи приводится также пример бесконечной 2-группы, порожденной инволюциями, с бесконечным элементарным абелевым коммутантом, полученным из построенных конечных 2-групп.

Используемые в статье обозначения и понятия являются стандартными (см., например, [2, гл. 1]). В частности, $d(G)$ — минимальное число порождающих группы G, метабелевость группы G означает равенство $G'' = 1$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k.

В вычислениях автор использует основные коммутаторные тождества $[ab, c] = [a, c]^b[b, c]$, $[a, bc] = [a, c][a, b]^c$ и тождество Витта $[a, b, c][b, c, a][c, a, b] = 1$, справедливое в любой метабелевой группе.

Кроме того, будем использовать тот факт, что в любой метабелевой группе G для любых $x \in G$, $t \in G'$ и любого целого числа n верно $[t, x]^n = [t^n, x]$.

Договоримся также под $i_1, i_2, \dots, \widehat{i_m}, \dots i_k$ понимать последовательность всех указанных индексов $i_1, \dots, i_k$ без индекса i_m. Для упрощения записи часто в последовательности $i_1, \dots, i_k$ будем опускать запятые: $i_1 \dots i_k$.

Отметим также еще четыре важных вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть G — группа. Если $x^2 \in Z(G)$, то для любого $y \in G$ справедливо равенство $[y, x]^x = [y, x]^{-1}$, т. е. $[y, x, x] = [y, x]^{-2}$.*

Доказательство. Имеем $1 = [y, x^2] = [y, x][y, x]^x$, откуда следует требуемое. □

Лемма 2. *Если G — метабелева группа, то для любого $x \in G$ и любых $y_1, \dots, y_m$ из G значение коммутатора $[x, y_1, \dots, y_m]$ не меняется при любой перестановке местами элементов $y_1, \dots, y_m$ в этом коммутаторе.*

Доказательство. При $m = 2$ имеем $[x, y_1, y_2][y_1, y_2, x][y_2, x, y_1] = 1$. Ввиду того, что $[y_1, y_2, x] = 1$, получаем $[x, y_2, y_1] = [y_2, x, y_1]^{-1} = [x, y_1, y_2]$, что и требовалось.

Общий случай доказывается индукцией по m. □

Лемма 3. *Если G — метабелева группа, G' — элементарный абелев коммутант, $a_1, \dots, a_n$ — инволюции из G, не все попарно различные, то $[a_1, a_2, \dots, a_n] = 1$.*

Доказательство. Если среди $a_3, \dots, a_n$ есть два одинаковых элемента, равных c, то в силу леммы 2 имеем $[a_1, \dots, a_n] = [a_1, a_2, c, c, \dots] = 1$, так как $[a_1, a_2, c, c] = [a_1, a_2, c]^{-2} = 1$ по лемме 1.

Если, например, $a_1 = a_j = c$ при $j > 2$, то $[a_1, \dots, a_n] = [c, a_2, c, \dots] = 1$, так как $[c, a_2, c] = [c, a_2]^{-2} = 1$. □

Лемма 4 [3, лемма 2]. *Пусть H — конечная группа, заданная образующими $b_1, \dots, b_n$ и определяющими соотношениями $w_i(b_1, \dots, b_n) = 1$, где $1 \leq i \leq s$. Пусть далее k — натуральное число и группа K задана образующими $b_1, \dots, b_n$ и b, определяющими соотношениями* *группы H и добавленными определяющими соотношениями $b_i^b = v_i(b_1, \dots, b_n)$, где $1 \le i \le n$, а также $b^k = 1$. Пусть, кроме того, выполнены следующие условия для группы H:*

1) $\langle v_1(b_1, \dots, b_n), \dots, v_n(b_1, \dots, b_n)\rangle = H$;

2) b сохраняет все определяющие соотношения группы H в том смысле, что для любого $i = \overline{1, s}$ $w_i(v_1(b_1, \dots, b_n), .., v_n(b_1, \dots, b_n)) = 1$ — верное равенство в группе H;

3) k-я степень автоморфизма ψ группы H, индуцированного отображением $b_i \mapsto v_i(b_1, \dots, b_n)$, где $1 \le i \le n$, равна id_H.

Тогда $K = H \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $|b| = k$.

1. Доказательство первой части теоремы

При доказательстве теоремы можно считать, что G' — элементарная абелева группа. Тогда при $n = 3$ любой коммутатор веса ≥ 4, составленный из a_1, a_2, a_3, содержит одинаковые элементы и потому равен 1 по лемме 3. Таким образом, G' порождается коммутаторами $[a_1, a_2]$, $[a_1, a_3]$, $[a_2, a_3]$, $[a_1, a_2, a_3]$, $[a_2, a_3, a_1]$ и $[a_3, a_1, a_2]$. Но так как произведение трех последних коммутаторов равно 1, то $d(G') \le 5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Лемма 5. *Пусть $k \ge 3$. Тогда для любого набора $i_1, i_2, \dots, i_k$ попарно различных целых индексов из $[1, n]$, такого что $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, коммутаторы веса k, составленные из $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$, выражаются в виде произведений коммутаторов*

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}], [a_{i_1}, a_{i_3}, a_{i_2}, a_{i_4}, \dots, a_{i_k}], [a_{i_1}, a_{i_4}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_k}], \dots, [a_{i_1}, a_{i_k}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_{k-1}}],$$

где в каждом коммутаторе нет повторяющихся элементов и индексы элементов, стоящих на местах, начиная с третьего, образуют строго возрастающую последовательность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем индукцию по k. При $k = 3$ утверждение верно, так как в силу тождества Витта имеем

$$[a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_1}] = [a_{i_1}, a_{i_3}, a_{i_2}][a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}].$$

Пусть теперь $k > 3$. Тогда любой коммутатор $[b_1, \dots, b_k]$, составленный из $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$, в котором a_{i_k} находится на месте с номером, большим 2, равен коммутатору $[c_1, \dots, c_k]$, составленному из тех же элементов, где $c_k = a_{i_k}$. По предположению индукции $[c_1, \dots, c_k]$ выражается в виде произведения коммутаторов

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_{k-1}}, a_{i_k}], [a_{i_1}, a_{i_3}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}}, a_{i_k}], \dots, [a_{i_1}, a_{i_{k-1}}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-2}}, a_{i_k}],$$

где в каждом коммутаторе индексы элементов, стоящих на местах, начиная с третьего, образуют строго возрастающую последовательность.

Далее, коммутатор $[a_{i_1}, a_{i_k}, d_3, \dots, d_k]$, составленный из тех же элементов $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$, равен $[a_{i_1}, a_{i_k}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}}]$, а коммутатор $[a_{i_s}, a_{i_k}, \dots]$, составленный из тех же элементов при $s \ne 1$, преобразуем с помощью тождества Витта в метабелевой группе следующим образом:

$$[a_{i_s}, a_{i_k}, a_{i_1}, \dots] = [a_{i_k}, a_{i_1}, a_{i_s}, \dots][a_{i_1}, a_{i_s}, a_{i_k}, \dots] = [a_{i_1}, a_{i_k}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots][a_{i_1}, a_{i_s}, a_{j_3}, \dots, a_{j_k}],$$

где все коммутаторы состоят из тех же элементов $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ и в возрастающей последовательности индексов $j_3, \dots, j_k$, отличных от i_1 и i_s, индекс j_k равен i_k. Таким образом, доказано, что при любом расположении элементов $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ в коммутаторе $[b_1, \dots, b_k]$ этот коммутатор выражается через $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}], [a_{i_1}, a_{i_3}, a_{i_2}, a_{i_4}, \dots, a_{i_k}], \dots, [a_{i_1}, a_{i_k}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_{k-1}}]$, что и требовалось. $\square$

Далее, при любом $k \in [3, n]$ число наборов целых индексов $i_1, \ldots, i_k \in [1, n]$ таких, что $i_1 < \cdots < i_k$, равно $\binom{n}{k}$, и по лемме 5 коммутаторы веса k, составленные из $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, выражаются через $(k-1)$ коммутаторов, указанных в лемме 5. Поэтому с учетом порождающих коммутаторов $[a_i, a_j]$, $1 \leq i < j \leq n$, все коммутаторы весов от 2 до n, составленные из $a_1, \ldots, a_n$, могут быть выражены через

$$\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n}$$

коммутаторов, описанных для любого их веса k в лемме 5. □

2. Доказательство второй части теоремы

Пусть $n = 3$. Введем символы $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{123}, a_{132}$. Далее рассмотрим элементарную абелеву группу $H = \langle a_{12}\rangle \times \langle a_{13}\rangle \times \langle a_{23}\rangle \times \langle a_{123}\rangle \times \langle a_{132}\rangle$ порядка 32. Пусть

$$G = ((H\langle a_1\rangle)\,\langle a_2\rangle)\,\langle a_3\rangle,$$

где

$$[a_{12}, a_1] = [a_{13}, a_1] = 1, [a_{23}, a_1] = a_{123},$$

$$[a_{12}, a_2] = [a_{23}, a_2] = 1, [a_{13}, a_2] = a_{132},$$

$$[a_{13}, a_3] = [a_{23}, a_3] = 1, [a_{12}, a_3] = a_{123},$$

$$[a_1, a_2] = a_{12}, [a_1, a_3] = a_{13}, [a_2, a_3] = a_{23}, |a_1| = |a_2| = |a_3| = 2.$$

С помощью леммы 4 непосредственно можно проверить, что $G = ((H \leftthreetimes \langle a_1\rangle) \leftthreetimes \langle a_2\rangle) \leftthreetimes \langle a_3\rangle$, в частности, G — группа порядка 2^8, порожденная инволюциями a_1, a_2, a_3, в которой $G' = H$ и $|G'| = 2^5$.

Пусть теперь $n \geq 4$. Построим конечную 2-группу G, порожденную инволюциями $a_1, \ldots, a_n$, в которой G' — элементарная абелева группа ранга

$$\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n}.$$

Для этого при любом натуральном $k \geq 2$ и любом наборе $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ целых индексов из $[1, n]$ введем $k-1$ символов $a_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k}, a_{i_1 i_3 i_2 i_4 \ldots i_k}, \ldots, a_{i_1 i_k i_2 i_3 \ldots i_{k-1}}$, индексированных последовательностями указанных индексов, в которых, начиная с третьего места, все индексы расположены в порядке строгого возрастания и не совпадают с первыми двумя индексами.

Кроме того, символ $a_{j_1 \ldots j_k}$ считаем равным 1 при условии совпадения каких-либо индексов в последовательности $j_1 \ldots j_k$.

Для большей прозрачности вычислений при фиксированных $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ эти символы разобьем на три группы, в двух из которых по одному символу:

a) $a_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k}$,

b) $a_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}$, где $3 \leq m \leq k-1$,

c) $a_{i_1 i_k i_2 i_3 \ldots i_{k-1}}$.

Заметим, что при $k = 2$ имеем лишь символ $a_{i_1 i_2}$, который относится к группе a), а при $k = 3$ имеем лишь два символа $a_{i_1 i_2 i_3}$ и $a_{i_1 i_3 i_2}$, относящиеся к a) и c).

Пусть

$$H = \prod_{\substack{2 \leq k \leq n \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n}}^{n} \left(\langle a_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_k}\rangle \times \langle a_{i_1 i_3 i_2 \ldots i_k}\rangle \times \cdots \times \langle a_{i_1 i_k i_2 i_3 \ldots i_{k-1}}\rangle\right)$$

есть прямое произведение групп, где каждый множитель имеет порядок 2.

Тогда, как показано в доказательстве леммы 5, H — элементарная абелева группа ранга

$$\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \dots + (n-1)\binom{n}{n}.$$

К группе H последовательно за n шагов с помощью соотношений, указанных ниже, присоединим инволюции $a_1, a_2, \dots, a_n$. Пусть $1 \le r \le n$ и $2 \le k \le n$. Тогда определим коммутаторы элементов в пунктах a), b), c) с элементом a_r следующим образом.

1) При $i_1 < r$ положим

$$[a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k}, a_r] = a_{i_1 i_2 j_2 \dots j_k}, \tag{1}$$

где возрастающая последовательность $j_2, \dots, j_k$ состоит из индексов $i_3, \dots, i_k$ без индекса i_2 и включает в себя r.

При $r < i_1$ положим

$$[a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k}, a_r] = a_{r i_1 i_2 \dots i_k} a_{r i_2 i_1 i_3 \dots i_k}. \tag{2}$$

2) При $3 \le m \le k-1$ и $i_1 < r$ положим

$$[a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_r] = a_{i_1 i_m j_2 \dots j_k}, \tag{3}$$

где возрастающая последовательность $j_2, \dots, j_k$ состоит из индексов $i_2, \dots, i_k$ без i_m и включает в себя r.

При $3 \le m \le k-1$ и $r < i_1$ положим

$$[a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_r] = a_{r i_1 i_2 \dots i_m \dots i_k} a_{r i_m i_1 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}. \tag{4}$$

3) При $i_1 < r$ положим

$$[a_{i_1 i_k i_2 \dots i_{k-1}}, a_r] = a_{i_1 i_k j_2 \dots j_k}, \tag{5}$$

где возрастающая последовательность $j_2, \dots, j_k$ состоит из индексов $i_2, \dots, i_{k-1}$ и r.

При $r < i_1$ положим

$$[a_{i_1 i_k i_2 \dots i_{k-1}}, a_r] = a_{r i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k} a_{r i_k i_1 i_2 \dots i_{k-1}}. \tag{6}$$

4) При условии, что в последовательности $i_1 \dots i_k$ есть индекс, совпадающий с r, считаем, что

$$[a_{i_1 \dots i_k}, a_r] = 1.$$

И, наконец, при $s < r$ коммутатор $[a_s, a_r]$ определим равным a_{sr}.

Таким образом, на первом шаге присоединим инволюцию a_1 с помощью соотношений (1)–(6) при $r = 1$. Полученную группу $H\langle a_1 \rangle$ обозначим через H_1.

На втором шаге к H_1 присоединим инволюцию a_2 с помощью соотношений (1)–(6) при $r = 2$ и соотношения $[a_1, a_2] = a_{12}$. Полученную группу $H_1\langle a_2 \rangle$ обозначим через H_2.

На третьем шаге к H_2 присоединим инволюцию a_3 с помощью соотношений (1)–(6) при $r = 3$ и соотношений $[a_1, a_3] = a_{13}$ и $[a_2, a_3] = a_{23}$. Полученную группу $H_2\langle a_3 \rangle$ обозначим через H_3. Продолжая процесс, на n-м шаге получим группу H_n, которую обозначим через G.

Заметим далее, что в равенствах (1)–(6) при заменах a_r на a_r^2 получатся единицы, так как в силу п. 4) имеем для любой допустимой последовательности $j_1 \dots j_{k+1}$, содержащей r

$$(a_{j_1 \dots j_{k+1}})^{a_r} = a_{j_1 \dots j_{k+1}} [a_{j_1 \dots j_{k+1}}, a_r] = a_{j_1 \dots j_{k+1}}.$$

Также в равенстве $[a_s, a_r]$ при замене a_r на a_r^2 получим $[a_s, a_r^2] = a_{sr} a_{sr}^r = a_{sr}^2 = 1$.

Поэтому в соответствии с леммой 4 для обоснования того, что на n-м шаге получится группа $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, в которой имеется нормальный ряд подгрупп

$$H < H_1 = H \leftthreetimes \langle a_1 \rangle < \dots < H_r = H_{r-1} \leftthreetimes \langle a_r \rangle < \dots < H_n = G = H_{n-1} \leftthreetimes \langle a_n \rangle$$

с фактор-группами порядка 2, требуется проверить для любого $r \in [1, n]$ сохранение всех равенств, указанных в пп. 1)–3) выше, а также равенств вида $[a_s, a_r] = a_{sr}$ при $s < r$ под действием любого элемента a_t, где $r < t$.

Рассмотрим сначала в силу наибольшей общности п. 2) сохранение равенств, указанных в этом пункте.

Пусть $1 \le r < t \le n$. Проверим сохранение равенства (3) под действием a_r при $i_1 < r$. Нужно доказать, что при $3 \le m \le n-1$ верно равенство

$$[a_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}, a_r]^{a_t} = a^{a_t}_{i_1 i_m j_2 \ldots j_k}, \tag{7}$$

где возрастающая последовательность $j_2, \ldots, j_k$ состоит из индексов $i_2, \ldots, i_k$ без i_m и включает в себя r. Заметим, что $i_1 < r$ влечет $i_1 < t$.

Преобразуем параллельно левую и правую части данного равенства. Получим

$$[a^{a_t}_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}, a^{a_t}_r] = a^{a_t}_{i_1 i_m j_2 \ldots j_k},$$

$$[a_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}[a_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}, a_t], a_r a_{rt}] = a_{i_1 i_m j_2 \ldots j_k}[a_{i_1 i_m j_2 \ldots j_k}, a_t],$$

$$[a_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k} a_{i_1 i_m s_2 \ldots s_k}, a_r a_{rt}] = a_{i_1 i_m j_2 \ldots j_k} a_{i_1 i_m l_2 \ldots l_{k+1}},$$

где возрастающая последовательность $s_2, \ldots, s_k$ состоит из индексов $i_2, \ldots, i_k$ без i_m и включает в себя индекс t, а возрастающая последовательность $l_2, \ldots, l_{k+1}$ состоит из индексов $i_2, \ldots, i_k$ без i_m и включает в себя r и t.

И, наконец, преобразуя левую часть последнего равенства, имеем

$$[a_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}, a_r][a_{i_1 i_m s_2 \ldots s_k}, a_r] = a_{i_1 i_m j_2 \ldots j_k} a_{i_1 i_m l_2 \ldots l_{k+1}},$$

$$a_{i_1 i_m j_2 \ldots j_k} a_{i_1 i_m p_2 \ldots p_{k+1}} = a_{i_1 i_m j_2 \ldots j_k} a_{i_1 i_m l_2 \ldots l_{k+1}},$$

где возрастающая последовательность $p_2, \ldots, p_{k+1}$ состоит из индексов $s_2, \ldots, s_k$ и r, т. е. она состоит из индексов $i_2, \ldots, i_k$ без i_m, а также включает в себя t и r. Таким образом, равенство (7) верно, что означает сохранение равенства (3) под действием a_t.

Пусть снова $1 \le r < t \le n$, $i_1 > r$. Проверим сохранение равенства (4) под действием a_t. Нужно доказать при $3 \le m \le n-1$, что

$$[a_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}, a_r]^{a_t} = a^{a_t}_{r i_1 i_2 \ldots i_m \ldots i_k} a^{a_t}_{r i_m i_1 i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k},$$

т. е.

$$\begin{gathered}[a_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}[a_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}, a_t], a_r a_{rt}] \\ = a_{r i_1 i_2 \ldots i_m \ldots i_k}[a_{r i_1 i_2 \ldots i_m \ldots i_k}, a_t] a_{r i_m i_1 i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}[a_{r i_m i_1 i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}, a_t].\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь придется рассмотреть два случая:

а) $r < t < i_1$,

б) $r < i_1 < t$.

В случае а) равенство (8) можно переписать следующим образом:

$$\begin{gathered}[a_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k} a_{t i_1 i_2 \ldots i_m \ldots i_k} a_{t i_m i_1 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}, a_r a_{rt}] \\ = a_{r i_1 i_2 \ldots i_m \ldots i_k} a_{r i_1 j_2 \ldots j_{k+1}} a_{r i_m i_1 i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k} a_{r i_m p_2 \ldots p_{k+1}},\end{gathered} \tag{9}$$

где возрастающая последовательность $j_2 \ldots j_{k+1}$ состоит из индексов $i_2, \ldots, i_m, \ldots, i_k$ и индекса t, а возрастающая последовательность $p_2 \ldots p_{k+1}$ состоит из индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ без i_m и включает в себя индекс t. Преобразуем теперь левую часть равенства (9):

$$[a_{i_1 i_m i_2 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}, a_r][a_{t i_1 i_2 \ldots i_m \ldots i_k}, a_r][a_{t i_m i_1 \ldots \widehat{i_m} \ldots i_k}, a_r]$$

$$= a_{ri_1i_2\ldots i_m\ldots i_k} a_{r i_m i_1\ldots \widehat{i_m}\ldots i_k} a_{rti_1i_2\ldots i_m\ldots i_k} a_{ri_1ti_2\ldots i_k} a_{rti_1\ldots i_m\ldots i_k} a_{r i_m t i_1\ldots \widehat{i_m}\ldots i_k}$$

$$= a_{ri_1i_2\ldots i_m\ldots i_k} a_{r i_m i_1\ldots \widehat{i_m}\ldots i_k} a_{ri_1ti_2\ldots i_k} a_{r i_m t i_1\ldots \widehat{i_m}\ldots i_k}.$$

Сопоставляя полученное выражение и правую часть равенства (9), получаем, что они равны. Таким образом, a_t сохраняет (4) при $r < t < i_1$.

Рассмотрим теперь случай б): $r < i_1 < t$. В этом случае равенство (8) преобразуется следующим образом:

$$[a_{i_1 i_m i_2\ldots \widehat{i_m}\ldots i_k} a_{i_1 i_m j_2\ldots j_k}, a_r a_{rt}] = a_{ri_1i_2\ldots i_m\ldots i_k} a_{ri_1p_2\ldots p_{k+1}} a_{r i_m i_1 i_2\ldots \widehat{i_m}\ldots i_k} a_{r i_m q_2\ldots q_{k+1}}, \tag{10}$$

где возрастаюшая последовательность $j_2 \ldots j_k$ состоит из индексов $i_2, \ldots, i_k$ без i_m и включает в себя индекс t, возрастающая последовательность $p_2 \ldots p_{k+1}$ состоит из индексов $i_2, \ldots, i_k$ и t, возрастающая последовательность $q_2 \ldots q_{k+1}$ состоит из индексов $i_1, \ldots, i_k$ без i_m и включает в себя индекс t.

Преобразуем теперь левую часть равенства (10):

$$[a_{i_1 i_m i_2\ldots \widehat{i_m}\ldots i_k}, a_r][a_{i_1 i_m j_2\ldots j_k}, a_r] = a_{ri_1i_2\ldots i_m\ldots i_k} a_{r i_m i_1\ldots \widehat{i_m}\ldots i_k} a_{ri_1s_2\ldots s_{k+1}} a_{r i_m v_2\ldots v_{k+1}},$$

где возрастающая последовательность $s_2 \ldots s_{k+1}$ состоит из $i_2, \ldots, i_m, \ldots, i_k, t$, а возрастающая последовательность $v_2 \ldots v_{k+1}$ состоит из $i_1, \ldots, i_m, \ldots, i_k$ без индекса i_m и включает в себя t.

Сопоставляя полученное выражение и правую часть равенства (10), получаем истинное равенство.

Доказательство сохранения равенств (1), (2), (5), (6) под действием a_t при $t > r$ расписывать не будем, так как оно проводится аналогично рассмотренному выше доказательству сохранения равенств (3) и (4) под действием a_t при $t > r$.

Рассмотрим теперь равенство

$$[a_s, a_r] = a_{sr}, \tag{11}$$

где $s < r$ и $t > r$. Тогда под действием элемента a_t на это равенство имеем $[a_s a_{st}, a_r a_{rt}] = a_{sr} a_{srt}$, что равносильно равенству $[a_s, a_{rt}][a_s, a_r][a_{st}, a_r] = a_{sr} a_{srt}$, т. е. $[a_{rt}, a_s]^{-1} a_{sr} a_{str} = a_{sr} a_{srt}$, что, в свою очередь, означает $a_{srt} a_{str} a_{sr} a_{str} = a_{sr} a_{srt}$. Получили верное равенство, что означает сохранение равенства (11) под действием элемента a_t при $t > r$.

Итак, группа G имеет строение

$$G = (\ldots((G' \leftthreetimes \langle a_1\rangle) \leftthreetimes \langle a_2\rangle)\ldots) \leftthreetimes \langle a_n\rangle,$$

где

$$d(G') = \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n}$$

и все a_i — инволюции. □

Обозначим через G_n, где $n \geq 3$, группу, построенную выше. Тогда $G_3 \subset G_4 \subset \cdots \subset G_n \subset \ldots$, и если $G = \bigcup_{n=3}^{\infty} G_n$, то G порождается инволюциями $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ и имеет элементарный абелев коммутант

$$\prod_{1 \leq i_1 < i_2} \langle a_{i_1 i_2}\rangle \times \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3} (\langle a_{i_1 i_2 i_3}\rangle \times \langle a_{i_1 i_3 i_2}\rangle)$$

$$\times \cdots \times \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \big(\langle a_{i_1 i_2\ldots i_k}\rangle \times \langle a_{i_1 i_3 i_2\ldots i_k}\rangle \times \cdots \times \langle a_{i_1 i_k i_2 i_3\ldots i_{k-1}}\rangle\big) \times \ldots,$$

где все произведения прямые (не декартовы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Устюжанинов А.Д.** Конечные 2-группы, порожденные точно тремя инволюциями. // Всесоюз. алгебр. симпозиум (1975): тез. докл. Ч. I. Гомель, 1975. С. 72.
2. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1977. 240 с.
3. **Веретенников Б.М.** О конечных 2-группах Альперина с циклическими вторыми коммутантами // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 3. С. 326–350.

Веретенников Борис Михайлович
канд. физ.-мат .наук, доцент
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: boris@veretennikov.ru

Поступила 10.04.2017

REFERENCES

1. Ustyuzhaninov A.D. Finite 2-groups generated by exactly three involutions. *All-union algebr. symposium (1975)*, Abstracts, part I, Gomel, 1975, p. 72 (in Russian).
2. Kargapolov M.I., Merzljakov J.I. *Fundamentals of the Theory of Groups*. New York: Springer-Verlag, 1979, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0. Original Russian text published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. Osnovy teorii grupp. Moscow, Nauka Publ, 1977, 240 p.
3. Veretennikov B.M. Finite Alperin 2-groups with cyclic second commutants. *Algebra Logic*, 2011, vol. 50, pp. 226–244. doi: 10.1007/s10469-011-9137-6.

The paper was received by the Editorial Office on April 10, 2017.

Boris Mihajlovich Veretennikov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: boris@veretennikov.ru.