

УДК 515.162.8

ПРОСТЫЕ ДУГИ В ПЛОСКИХ КРИВЫХ И В ДИАГРАММАХ УЗЛОВ¹

Ю. С. Белоусов, А. В. Малютин

В настоящей работе изучаются простые дуги в плоских кривых и в минимальных диаграммах классических узлов. Обозначив через $cr(K)$ число перекрестков узла K , основные результаты статьи можно сформулировать следующим образом: 1) В каждой минимальной диаграмме произвольного узла K найдется простая дуга, проходящая через $\min\{cr(K), 6\}$ перекрестков. 2) У любого узла K , за исключением четырех простых узлов 8_{16} , 8_{18} , 9_{40} и 10_{120} в нумерации Рольфсена, найдется минимальная диаграмма, содержащая простую дугу, проходящую через $\min\{cr(K), 8\}$ перекрестков. Первое утверждение доказывается с использованием техники комбинаторики слов. Мы вводим новый язык для плоских кривых и их хордовых диаграмм. Символы этого языка отвечают длинам хорд. В результате утверждение сводится к вопросу из теории полноты и избегаемости множеств запрещенных слов: мы описываем множество запрещенных слов и доказываем, что язык, слова которого не содержат запрещенных подслов, конечен. Для доказательства второго факта использовались методы алгоритмической топологии: утверждение теоремы сводится к перебору кривых специального вида, после чего описывается компьютерный алгоритм, осуществляющий перебор, и приводится результат его работы.

Ключевые слова: узел, минимальная диаграмма узла, число перекрестков, флайп, плоская кривая, комбинаторика слов, алгоритмическая топология

Yu. S. Belousov, A. V. Malyutin. Simple arcs in plane curves and knot diagrams.

We study simple arcs in plane curves and in minimal diagrams of classical knots. The main results of the paper are as follows. (1) In each minimal diagram of an arbitrary knot K , there exists a simple arc passing through $\min\{cr(K), 6\}$ crossings, where $cr(K)$ denotes the crossing number of K . (2) For any knot K except for the four simple knots 8_{16} , 8_{18} , 9_{40} , and 10_{120} in the notation of the Rolfsen table, there is a minimal diagram with a simple arc passing through $\min\{cr(K), 8\}$ crossings. The first claim is proved using the techniques of combinatorics on words. We introduce a new language for plane curves and their chord diagrams; the symbols of this language correspond to the lengths of the chords. As a result, the statement is reduced to a question in the theory of completeness and avoidability of sets of forbidden patterns: we describe a set of forbidden patterns and prove that the language with no words containing forbidden patterns is finite. To prove the second claim, methods of algorithmic topology are used: the statement reduces to a brute-force search for curves of a special type and then a computer algorithm is described that performs the search; we presents the results of its operation.

Keywords: knot, minimal knot diagram, crossing number, flype, plane curve, combinatorics on words, algorithmic topology.

MSC: 57M25, 57M99

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-63-76

Введение

Комбинаторика плоских кривых и диаграмм узлов образует весьма своеобразную и разветвленную область исследований. К этой области относятся, к примеру, вопросы, касающиеся инвариантов Арнольда, движений Райдемайстера, гауссовых диаграмм и кодов, альтернированных узлов, гипотез Тейта и т. п. Эта область теснейшим образом связана с теориями квантовых инвариантов, виртуальных узлов, планарных графов. В настоящей работе изучаются простые дуги в плоских кривых и в минимальных диаграммах узлов (детальные определения

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта по. 17-01-00128 А.

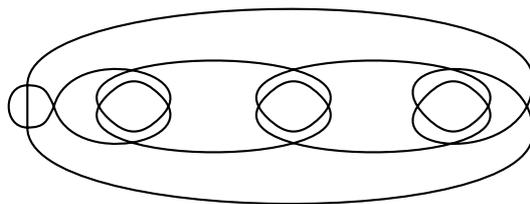


Рис. 1. Кривая, не содержащая простых дуг, проходящей через семь двойных точек.

приведены в разд. 1). Исходной мотивацией для исследования послужили вопросы, возникающие в теории узлов. Эти вопросы имеют следующую природу. Не так давно нами были получены доказательства ряда высказанных в [15] гипотез о меандрическом представлении узлов. Справедливость этих гипотез позволяет ввести серию новых инвариантов узлов. В частности, мы рассматриваем инварианты, сопоставляющие узлу минимальное количество перекрестков диаграммы, представляющей узел и составленной из фиксированного количества простых дуг (см. [5]). Для нас интересен вопрос о связи новых инвариантов с классическими. Доказательство некоторых относящихся к этому вопросу неравенств требует оценок на максимальное число перекрестков диаграммы, расположенных на одной и той же простой дуге диаграммы. Задача о такой оценке представляется довольно естественной (оценка применима при табулировании узлов, зацеплений, тэнглов, нотоидов, при вычислении инвариантов конечной степени по хордовым диаграммам и т. п.), однако, как оказалось, доказательства подобных оценок в литературе отсутствуют. Настоящая работа восполняет этот пробел. Основным ее результатом является следующая теорема (определения используемых в ее формулировке понятий даны в разд. 1).

Теорема 1. 1) В каждой минимальной диаграмме произвольного узла K найдется простая дуга, проходящая через $\min\{cr(K), 6\}$ перекрестков, где $cr(K)$ — число перекрестков.

2) У любого узла с числом перекрестков, большим десяти, найдется минимальная диаграмма, содержащая простую дугу, проходящую через восемь перекрестков.

Следствие 1. У любого узла K , за исключением четырех простых узлов 8_{16} , 8_{18} , 9_{40} и 10_{120} в нумерации Рольфсена [16], найдется минимальная диаграмма, содержащая простую дугу, проходящую через $\min\{cr(K), 8\}$ перекрестков. У каждого из узлов 8_{16} , 8_{18} , 9_{40} и 10_{120} имеется минимальная диаграмма, содержащая простую дугу, проходящую через семь перекрестков.

Отметим, что оценки теоремы 1 точны в следующем смысле. Во-первых, существуют минимальные диаграммы узлов со сколь угодно большим числом перекрестков, не содержащие простых дуг, проходящих через семь перекрестков. Примерами здесь служат, как нетрудно проверить, простейшие «периодические» альтернированные диаграммы для связных сумм произвольного числа трилистников. (Минимальность альтернированных диаграмм без разбивающих² двойных точек утверждается первой гипотезой Тейта, доказанной в [10; 14; 17].) Бесконечная серия минимальных диаграмм *простых* узлов со сколь угодно большим числом перекрестков, не содержащих простых дуг, проходящих через семь перекрестков, возникает при альтернировании перекрестков в кривых приведенного на рис. 1 вида. (Простота альтернированных узлов, представленных неприводимыми³ альтернированными диаграммами, доказана в [11].)

²Точка x диаграммы D называется *разбивающей*, если пространство $D \setminus \{x\}$ несвязно.

³В некоторых случаях термин *неприводимая* в применении к диаграммам узлов и гипотезам Тейта используют для указания на отсутствие разбивающих двойных точек. В настоящей работе неприводимость понимается в смысле определения из разд.1.

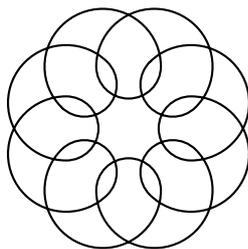


Рис. 2. Кривая, не допускающая флайпов и не содержащая простой дуги, проходящей через девять двойных точек.

Во-вторых, существуют узлы со сколь угодно большим числом перекрестков, у которых ни одна минимальная диаграмма не содержит простых дуг, проходящих через девять перекрестков. Бесконечная серия таких узлов получается альтернированием диаграмм с периодической структурой приведенного на рис. 2 вида. Альтернированная диаграмма подобного вида (рассматриваемая с точностью до автодиффеоморфизма содержащей ее сферы) является единственным минимальным представителем соответствующего узла в силу третьей гипотезы Тейта, доказанной в [12; 13].

1. Предварительные сведения

О п р е д е л е н и я. (Плоские кривые.) В настоящей работе под *замкнутой плоской кривой* понимаются гладкое погружение окружности S^1 в плоскость \mathbb{R}^2 (или в сферу S^2) и его образ. Под *незамкнутой плоской кривой* понимаются гладкое погружение отрезка в плоскость \mathbb{R}^2 (или в сферу S^2) и его образ. Все рассматриваемые кривые находятся в *общем положении*, т. е. не имеют точек самопересечения кратности, большей двух, не имеют точек самокасания, число двойных точек у каждой кривой конечно, во всех этих точках ветви кривой пересекаются трансверсально. Если дана плоская кривая, то *дугой* на ней мы называем сужение погружения (и образ этого сужения) на некоторое подмножество, гомеоморфное отрезку. Кривая (в частности — дуга) называется *простой*, если она является вложением. *Петлей* называется дуга с совпадающими концами. Петля называется *простой*, если она (ее образ) гомеоморфна окружности. *Характеристикой* дуги J на кривой C мы называем количество точек самопересечения кривой C , содержащихся во внутренности дуги. Кривая C называется *приводимой* (или *составной*), если на ней найдется такая пара точек x_1, x_2 , что пространство $C \setminus \{x_1, x_2\}$ несвязно и все его компоненты связности содержат точки самопересечения кривой. В противном случае кривая называется *неприводимой*.

О п р е д е л е н и я. (Узлы.) Мы используем стандартную терминологию теории узлов. Достаточно полную систему определений можно найти, например, в [4; 7; 16]. В настоящей работе *узлом* называются гладкое вложение окружности S^1 в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 (или трехмерную сферу S^3) и его образ, рассматриваемый с точностью до (не обязательно сохраняющего ориентацию) автодиффеоморфизма объемлющего пространства. *Диаграммой* узла называют плоскую кривую общего положения, являющуюся проекцией узла на плоскость или на двумерную сферу и снабженную дополнительной информацией о *проходах* и *переходах* в двойных точках (их называют *перекрестками* диаграммы). Диаграмма узла называется *минимальной*, если ни одна другая диаграмма, представляющая тот же узел, не имеет меньшего числа перекрестков, чем данная. *Числом перекрестков* узла называется число перекрестков в его минимальной диаграмме. Для числа перекрестков узла K используется обозначение $sg(K)$. Узел $K \subset S^3$ называется *тривиальным*, если он лежит на некоторой сфере $S^2 \subset S^3$. Узел $K \subset S^3$ называется *составным*, если найдется сфера $S^2 \subset S^3$, которая пересекает K трансверсально в двух точках, причем ни одна из пар $(B_1, B_1 \cap K)$ и $(B_2, B_2 \cap K)$, где B_1 и B_2 —

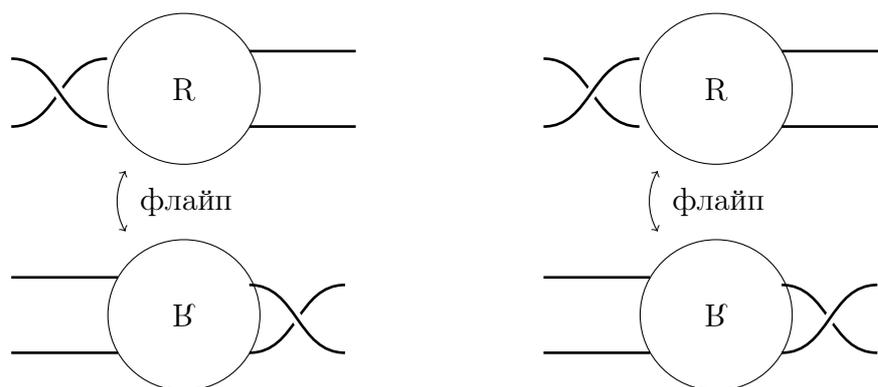


Рис. 3. Флайп.

пары, на которые S^2 разрезает S^3 , не диффеоморфна паре (шар, диаметр). Узел называется *простым*, если он не является ни составным, ни тривиальным. Диаграмма узла называется *альтернированной*, если проходы-переходы чередуются (под-над-под-над...) при обходе вдоль кривой диаграммы. Узел называется *альтернированным*, если у него имеется альтернированная диаграмма. *Флайпами* (или *переворотами*) называются преобразования диаграмм узлов, при которых участок диаграммы изменяется изображенным на рис. 3 образом.

Т е р м и н о л о г и я. (Слова и строки.) Мы без дополнительных оговорок будем использовать стандартную терминологию комбинаторной теории групп и полугрупп и теории алгоритмов на строках (см., например, [2; 9]). В частности, рассматривая конечные и бесконечные последовательности элементов некоторого множества, мы называем это множество *алфавитом*, его элементы — *символами* или *буквами*, а последовательности — *словами* или *строками* над этим алфавитом. При записи слов мы, как правило, опускаем запятые и скобки, обычные для записи последовательностей.

О п р е д е л е н и я. (Гауссов код.) *Хордовая диаграмма* степени n (или порядка n) — это ориентированная окружность, в которой проведены n хорд, все концы которых различны (см. [1]). Хордовые диаграммы рассматриваются с точностью до сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности. С такой точки зрения хордовая диаграмма — это то же самое, что слово длины $2n$ над алфавитом из n букв, в котором каждая буква встречается ровно два раза и рассматривается с точностью до циклических перестановок и замены алфавита (и перестановок букв в алфавите). Такие классы слов называют также *циклическими словами*. На множестве букв циклического слова в качестве канонической рассматривается максимальная метрика, в которой расстояние между соседними буквами равняется единице. *Длиной хорды* в хордовой диаграмме называют расстояние между представляющими хорду буквами в отвечающем диаграмме циклическом слове с канонической метрикой. Пусть $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — плоская гладкая кривая общего положения. Соединив хордами прообразы двойных точек кривой γ , мы получаем *хордовую диаграмму кривой γ* ; отвечающие этой хордовой диаграмме слова называют *гауссовым кодом* кривой γ .

Отметим, что для диаграмм узлов традиционно рассматриваются *гауссовы диаграммы* (это хордовые диаграммы с ориентированными от перехода к проходу хордами), а символы гауссова кода снабжаются дополнительными знаками в соответствии с ориентацией хорд. В настоящей работе эти дополнительные данные не понадобятся.

2. Теорема о простой дуге характеристики шесть

В настоящем разделе доказывается следующая теорема (влекущая первое утверждение теоремы 1).

Теорема 2. *Каждая замкнутая плоская гладкая кривая общего положения с k двойными точками содержит либо простую петлю нулевой характеристики, либо простую дугу характеристики $\min\{k, 6\}$.*

Введем некоторые определения и обозначения.

Пусть $W = w_1 w_2 \dots w_m$ — слово длины m над каким-нибудь алфавитом. Для числа $p \in \{1, \dots, m\}$ положим

$$M_p := \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid w_{(p-k) \bmod m} = w_{(p+k+1) \bmod m}\}.$$

Определим слово $W' = w'_1 w'_2 \dots w'_m$ над алфавитом $A := \{\epsilon, d_0, d_2, d_4, \dots\}$, полагая

$$w'_p := \begin{cases} \epsilon, & \text{если } M_p(W) = \emptyset, \\ d_{2 \cdot \min M_p}, & \text{если } M_p(W) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Слово W' , рассматриваемое с точностью до циклических перестановок, назовем *дистанционным кодом* слова W . *Дистанционным кодом кривой* будем называть дистанционный код соответствующей хордовой диаграммы.

При $m < 10$ в дистанционном коде будем писать m вместо d_m .

Примеры.

| Слово | Дистанционный код |
|---------------------------|------------------------------------|
| ww | 00 |
| aabb | 0 ϵ 0 ϵ |
| 0 ϵ 0 ϵ | $\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon$ |
| 123123 | 222222 |

З а м е ч а н и я. 1. Приведем геометрическую интерпретацию дистанционного кода хордовой диаграммы. Пусть задана хордовая диаграмма степени n . Расположим окружность диаграммы на плоскости в виде геометрически правильной окружности длины $2n$ так, чтобы концы хорд делили ее на равные дуги единичной длины (эти $2n$ дуг будем называть *единичными*), а хорды диаграммы реализуем отрезками. Сопоставим каждой единичной дуге символ алфавита $A = \{\epsilon, d_0, d_2, d_4, \dots\}$ следующим образом. Если в диаграмме имеются хорды, параллельные хорде h_d , соединяющей концы единичной дуги d , сопоставим дуге d символ d_{2r} , где r — расстояние (во внутренней метрике окружности) от дуги d до множества концевых точек указанных хорд; в противном случае сопоставим дуге d символ ϵ . Двигаясь по окружности в направлении выбранной ориентации и записывая символы, отвечающие встречающимся единичным дугам, мы получаем дистанционный код заданной хордовой диаграммы.

2. Если $2r + 1 \leq n$, то символу d_{2r} в дистанционном коде хордовой диаграммы степени n отвечает хорда длины $2r + 1$. Дистанционный код хордовой диаграммы не учитывает хорд четной длины; из теоремы Жордана вытекает, что хордовая диаграмма замкнутой плоской гладкой кривой общего положения не содержит хорд четной длины.

Для доказательства теоремы понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если y замкнутой плоской гладкой кривой общего положения число двойных точек превышает сумму $m + n + 1$, где m и n — натуральные числа, то в дистанционном коде этой кривой символы d_{2m} и d_{2n} не могут находиться ни на расстоянии $|m - n|$, ни на расстоянии $m + n + 1$ друг от друга.*

Доказательство вытекает из того факта, что в хордовой диаграмме концы различных хорд не совпадают. □

В дальнейшем символы $*$ и σ используются следующим образом. Замену символа в том или ином слове на символ $*$ назовем *специальной*. Замену символа в том или ином слове на символ σ назовем *допустимой*, если заменяемый символ лежит в множестве $\{\epsilon, d_6, d_8, \dots\}$. Будем говорить, что в слове W *имеется подслово вида V* , если в W имеется подслово, из которого слово V получено цепочкой специальных и/или допустимых замен.

Лемма 2. *Если у замкнутой плоской гладкой кривой C общего положения число двойных точек превышает четыре, то в ее дистанционном коде не встречаются ни подслова вида $2*2*2*2$, ни подслова вида $2*4*2*4$ и $4*2*4*2$.*

Доказательство. Из определения хордовых диаграмм следует, что в случае, если бы дистанционный код кривой C содержал подслово вида $2*2*2*2$ или подслово вида $2*4*2*4$, петли кривой, отвечающие двойкам, стоящим на первой и пятой позициях в этих подсловах, пересекались бы лишь в одной точке (хорда этого единственного пересечения отвечала бы символу, стоящему в этих подсловах на третьей позиции), а это невозможно по теореме Жордана. Случай подслов вида $4*2*4*2$ следует из соображений симметрии. \square

Заметим, что, как показывает рассуждение из доказательства леммы 2, в дистанционных кодах плоских кривых с достаточно большим числом двойных точек не встречаются подслова вида $2*2*2**4$, $2*2*2***6$, $2***6***2***8$ и т. п.

Лемма 3. *Если замкнутая плоская гладкая кривая C общего положения с не менее чем $\ell/2$ двойными точками не содержит простых дуг характеристики ℓ , а $w_1 \dots w_{\ell-1}$ — подслово в дистанционном коде кривой C , то для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, \ell-1\}$ выполняется условие $w_i = d_{2r}$ с $r \leq 2 \cdot \min\{i-1, \ell-1-i\}$.*

Доказательство. Условие леммы означает, что в гауссовом коде кривой C любое подслово длины ℓ содержит хотя бы одну хорду (пару одинаковых символов). Из теоремы Жордана вытекает, что хордовая диаграмма замкнутой плоской гладкой кривой общего положения не содержит хорд четной длины. Отсюда в силу определения дистанционного кода следует требуемое, поскольку хорды нечетной длины учитываются дистанционным кодом. \square

Следствие 2. *Если кривая C удовлетворяет условиям леммы 3 и вдобавок не содержит простых петель нулевой характеристики, а $w_1 \dots w_{\ell-3}$ — подслово в дистанционном коде кривой C , то для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, \ell-3\}$ выполняется условие $w_i = d_{2r}$ с*

$$r \leq 2 \cdot \min\{i, \ell-2-i\}.$$

Доказательство вытекает из леммы 3, поскольку предположение об отсутствии петель нулевой характеристики означает, что дистанционный код не содержит символа d_0 (0), а всякое подслово длины $\ell-3$ лежит в центре подслова длины $\ell-1$. \square

Предложение 1. *Если замкнутая плоская гладкая кривая общего положения имеет более пяти двойных точек и не содержит ни простых петель нулевой характеристики, ни простых дуг характеристики шесть, то дистанционный код этой кривой не содержит подслов следующих видов:*

| | | |
|----------------------|--|-------------|
| (A1) 24, 42, | (E1) $4\sigma 4, \sigma\sigma\sigma, 4\sigma\sigma, \sigma\sigma 4,$ | (H1) 44444, |
| (A2) $2**2,$ | (E2) $\sigma\sigma,$ | (H2) 4444, |
| (A3) $2***4, 4***2,$ | (E3) 222, | (H3) 444, |
| (A4) $4****4,$ | (E4) 22, | (H4) 44. |

Доказательство пунктов (A1)–(A4) прямо следует из леммы 1.

(E1). Вытекает из следствия 2 (случай $\ell = 6$).

(E2). Из (E1) следует, что (с учетом рассматриваемых ограничений) подслово вида $\sigma\sigma$ должно быть частью подслова вида $2\sigma\sigma 2$. Однако такие подслова исключены леммой 1 (см. (A2)).

(E3). Следующая таблица демонстрирует, что все варианты продолжения слова 222 содержат запрещенные подслова:

| Вариант продолжения | Запрещенное подслово | Метка правила |
|---------------------|----------------------|---------------|
| 222 $\sigma\sigma$ | $\sigma\sigma$ | (E2) |
| 222 $\sigma 4$ | 2***4 | (A3) |
| 222 $\sigma 2$ | 2**2 | (A2) |
| 2224 | 24 | (A1) |
| 2222 | 2**2 | (A2) |

(E4). Переберем возможные продолжения подслова 22:

| Вариант продолжения | Запрещенное подслово | Метка правила |
|---------------------|----------------------|---------------|
| 22 $\sigma\sigma$ | $\sigma\sigma$ | (E2) |
| 22 $\sigma 4$ | – | – |
| 22 $\sigma 2$ | 2**2 | (A2) |
| 224 | 24 | (A1) |
| 222 | 222 | (E3) |

Остается лишь возможность 22 $\sigma 4$. Отсюда из соображений симметрии следует, что (с учетом рассматриваемых ограничений) подслово вида 22 должно быть частью подслова вида 4 σ 22 $\sigma 4$. Однако последние исключены правилом (A4).

(H1). Переберем возможные продолжения:

| Вариант продолжения | Запрещенное подслово | Метка правила |
|----------------------|----------------------|---------------|
| 44444 $\sigma\sigma$ | $\sigma\sigma$ | (E2) |
| 44444 $\sigma 4$ | 4 $\sigma 4$ | (E1) |
| 44444 $\sigma 2$ | 4***2 | (A3) |
| 444444 | 4****4 | (A4) |
| 444442 | 42 | (A1) |

(H2). Продолжение 44444 исключено правилом (H1), остальные варианты продолжений исключаются так же, как в доказательстве пункта (H1).

(H3). Продолжение 4444 исключено правилом (H2), остальные варианты продолжений исключаются так же, как в доказательстве пункта (H1).

(H4). Переберем возможные продолжения подслова 44:

| Вариант продолжения | Запрещенное подслово | Метка правила |
|---------------------------|----------------------|---------------|
| 44 $\sigma\sigma$ | $\sigma\sigma$ | (E2) |
| 44 $\sigma 4$ | 4 $\sigma 4$ | (E1) |
| 44 $\sigma 2\sigma\sigma$ | $\sigma\sigma$ | (E2) |
| 44 $\sigma 2\sigma 4$ | 4****4 | (A4) |
| 44 $\sigma 2\sigma 2$ | 4***2 | (A3) |
| 44 $\sigma 24$ | 24 | (A1) |
| 44 $\sigma 22$ | 4***2 | (A3) |
| 444 | 444 | (H3) |
| 442 | 42 | (A1) |

Предложение 1 доказано.

Теорема 3. *Если замкнутая плоская гладкая кривая общего положения имеет более пяти двойных точек, то она содержит либо простую петлю нулевой характеристики, либо простую дугу характеристики шесть.*

Доказательство. Желая прийти к противоречию, допустим, что найдется кривая C указанного вида, не содержащая ни петли нулевой характеристики, ни простой дуги характеристики шесть, и воспользуемся предложением 1. В силу предложения 1 дистанционный код кривой C не содержит подслов вида $\sigma\sigma$, 44, 22, 24, 42, 4 σ 4. Если бы в этом коде встретился символ 4 (d_4), то в силу запрета на слова 44 и 42 он содержался бы в подслове вида 4 σ , которое содержалось бы в подслове вида 4 σ 2 (в силу запретов на подслова вида $\sigma\sigma$ и 4 σ 4), которое, в свою очередь, содержалось бы в подслове вида 4 σ 2 σ (запреты на 22 и 24), далее — 4 σ 2 σ 4 (запрет на $\sigma\sigma$ и 4***2). Подслово 4 σ 2 σ 4 оканчивается символом 4 и, повторяя приведенные рассуждения, мы приходим к слову периодического вида 4 σ 2 σ 4 σ 2 σ 4 σ 2 σ 4... , запрещенного леммой 2. Если же код не содержит символов 4, то запрет на подслова 22 и $\sigma\sigma$ приводит нас к периодическому слову 2 σ 2 σ 2 σ ..., исключаемому той же леммой 2. Теорема 3 доказана.

Предложение 2. *Если замкнутая плоская гладкая кривая C общего положения имеет не более шести двойных точек, то C содержит либо простую петлю нулевой характеристики, либо простую дугу, проходящую через все двойные точки кривой.*

Доказательство. Желая прийти к противоречию, допустим, что найдется кривая C указанного вида, не содержащая ни петли нулевой характеристики, ни простой дуги, проходящей через все двойные точки кривой.

В случае кривой с шестью двойными точками получаем противоречие с теоремой 3.

В случае кривой с пятью двойными точками из следствия 2 вытекает, что в каждую пару соседних букв дистанционного кода кривой C должен входить символ 2. Если при этом условии дистанционный код содержит подслово 22, то он содержит более пяти букв 2, что невозможно, поскольку имеется всего пять хорд, а каждая из них может давать лишь один символ 2 в хордовой диаграмме степени более трех. Если же дистанционный код не содержит подслова 22, он содержит подслово вида 2*2*2*2, что противоречит лемме 2.

В случае кривой с четырьмя двойными точками из следствия 2 получаем, что дистанционный код кривой C состоит из символов 2, что входит в противоречие с леммой 1.

Случай, когда число двойных точек кривой не превосходит трех, очевиден; при двух и трех двойных точках имеем также противоречие с леммой 3. Предложение 2 доказано.

Доказательство теоремы 2 прямо вытекает из теоремы 3 и предложения 2.

Отметим, что оценка теоремы 2 точна в следующем смысле: существуют замкнутые плоские гладкие кривые общего положения со сколь угодно большим числом двойных точек, не содержащие ни простых петель нулевой характеристики, ни простых дуг характеристики выше шести (см. рис. 1).

3. Теорема о простой дуге характеристики восемь

Оценку теоремы 3 можно усилить, сузив множество рассматриваемых кривых и перейдя к классам кривых, связанных флайпами.

Будем говорить, что две кривые связаны *элементарным флайпом*, если их гауссовы коды связаны заменой вида

1) $XabcaYbcZ \rightarrow XbcYabcaZ$ или 2) $XabcaYcbZ \rightarrow XbcYacbaZ$, где X , Y и Z — некоторые строки.

Теорема 4. *Если замкнутая плоская гладкая кривая α общего положения неприводима и имеет более десяти двойных точек, то она связана элементарными флайпами с кривой β , содержащей простую дугу, проходящую через восемь двойных точек кривой β .*

Основная идея доказательства заключается в последовательном рассмотрении (для $n = 1, 2, \dots$) множеств M_n , состоящих из строк (слов) длины n , являющихся подстроками в гауссовом коде тех или иных плоских замкнутых неприводимых кривых. Отбрасывая из M_n те строки, которые элементарными флайпами переводятся в строки, содержащие 8 подряд стоящих попарно различных символов, мы получаем множество M'_n и обнаруживаем, что, во-первых, ни при каком $n > 20$ множество M'_n не содержит полные гауссовы коды, а во-вторых, начиная с некоторого n , M'_n оказывается пустым, что и доказывает теорему.

Перебор вариантов был осуществлен компьютерными методами. С технической реализацией программы можно ознакомиться в [6], а далее мы опишем ключевые моменты примененного алгоритма. Нам потребуется ряд определений.

Преддиаграммой будем называть незамкнутую гладкую кривую на сфере, находящуюся в общем положении, с конечным числом отмеченных на кривой точек, причем все отмеченные точки отличны от двойных и концевых. Преддиаграммы рассматриваются с точностью до автодиффеоморфизма сферы.

Кодом преддиаграммы будем называть слово, полученное следующим образом. Промаркируем все двойные и отмеченные точки преддиаграммы символами некоторого алфавита так, чтобы различным точкам соответствовали различные символы. Запишем слово, которое дают эти символы при обходе кривой в направлении ее ориентации. Затем снабдим символы, соответствующие двойным точкам, знаком в зависимости от того, положительно или отрицательно ориентирована упорядоченная пара касательных векторов, отвечающих первому и второму проходу через эту точку.

Отметим, что преддиаграмма однозначно задается своим кодом.

Будем говорить, что две преддиаграммы связаны *элементарным флайпом*, если код одной из них получается из кода другой в результате одной из замен следующего вида:

- 1) $XabcaYbcZ \rightarrow XbcYabcaZ$, 2) $XabcaYcbZ \rightarrow XbcYacbaZ$, 3) $XabpaYbZ \rightarrow XbpYqbZ$,
- 4) $XarcaYcZ \rightarrow XpcYqcZ$, 5) $XarqaY \rightarrow XpqY$.

Здесь a, b, c — двойные точки (с произвольными знаками), p, q — отмеченные, а X, Y и Z — некоторые строки.

Будем говорить, что преддиаграмма γ *реализуется* замкнутой плоской кривой α , если γ содержится в α как подмножество, объединение A отмеченных и двойных точек преддиаграммы γ является подмножеством в множестве A' двойных точек кривой α , а $A \setminus A' \subset \alpha \setminus \gamma$. Преддиаграмму назовем *реализуемой*, она реализуется некоторой замкнутой плоской кривой.

Будем говорить, что преддиаграмма γ *приводима*, если ее код содержит собственную подстроку, где каждый символ встречается дважды. В противном случае преддиаграмма называется *неприводимой*.

Преддиаграмму назовем *специальной*, если она не связана элементарными флайпами ни с какой преддиаграммой, содержащей в своем коде 8 подряд стоящих различных символов.

Неприводимую реализуемую специальную преддиаграмму будем называть *допустимой*.

Полной преддиаграммой будем называть преддиаграмму без отмеченных точек.

Будем говорить, что преддиаграмма γ' является *продолжением* преддиаграммы γ , если γ содержится в γ' как подмножество, объединение A отмеченных и двойных точек преддиаграммы γ является подмножеством объединения A' отмеченных и двойных точек преддиаграммы γ' , а $A' \setminus A \subset \gamma' \setminus \gamma$. Продолжение γ' преддиаграммы γ называется *инкрементальным*, если длина кода преддиаграммы γ' на единицу больше длины кода преддиаграммы γ .

Теперь перейдем непосредственно к описанию элементов алгоритма.

Базовая процедура алгоритма принимает на вход код S преддиаграммы γ и останавливается, если γ не прошла проверку (вообще говоря, неполную, см. ниже) на допустимость. Если остановки не произошло, процедура рекурсивно вызывается от кодов T всех инкрементальных продолжений преддиаграммы γ .

Основной тип объекта в программе — это пара, состоящая из кода S преддиаграммы γ и дополнительного набора данных, называемых *атласом*. Атлас описывает множество областей, на которые γ разбивает сферу. Дополнительно в атласе для каждой области хранится описывающая ее границу информация, представляющая собой упорядоченную вдоль одного из возможных направлений обхода последовательность соседних областей и отмеченных точек, а также концевых точек, если они встречаются на границе данной области.

Перейдем к обсуждению функций, входящих в основную процедуру.

Исключение части недопустимых преддиаграмм. Процедура исключения преддиаграмм отсеивает все приводимые, часть нереализуемых и часть неспециальных преддиаграмм. Для проверки неприводимости достаточно убедиться в том, что в строке S не имеется собственных подстрок, где каждый элемент встречается дважды. При отсеивании нереализуемых преддиаграмм алгоритм проверяет лишь нечетность расстояний⁴ между совпадающими символами кода (у реализуемой преддиаграммы все эти расстояния нечетны, поскольку по теореме Жордана аналогичное свойство выполнено для гауссовых кодов замкнутых плоских кривых), и, если диаграмма полна, то проверяется, что концевые точки лежат на границе одной и той же области. Априори такое исключение затрагивает не все нереализуемые преддиаграммы, однако позволяет существенно сократить перебор. Функция по частичной проверке специальности получает на вход код S преддиаграммы γ и целое число i . Сначала проверяется, имеется ли в коде S восемь подряд идущих попарно различных символов. Если такой подстроки не оказалось, то, начиная с i -го элемента, в S ищутся подстроки вида $abca$ (без учета знака). Если такой подстроки не оказалось (или i больше длины строки S), функция прекращает работу. Если же такая подстрока нашлась, мы создаем код S' преддиаграммы γ' , получающейся в результате соответствующего элементарного флайпа, и возвращаем конъюнкцию двух рекурсивных вызовов функции: от S' и индекса $i + 1$, а также от S и индекса $i + 1$. В данной процедуре рассматриваются не все возможные цепочки флайпов, однако этого хватает для проверки утверждения теоремы.

Построение продолжений преддиаграммы. На вход функция получает код S преддиаграммы γ и возвращает множество кодов преддиаграмм, являющихся инкрементальными продолжениями преддиаграммы γ , которые строятся либо добавлением новой отмеченной точки, либо прохождением через одну из отмеченных точек, расположенных на границе области, в которой находится хвост преддиаграммы. При этом новые точки добавляются, только если граница области, в которой находится хвост, содержит более одной отмеченной точки (в противном случае мы получим либо нереализуемую, либо приводимую преддиаграмму).

Описанный выше алгоритм позволяет для произвольного натурального n сформировать список всех допустимых преддиаграмм с кодом длины не более n . Реализуя данный алгоритм, мы обнаруживаем, что с некоторого n этот список перестает увеличиваться, а так как продолжение недопустимой преддиаграммы тоже является недопустимой преддиаграммой, это означает, что множество допустимых преддиаграмм конечно и алгоритм сформировал перечень, содержащий все допустимые преддиаграммы. Ясно, что для каждой замкнутой плоской гладкой кривой α существует полная преддиаграмма, которая реализуется кривой α . Рассмотрим в множестве всех допустимых преддиаграмм полные, мы убеждаемся, что не существует полных допустимых преддиаграмм с кодом длиннее 20 символов, что полностью доказывает теорему.

З а м е ч а н и я. 1. Корректность алгоритма нетрудно проверить, основываясь на свойствах, которые прямо следуют из определений. Приведем два таких свойства:

– Строка S входит в гауссов код некоторой замкнутой плоской гладкой (неприводимой) кривой α если и только если существует расстановка знаков у повторяющихся символов в S , делающая эту строку кодом некоторой преддиаграммы, реализуемой кривой α .

⁴Под расстоянием между двумя символами кода понимается увеличенное на единицу количество символов между ними.

– Если кривая α является реализацией неспециальной преддиаграммы γ , то α связана элементарными флайпами с кривой, содержащей простую дугу характеристики 8.

2. Оценка теоремы 4 точна в следующем смысле: во-первых, существуют неприводимые замкнутые плоские гладкие кривые общего положения со сколь угодно большим числом двойных точек, не допускающие флайпов и не содержащие простых дуг характеристики девять (рис. 2); во-вторых, существует неприводимая замкнутая плоская гладкая кривая общего положения с десятью двойными точками, не допускающая элементарных флайпов и не содержащая ни одной простой дуги характеристики восемь (эта кривая представлена минимальной диаграммой узла 10_{120} в таблице Рольфсена [16]).

4. Доказательство теоремы 1 и следствия 1

Первое утверждение теоремы 1 прямо следует из теоремы 2, поскольку минимальные диаграммы узлов не содержат петель нулевой характеристики.

Для доказательства второго утверждения теоремы 1 введем в рассмотрение следующее преобразование для (составных) диаграмм узлов.

О п р е д е л е н и е. Пусть D — диаграмма узла на сфере S^2 , а B_1 и B_2 — непересекающиеся замкнутые диски на S^2 , край каждого из которых пересекает диаграмму D трансверсально в двух точках (не являющихся перекрестками). Вырежем диски B_1 и B_2 из S^2 и, поменяв их местами, вклеим обратно таким образом, чтобы снова получить некоторую диаграмму, причем не нарушая ориентаций сферы и диаграммы. Как следует из легкой части теоремы о преобразованиях Райдемайстера, в результате мы получим диаграмму того же узла, причем, очевидно, с тем же числом перекрестков. (Проверка сводится к случаю, когда один из дисков высекает из диаграммы простую дугу.) Преобразование описанного вида будем называть *рокировкой*. На уровне гауссова кода рокировке соответствует перестановка, меняющая местами два подслово, каждое из которых полно в том смысле, что составлено из пар одинаковых букв.

Предложение 3. *Если среди минимальных диаграмм узла K имеются составные, то хотя бы одна из них содержит простую дугу, проходящую через $\min\{\text{cr}(K), 9\}$ перекрестков.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если составная диаграмма D узла K распадается на $k \geq 3$ нетривиальных компонент, выберем на замыкании⁵ каждой из этих компонент простую дугу характеристики три, и, применяя рокировки, совместим отвечающие выбранным дугам замыканий дуги диаграммы D , образовав тем самым простую дугу характеристик $3 \cdot k \geq 9$.

Если диаграмма D узла K распадается на две неприводимые компоненты D_1 и D_2 , то в силу теоремы 2 на замыканиях этих компонент найдутся простые дуги характеристик $\min\{\text{cr}(D_1), 6\}$ и $\min\{\text{cr}(D_2), 6\}$ соответственно. Отсюда следует, что, применяя рокировки, мы имеем возможность перейти к минимальной диаграмме, содержащей простую дугу характеристики

$$\min\{\text{cr}(D_1), 6\} + \min\{\text{cr}(D_2), 6\} \geq \min\{\text{cr}(D_1) + \text{cr}(D_2), \text{cr}(D_1) + 6, \text{cr}(D_2) + 6, 12\}.$$

Поскольку $\text{cr}(D_1) + \text{cr}(D_2) = \text{cr}(K)$, а $\text{cr}(D_i) \geq 3$, отсюда следует требуемое.

Предложение 3 доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о второго утверждения теоремы 1. Если у узла имеется составная минимальная диаграмма, утверждение прямо следует из предложения 3. Если у узла имеется неприводимая минимальная диаграмма, а число перекрестков превышает десять, утверждение следует из теоремы 4, поскольку цепочка (элементарных) флайпов между кривыми однозначно

⁵Пусть D — диаграмма узла на сфере S^2 , а \mathcal{C} — набор попарно непересекающихся вложенных в S^2 окружностей, каждая из которых пересекает D трансверсально в двух точках, не являющихся перекрестками. Разрезав сферу S^2 по окружностям из \mathcal{C} и склеив компоненты края полученных поверхностей в точки, мы получаем замыкания компонент, на которые набор \mathcal{C} разбивает диаграмму D .

поднимается на уровень диаграмм узлов, а две диаграммы, связанные флайпом, представляют один и тот же узел (и имеют одинаковое число перекрестков).

Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 1. Теорема 1 охватывает случаи узлов с числом перекрестков не из множества $\{7, 8, 9, 10\}$. Предложение 3 охватывает случай узлов с составными минимальными диаграммами. Остается рассмотреть случай узлов с неприводимыми минимальными диаграммами и числом перекрестков от семи до десяти. В силу первой и третьей гипотез Тейта, доказанных в [10; 12–14; 17], и результата Менэско [11] о составных и простых альтернированных узлах, с точностью до флайпов и расстановки проходов-переходов все минимальные неприводимые диаграммы (необязательно простых) узлов с k перекрестками можно найти в таблице минимальных диаграмм простых альтернированных узлов, если таблица содержит хотя бы одну минимальную диаграмму для каждого *простого* альтернированного узла с k перекрестками. Просмотр таблиц Рольфсена показывает, что среди диаграмм альтернированных простых узлов с числом перекрестков от семи до десяти имеется лишь четыре диаграммы, у которых в классе флайп-эквивалентных нет диаграмм, содержащих простую дугу, проходящую через восемь перекрестков. Это диаграммы узлов 8_{16} , 8_{18} , 9_{40} и 10_{120} . Таким образом, у узла K не имеется минимальной диаграммы, содержащей простую дугу, проходящую через $\min\{\text{cr}(K), 8\}$ перекрестков, если и только если все его минимальные диаграммы с точностью до расстановки проходов-переходов совпадают с диаграммами узлов 8_{16} , 8_{18} , 9_{40} и 10_{120} в таблице Рольфсена. Прямая проверка, сокращаемая симметриями диаграмм, показывает, что список таких узлов узлами 8_{16} , 8_{18} , 9_{40} , 10_{120} исчерпывается. Заметим, что для подобной проверки не требуется перебор всех возможных расстановок проходов-переходов в указанных диаграммах. Достаточно проанализировать, какие дополнительные минимальные проекции имеются у узла, если в проекции, совпадающей с одной из диаграмм 8_{16} , 8_{18} , 9_{40} и 10_{120} , в паре соседних перекрестков нарушить альтернированность. С учетом симметрий, для диаграммы 8_{16} достаточно рассмотреть 9 случаев (пар соседних перекрестков), для диаграммы 8_{18} — три случая, для диаграммы 9_{40} — 5 случаев, для 10_{120} — 6. Кроме того, можно учесть, что если на одном из ребер диаграммы альтернированность нарушается, а Q — область диаграммы, в границу которой входит это ребро, то альтернированность нарушается и еще как минимум на одном ребре диаграммы, входящем в границу области Q . Это соображение позволяет сократить перебор еще существеннее. Второе утверждение следствия проверяется непосредственно.

З а м е ч а н и я. 1. Оценка предложения 3, в отличие от оценок теоремы 1, неточна. Можно показать, что если среди минимальных диаграмм узла K имеются составные, то хотя бы одна из них содержит простую дугу, проходящую через $\min\{\text{cr}(K), 10\}$ перекрестков. Кроме того, из второго пункта теоремы 1 выводится следующее утверждение: если число перекрестков узла K (с составными минимальными диаграммами) превышает 13, то хотя бы одна из его минимальных диаграмм содержит простую дугу, проходящую через 11 перекрестков.

2. У простого узла все минимальные диаграммы, очевидно, неприводимы. Насколько известно авторам, вопрос о том, существуют ли составные узлы, не имеющие минимальных составных диаграмм, остается открытым. Как нетрудно убедиться, известная гипотеза об аддитивности числа перекрестков при связанном суммировании узлов неверна, если и только если найдется составной узел, не имеющий составных минимальных диаграмм.

3. Пусть D — ориентированная диаграмма узла, расположенная на сфере S^2 . Обозначим через $\mathcal{E}(D)$ количество диаграмм (рассматриваемых с точностью до изоморфизма), связанных с D цепочками рокировок. Будем говорить, что D допускает нетривиальный автоморфизм, если найдется сохраняющий ориентации сферы, диаграммы и всех ее перекрестков автоморфизм пары (S^2, D) , при котором не все ребра диаграммы переходят в себя. Пусть диаграмма D распадается на m неприводимых частей, замыкания которых попарно неизоморфны и не допускают нетривиальных автоморфизмов. Пусть k_1, \dots, k_m — числа перекрестков этих неприводимых частей. Можно показать, что при указанных условиях в случае $m = 2$ чис-

ло $\mathcal{E}(D)$ задается формулой $k_1 k_2$, а в случае $m = 3$ — формулой $k_1 k_2 k_3 (k_1 + k_2 + k_3 - 1)$. Как нетрудно проверить, при указанных условиях выполняется равенство

$$\mathcal{E}(D) = \frac{\prod_{i=1}^m k_i}{\sum_{i=1}^m k_i} \cdot \mathcal{N}(k_1, k_2, \dots, k_m),$$

где $\mathcal{N}(k_1, k_2, \dots, k_m)$ есть число тех раскрасок вершин $(\sum_{i=1}^m k_i)$ -угольника в m цветов, которые удовлетворяют следующим условиям: (1) в цвет i раскрашено в точности k_i вершин; (2) пары вершин одного цвета не разделяют пары вершин другого цвета (в том смысле, что диагональ, соединяющая пару вершин одного цвета, не пересекает диагоналей с концами одинакового другого цвета). Как известно, число $\mathcal{N}(2, \dots, 2)$ есть число Каталана (см. [3]). Небезынтересно проверить, имеется ли простая зависимость между числами $\mathcal{E}(D)$ и обобщенными числами Каталана (см., например, [8], а также [3] и приведенные там ссылки).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дужин С. В.** Комбинаторные аспекты теории инвариантов Васильева: дис. ... д-р физ.-мат. наук / С.-Петербургское отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. Санкт-Петербург, 2011. 167 с.
2. **Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.** Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. **Стенли Р.** Перечислительная комбинаторика. Т. 2. Деревья, производящие функции и симметрические функции: Пер. с англ. М.: Мир, 2009. 767 с.
4. **Adams C. C.** The Knot Book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots. N. Y.: W. H. Freeman, 1994. 306 p.
5. **Belousov Yu. S., Malyutin A. V.** Estimates on the semi-meandric crossing number of classical knots // Abstracts of The International Conference “Polynomial Computer Algebra”. 2017. P. 21–23. ISBN: 978-5-9651-1057-5.
6. **Belousov Yu. S.** Program for processing Gaussian codes and codes for pre-diagrams [e-resource]. 2017. URL: <https://github.com/YuryBelousov/curves>.
7. **Burde G., Zieschang H.** Knots. 2nd ed. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 2003. 559 p. (de Gruyter Studies in Mathematics; vol. 5.) ISBN: 3-11-017005-1.
8. **Hilton P. J., Pedersen J.** Catalan numbers, their generalization, and their uses // Math. Intelligencer. 1991. Vol. 13, no. 2. P. 64–75. doi: 10.1007/BF03024089.
9. **Hopcroft J. E., Ullman J. D.** Introduction to automata theory, languages, and computation. Boston: Addison-Wesley Publ. Co., 1979. 418 p. ISBN: 020102988X.
10. **Kauffman L. H.** State models and the Jones polynomial // Topology. 1987. Vol. 26, no. 3. P. 395–407. doi: 10.1016/0040-9383(87)90009-7.
11. **Menasco W.** Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements // Topology. 1984. Vol. 23, no. 1. P. 37–44. doi: 10.1016/0040-9383(84)90023-5.
12. **Menasco W., Thistlethwaite M.** The Tait flyping conjecture // Bull. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 25, no. 2. P. 403–412. doi: 10.1090/S0273-0979-1991-16083-0.
13. **Menasco W., Thistlethwaite M.** The classification of alternating links // Ann. Math. 1993. Vol. 138, no. 1. P. 113–171. doi: 10.2307/2946636.
14. **Murasugi K.** The Jones polynomial and classical conjectures in knot theory // Topology. 1987. Vol. 26, no. 3. P. 187–194. doi: 10.1016/0040-9383(87)90058-9.
15. **Radovic L., Jablan S.** Meander knots and links // Filomat. 2015. Vol. 29, no. 10. P. 2381–2392. doi: 10.2298/FIL1510381R.
16. **Rolfen D.** Knots and links. Berkeley, Calif.: Publish or Perish Press, 1976. 439 p. ISBN: 0-914098-16-0.
17. **Thistlethwaite M. B.** A spanning tree expansion of the Jones polynomial // Topology. 1987. Vol. 26, no. 3. P. 297–309. doi: 10.1016/0040-9383(87)90003-6.

Белоусов Юрий Станиславович
студент

Поступила 30.09.2017

Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург
e-mail: bus99@yandex.ru

Малютин Андрей Валерьевич

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,

Санкт-Петербургский государственный университет,

г. Санкт-Петербург

e-mail: malyutin@pdmi.ras.ru

REFERENCES

1. Duzhin S.V. *Combinatorial aspects of the theory of Vassiliev invariants*. Dr. Sc. (Phys.-Math.) thesis, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute RAS, St. Petersburg, 2011, 167 p. (in Russian).
2. Magnus W., Karras A., Solitar D. *Combinatorial group theory*. N. Y., Interscience Publ., 1966, 415 p. Translated to Russian under the title *Kombinatornaya teoriya grupp*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 455 p.
3. Stanley R. *Enumerative combinatorics*, vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. Ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 594 p. ISBN: 0521789877. Translated to Russian under the title *Perechislitel'naya kombinatorika. T. 2. Derev'ya, proizvodnyashchie funktsii i simmetricheskie funktsii*, Moscow, Mir Publ., 2009, 767 p.
4. Adams C.C. *The Knot Book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. N. Y.: W. H. Freeman, 1994, 306 p. ISBN: 978-0716723936.
5. Belousov Yu.S., Malyutin A.V. *Estimates on the semi-meandric crossing number of classical knots*. Abstracts of The International Conference "Polynomial Computer Algebra", 2017, pp. 21–23. ISBN: 978-5-9651-1057-5.
6. Belousov Yu.S. Program for processing Gaussian codes and codes for pre-diagrams. Available at: <https://github.com/YuryBelousov/curves>, 2017.
7. Burde G., Zieschang H. *Knots*. Berlin, Walter de Gruyter & Co., 2003, Ser. de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 5, 559 p. ISBN: 3-11-017005-1.
8. Hilton P.J., Pedersen J. Catalan numbers, their generalization, and their uses. *Math. Intelligencer*, 1991, vol. 13, no. 2, pp. 64–75. doi: 10.1007/BF03024089.
9. Hopcroft J.E., Ullman J.D. *Introduction to automata theory, languages, and computation*. Boston: Addison-Wesley Publ. Co., 1979, 418 p. ISBN: 020102988X.
10. Kauffman L.H. State models and the Jones polynomial. *Topology*, 1987, vol. 26, no. 3, pp. 395–407. doi: 10.1016/0040-9383(87)90009-7.
11. Menasco W. Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements. *Topology*, 1984, vol. 23, no. 1, pp. 37–44. doi: 10.1016/0040-9383(84)90023-5.
12. Menasco W., Thistlethwaite M. The Tait flyping conjecture. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1991, vol. 25, no. 2, pp. 403–412. doi: 10.1090/S0273-0979-1991-16083-0.
13. Menasco W., Thistlethwaite M. The classification of alternating links. *Ann. Math.*, 1993, vol. 138, no. 1, pp. 113–171. doi: 10.2307/2946636.
14. Murasugi K. The Jones polynomial and classical conjectures in knot theory. *Topology*, 1987, vol. 26, no. 3, pp. 187–194. doi: 10.1016/0040-9383(87)90058-9.
15. Radovic L., Jablan S. Meander knots and links. *Filomat*, 2015, vol. 29, no. 10, pp. 2381–2392. doi: 10.2298/FIL1510381R.
16. Rolfsen D. *Knots and links*. Berkeley, Calif.: Publish or Perish Press, 1976, 439 p. ISBN: 0-914098-16-0.
17. Thistlethwaite M.B. A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology*, 1987, vol. 26, no. 3, pp. 297–309. doi: 10.1016/0040-9383(87)90003-6.

The paper was received by the Editorial Office on September 30, 2017.

Yurii Stanislavovich Belousov, student, St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: bus99@yandex.ru.

Andrei Valer'evich Malyutin, Dr. Phys.-Math. Sci., St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 191023 Russia, St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: malyutin@pdmi.ras.ru.