ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЧЕТЫРЬМЯ КЛАССАМИ СОПРЯЖЕННЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП. I [1]

В. А. Белоногов[2]

Изучаются конечные группы, имеющие точно 4 класса сопряженных максимальных подгрупп. Группы с этим свойством названы $4M$-группами. В статье доказаны две теоремы. В теореме 1 приводится полный список конечных простых $4M$-групп. В этом списке, кроме некоторых линейных и унитарных групп, содержатся также группы Судзуки над полем порядка 2^r, где r — простое число ($r > 2$). В теореме 2 дано описание конечных неразрешимых $4M$-групп, не имеющих нормальных максимальных подгрупп. Таким образом, в статье описаны конечные неразрешимые $4M$-группы, совпадающие со своим коммутантом. При этом существенно используются ранние результаты автора о строении конечных групп, имеющих точно 3 класса сопряженных максимальных подгрупп и результаты Г. Паздерского о строении конечных групп, имеющих точно 2 класса сопряженных максимальных подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, максимальная подгруппа.

V. A. Belonogov. Finite simple groups with four conjugacy classes of maximal subgroups. I.

We study the finite simple groups with exactly four conjugacy classes of maximal subgroups. The groups with this property are called $4M$-groups. We prove two theorems. Theorem 1 gives a complete list of finite simple $4M$-groups, which contains some linear and unitary groups as well Suzuki groups over the field of order 2^r, where r is a prime ($r > 2$). In Theorem 2 we describe finite nonsolvable $4M$-groups without normal maximal subgroups. Thus, the paper gives a description of finite nonsolvable $4M$-groups that coincide with their commutator group. This study uses the author's earlier results on the structure of finite groups with exactly three conjugacy classes of maximal subgroups and Pazderski's results on the structure of finite groups with exactly two conjugacy classes of maximal subgroups.

Keywords: finite group, simple group, maximal subgroup.

MSC: 20D05, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-52-62

Введение

В настоящей статье изучаются конечные группы, имеющие точно 4 класса сопряженных максимальных подгрупп (см. теоремы 1 и 2 ниже).

Конечные группы, имеющие лишь один класс сопряженных максимальных подгрупп, очевидно, являются примарными циклическими. Конечные группы, имеющие точно два класса сопряженных максимальных подгрупп, были описаны в 1964 г. Г. Паздерским [1]; эти группы разрешимы и порядок любой такой группы является произведением степеней двух различных простых чисел.

Описание конечных (разрешимых и неразрешимых) групп с точно тремя классами сопряженных максимальных подгрупп было получено автором в 1986 г. в [2]. В частности, там доказано (см. [2, теорема 1]), что

конечная неразрешимая группа G имеет точно 3 класса сопряженных максимальных подгрупп если и только если $G/\Phi(G)$ есть простая группа, изоморфная $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$, где r — простое число.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы “Современные проблемы алгебры и комбинаторики” (госбюджетный проект 0387-2015-0060).

[2]*25 лет назад* вышла первая в нашем журнале статья Вячеслава Александровича:

Белоногов В. А. Новый метод вычисления p-блоков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 3–12.

Конечная группа, имеющая точно n классов сопряженных максимальных подгрупп (n — натуральное число), называется *nM-группой.*

Таким образом, в силу работ [1] и [2] конечные nM-группы при $n \le 3$ известны.

Цель автора — изучить конечные $4M$-группы. В настоящей первой части работы доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Конечная простая группа G является $4M$-группой если и только если выполнено одно из следующих условий*:

(1) $G \cong PSL_2(11)$;

(2) $G \cong PSL_2(p)$, *где p — простое число, $p > 3$ и $p \equiv \pm 3, \pm 13 \pmod{40}$*;

(3) $G \cong PSL_2(p^{r^m})$, *где p, r — простые числа, $r > 2$ при $p > 2$, $m \in \mathbb{N}$ и $pm > 2$*;

(4) $G \cong PSL_3(3)$;

(5) $G \cong PSU_3(q)$, *где $q = 3$ или $q = 2^{2^m}$, где $m \in \mathbb{N}$*;

(6) $G \cong Sz(2^r)$, *где r — простое число ($r > 2$).*

Теорема 2. *Пусть G — конечная непростая группа без нормальных подгрупп простого индекса. Равносильны следующие утверждения*:

(1) *G — $4M$-группа и $\Phi(G) = 1$*;

(2) *$G = P \leftthreetimes M$, где P — минимальная нормальная p-подгруппа в G при некотором простом p, $M/\Phi(M)$ изоморфна $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$ при некотором простом r, $M_G = 1$ и любое дополнение к P в G сопряжено в G с M.*

Таким образом, теоремы 1 и 2 описывают, по существу, конечные $4M$-группы, совпадающие со своим коммутантом.

Используемые далее обозначения, в основном, стандартны (см., например, [3–5]). $\mathbb{N}$ есть множество всех натуральных чисел. Если $m, n \in \mathbb{N}$, то запись $m \mid n$ означает, что m делит n. Через Z_n, E_n и D_n обозначаются соответственно циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка n. Если H — подгруппа группы G, то $\{H\}^G$ есть класс сопряженных подгрупп группы G, содержащий подгруппу H, и H_G — пересечение всех подгрупп группы G, сопряженных с H в G (*ядро H* в G). $m(G)$ обозначает число классов сопряженных максимальных подгрупп группы G. Классы сопряженных максимальных подгрупп мы будем называть также просто *классами максимальных подгрупп.* $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

Используются также следующие, несколько видоизмененные, обозначения из Атласа [6, с. XX]. Запись $G \doteq A.B$ (читается: "G имеет тип $A.B$" или "G есть группа типа $A.B$") означает, что группа G имеет нормальную подгруппу, изоморфную A, фактор-группа по которой изоморфна B (т. е. G есть расширение A с помощью B). В случае расщепляемого расширения вместо точки может быть использован знак $\leftthreetimes$ (в частности, в настоящей статье) или знак : (в Атласе [6] и ряде других работ). Запись $G \doteq A_1.A_2. \ldots .A_n$ при $n \ge 3$ означает, что $G \doteq (\ldots((A_1.A_2).A_3). \ldots .A_{n-1}).A_n$ и при любом $i \le n$ группа G имеет нормальную подгруппу $N_i \doteq A_1.A_2. \ldots .A_i$. Обычно m, n — натуральные числа; G^m — прямое произведение m экземпляров группы G, и если E — элементарная абелева группа, то $E^{m+n} := E^m.E^n$. Если H есть единственная подгруппа индекса n группы G, то она может быть обозначена через $\frac{1}{n}G$.

Краткое сообщение о результатах настоящей статьи сделано в [7].

1. Доказательство теоремы 1

Пусть G — конечная простая $4M$-группа. Согласно классификации конечных простых групп [8] G есть либо циклическая группа простого порядка, либо знакопеременная группа, либо группа лиева типа, либо одна из 26 спорадических простых групп.

Лемма 1.1. *Конечная знакопеременная группа A_n при любом $n \ge 1$ не является $4M$-группой.*

Т а б л и ц а 1

Число классов максимальных подгрупп в спорадических группах

G	M_{11}	M_{12}	M_{22}	M_{23}	M_{24}	J_1	J_2	J_3	J_4	HS	Suz	McL	Ru
$m(G)$	5	11	8	7	9	7	9	9	13	12	17	12	15
G	He	Ly	$O'N$	Co_1	Co_2	Co_3	Fi_{22}	Fi_{23}	Fi'_{24}	HN	Th	F_2	F_1
$m(G)$	11	9	13	24	11	14	14	14	25	14	16	29	≥ 43

Т а б л и ц а 2

Группы лиева типа и их лиевы ранги

G	$A_n(q)$	$B_n(q)$	$C_n(q)$	$D_n(q)$	$G_2(q)$	$F_4(q)$	$E_6(q)$	$E_7(q)$	$E_8(q)$
l	n	n	n	n	2	4	6	7	8
G	$^2A_n(q)$	$^2B_2(q)$	$^2D_n(q)$	$^3D_4(q)$	$^2G_2(q)$	$^2F_4(q)$	$^2E_6(q)$	$^2F_4(2)'$	
l	$[\frac{n+1}{2}]$	1	$n-1$	2	1	2	4		

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = A_n$. Предположим, что G является $4M$-группой. Тогда $n \geq 5$, так как при $n \leq 4$ группа G имеет не более двух классов сопряженных максимальных подгрупп. Согласно уточнению теоремы О'Нэна — Скотта [9, теорема] G имеет максимальные подгруппы вида $M = M_{m,k} \doteq (A_m \times A_k).Z_2$ ($M = (S_m \times S_k) \cap A_n$) при любых натуральных m и k с $n = m + k$ и $m > k$, а число r таких M равно $(n-1)/2$ при нечетном n и $(n-2)/2$ — при четном n. В любом случае $r \geq (n-2)/2$. Поскольку подгруппы $M_{m,k}$ лежат в различных классах максимальных подгрупп группы G (они попарно не изоморфны), а G есть $4M$-группа, то должно быть $4 \geq r \geq (n-2)/2$, т. е. $n \leq 10$. Согласно Атласу [6, с. 2, 4, 10, 22, 37, 48] число классов сопряженных максимальных подгрупп в группах $A_1, \dots, A_{10}$ соответственно равно 0,1,1,2, 3,5,5,6,8,24. А отсюда следует заключение леммы. □

Лемма 1.2. *Каждая конечная спорадическая простая группа имеет более четырех классов сопряженных максимальных подгрупп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о видно из табл. 1, которая непосредственно вытекает из списков максимальных подгрупп спорадических групп в Атласе [6] с некоторыми добавлениями из [10, гл. 5]. □

Остается рассмотреть конечные простые группы лиева типа. Полный список таких групп приведен в табл. 2. В ней же для каждой группы G мы приводим ее лиев ранг $l = l(G)$ (см., например, [4, с. 493, 494]).

Отметим имеющиеся изоморфизмы выписанных здесь групп лиева типа с линейными группами и группами Судзуки-Ри, и в скобках укажем необходимое и достаточное условие простоты группы (см. [6]): $A_n(q) \cong PSL_{n+1}(q)$ $(n \geq 1, (n,q) \notin \{(1,2),(1,3)\})$, $B_n(q) \cong P\Omega_{2n+1}(q)$ $(n \geq 2, (n,q) \neq (2,2))$, $C_n(q) \cong PSp_{2n}(q)$ $(n \geq 2, (n,q) \neq (2,2))$, $D_n(q) \cong P\Omega^+_{2n}$ $(n \geq 3)$, $^2A_n(q) \cong PSU_{n+1}(q)$ $(n \geq 2, (n,q) \neq (2,2))$, $^2B_2(q) \cong Sz(q)$ — группы Судзуки, $q = 2^{2m+1}$ $(q > 2)$, $^2D_n(q) \cong P\Omega^-_{2n}(q)$ $(n \geq 2)$, $^2G_2(q) \cong R(q)$ — группы Ри характеристики 3, $q = 3^{2m+1}$ $(q > 3)$, $^2F_4(q)$ — группы Ри характеристики 2, $q = 2^{2m+1}$ $(q > 2)$, $^2F_4(2)' \cong T$ — группа Титса.

Лемма 1.3. *Пусть G — конечная простая $4M$-группа лиева типа. Тогда $l(G) \leq 4$. В частности, выполнено одно из следующих условий*:

(1) $G \cong A_n(q) \cong PSL_{n+1}(q)$, *где* $n \leq 4$;
(2) $G \cong {}^2A_n(q) \cong PSU_{n+1}(q)$, *где* $n \leq 8$;
(3) $G \cong C_n(q) \cong PSp_{2n}(q)$, *где* $n \leq 4$;
(4) $G \cong B_n(q) \cong P\Omega_{2n+1}(q))$, *где* $n \leq 4$;

(5) $G \cong {}^2B_2(q) \cong Sz(q)$ $(q = 2^{2m+1} > 2)$;
(6) $G \cong D_4(q) \cong P\Omega_8^+(q)$;
(7) $G \cong {}^2D_n(q) \cong P\Omega_{2n}^-(q)$, *где* $n \leq 5$;
(8) $G \cong {}^3D_4(q)$;
(9) $G \cong G_2(q)$;
(10) $G \cong {}^2G_2(q)$ $(q = 3^{2n+1} > 3)$;
(11) $G \cong F_4(q)$;
(12) $G \cong {}^2F_4(q)$ $(q = 2^{2m+1} > 2)$;
(13) $G \cong {}^2F_4(2)' \cong T$(*группа Титса*);
(14) $G \cong {}^2E_6(q)$.

Доказательство. Пусть G — конечная простая группа лиева типа (нескрученная или скрученная) над полем характеристики p. Согласно [11, предложение 8.2.1; теорема 13.5.4] G обладает (B, N)-парой, где B — подгруппа Бореля группы G (нормализатор силовской p-подгруппы P из G), а N — нормализует подгруппу Картана H из G (H — дополнение к P в B). В более компактном виде этот результат приведен в [12, теорема 2.15]. При этом ранг l этой (B, N)-пары (т. е. ранг ее группы Вейля) называется *лиевым рангом* группы G.

Подгруппы группы G, содержащие подгруппу B или подгруппу сопряженную с ней, называются параболическими подгруппами группы G. Согласно [11, предложение 8.2.2, теорема 8.3.4] существует определенное множество I мощности l и взаимно однозначное отображение $J \mapsto P_J$ множества всех подмножеств J из I на множество всех подгрупп P_J группы G, содержащих B, такое, что $P_J \cap P_K = P_{J \cap K}$, где $K, J \subseteq I$. Следовательно, G имеет точно l максимальных подгрупп, содержащих B. Кроме того, согласно [11, предложение 8.3.3] подгруппы P_J при различных J не сопряжены между собой в G.

Таким образом, группа G имеет точно l классов сопряженных параболических максимальных подгрупп, т. е. подгрупп P_J при различных $J = I \setminus \{i\}$, где $i \in I$.

Следовательно, $l \leq 4$.

Отсюда и из табл. 2 непосредственно следует второе утверждение леммы. □

Теперь нам нужно уточнить, какие именно из групп G пп. (1)–(14) леммы 1.3 являются $4M$-группами.

Рассмотрим сначала группы п. (1) леммы 1.3. Пусть $G \cong A_n(q) \cong PSL_{n+1}(q)$, где $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Далее без оговорок мы учитываем равенство $m(PSL_n(q)) = m(SL_n(q))$ (поскольку $PSL_n(q)$ равно $SL_n(q)/\Phi(SL_n(q)))$ и подобные равенства для унитарных, симплектических и ортогональных групп.

Лемма 1.4. *Группа* $G \cong PSL_2(q)$ *является* $4M$*-группой тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:
(1) $G \cong PSL_2(11)$;
(2) $G \cong PSL_2(p)$, *где* p — *простое число и* $p \equiv \pm 3, \pm 13 \pmod{40}$;
(3) $G \cong PSL_2(p^{r^m})$, *где* p, r — *простые числа*, $m \in \mathbb{N}$ *и* $pm > 2$.

Доказательство. Пусть $G = PSL_2(q)$, где q — степень простого числа. Тогда $|G| = q(q^2 - 1)/d$, где $d := (2, q - 1)$, и, следовательно, $\pi(G) = \pi(q) \cup \pi(q - 1) \cup \pi(q + 1) = \pi(q) \dot\cup \pi((q - 1)/d) \dot\cup \pi((q + 1)/d)$.

Из [13, разд. 2.1] и [14, табл. 8.1] непосредственно вытекает табл. 3, в которой $E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/d}$ есть группа Фробениуса (см. [4, лемма 15.1.1]. В каждом из типов (i)–(viii) в 3-м столбце записано необходимое и достаточное условие существования указанной максимальной подгруппы, под *классом* понимается класс сопряженных подгрупп в G (легко заметить, что максимальные подгруппы типов v–viii имеются только при нечетных q).

Из табл. 3 непосредственно видно, что при $q \leq 11$ лемма 1.4 верна, а именно, число $m(G)$ классов сопряженных максимальных подгрупп в G, равно 3 при $q \leq 8$ равно 5 при $q = 9$ и равно 4 при $q = 11$. Теперь пусть $q > 11$. Тогда согласно табл. 3 G имеет максимальные

Таблица 3

Максимальные подгруппы группы $PSL_2(q)$, $q \geq 4$

No. (тип)	Максимальная подгруппа	Условие существования максимальной подгруппы ($q = p^a$, p простое, $a \in \mathbb{N}$)	Число классов
i	$E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/d}$	всегда существует	1
ii	$D_{2(q-1)/d}$	$q \notin \{5, 7, 9, 11\}$	1
iii	$D_{2(q+1)/d}$	$q \notin \{7, 9\}$	1
iv	$PSL_2(q_0)$	$q = q_0^r$, где $q_0 \mid q$, $q_0 \neq 2$, r — простое, и r нечетно при нечетном q	1 при каждом r
v	$PGL_2(q_0)$	q нечетно и $q = q_0^2$, $q_0 \mid q$	2
vi	S_4	$q = p \equiv \pm 1 \pmod 8$	2
vii	A_4	$q = p \equiv \pm 3, 5, \pm 13 \pmod{40}$	1
viii	A_5	$q = p \equiv \pm 1 \pmod{10}$ или $q = p^2$, где $p \equiv \pm 3 \pmod{10}$	2

подгруппы типов i–iii, и поэтому она не имеет максимальных подгрупп типов v, vi и viii (иначе было бы $m(G) \geq 5$). Пусть $q = p^a$, как в табл. 3.

Если $q = p$, то G может иметь еще лишь 1 класс максимальных подгрупп, а именно, типа vii, и, следовательно, есть группа типа (3) теоремы 1 (учитываем, что $p \neq 5$).

Пусть, наконец, $q \neq p$, т. е. $a \neq 1$. Тогда G имеет максимальную подгруппу типа iv точно при одном r, т. е. либо $p \neq 2$ и $a = r^m$, где r — простое нечетное число и $m \in \mathbb{N}$, либо $p = 2$ и $a = r^m$, где r — простое число ≥ 2, $m \in \mathbb{N}$ и $m \neq 1$ (так как $q_0 \neq 2$). □

Лемма 1.5. *Группа $PSL_3(q)$ является $4M$группой тогда и только тогда, когда $q = 3$.*

Доказательство. Согласно [14, табл. 8.3] при $q \geq 5$ группа $SL_3(q)$ имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп:

2 класса максимальных подгрупп типа $E_{q^2} \leftthreetimes GL_2(q)$,

1 класс максимальных подгрупп типа $E_q^{1+2} \leftthreetimes Z_{(q-1)}^2$,

1 класс максимальных подгрупп типа $GL_2(q)$,

1 класс максимальных подгрупп типа $(Z_{q-1} \times Z_{q-1}) \leftthreetimes S_3$.

Следовательно, $m(PSL_3(q)) \geq 5$ при $q \geq 5$.

Если же $q < 5$, то согласно [6, с. 3, 13, 23] число классов максимальных подгрупп равно 3 в $PSL_3(2)\,(\simeq PSL_2(7))$, 4 в $PSL_3(3)$ (как в лемме) и 9 в $PSL_3(4)$. □

Лемма 1.6. *Группы $PSL_4(q)$ и $PSL_5(q)$ при любом q не являются $4M$-группами.*

Доказательство. Группы $PSL_4(q)$ и $PSL_5(q)$ просты при любом q. Согласно [14, табл. 8.8] группа $SL_4(q)$ при любом q имеет по крайней мере 5 классов максимальных подгрупп:

2 класса максимальных подгрупп типа $E_q^3 \leftthreetimes GL_3(q)$,

1 класс максимальных подгрупп типа $E_q^4 \leftthreetimes SL_2(q)^2 \leftthreetimes Z_{q-1}$,

1 класс максимальных подгрупп типа $E_q^{1+4} \leftthreetimes (GL_2(q) \times Z_{q-1})$,

1 класс максимальных подгрупп типа $GL_3(q)$.

Согласно [14, табл. 8.18] группа $SL_5(q)$ при любом q имеет по крайней мере 5 классов максимальные подгрупп:

2 класса максимальных подгрупп типа $E_q^4 \leftthreetimes GL_4(q)$,

2 класса максимальных подгрупп типа $E_q^6 \leftthreetimes (SL_2(q) \times SL_3(q)) \leftthreetimes Z_{q-1}$,

1 класс максимальных подгрупп типа $GL_4(q)$.

□

Рассмотрим теперь группы п. (2) леммы 1.3. Пусть $G \cong PSU_n(q) \cong {}^2A_{n-1}(q)$, где $n \leq 9$. Так как $PSU_2(q) \simeq PSL_2(q)$, то далее мы будем считать, что $n \geq 3$. Кроме того, при $n \geq 3$ группа G непроста если и только если $G \cong PSU_3(2) \doteq E_9 \leftthreetimes Q_8$ (см. [6]).

Лемма 1.7. *Простая группа $PSU_3(q)$ является $4M$-группой тогда и только тогда, когда $q = 3$ или $q = 2^{2^m}$, где $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Поскольку группа $PSU_3(2) \doteq E_9 \leftthreetimes Q_8$ непроста, то далее мы считаем, что $q \geq 3$. Пусть $G \cong SU_3(q)$. Если $q < 7$, то согласно [6, с. 14, 30, 34] $m(G) = 4$ лишь при $q \in \{3, 4\}$. Пусть теперь $q \geq 7$ и $q = p^a$, где p — простое число и $a \in \mathbb{N}$. Тогда согласно [14, табл. 8.5, 8.6] при любом таком q группа G имеет 4 класса максимальных подгрупп с представителями типов: $E_q^{1+2} \leftthreetimes Z_{q^2-1}$, $GU_2(q)$, $(Z_{q+1} \times Z_{q+1}).S_3$, $Z_{q^2-q+1} \leftthreetimes Z_3$.

Кроме того, G имеет класс максимальных подгрупп типа $SU_3(q_0).Z_{(\frac{q+1}{q_0+1},3)}$, где $q = q_0^r$, если a имеет нечетный простой делитель r, и G имеет класс максимальных подгрупп типа $Z_{(q+1,3)} \times SO_3(q)$, если q нечетно. Следовательно, если $m(G) = 4$, то должно быть $a = 2^m$, где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $p = 2$, т. е. выполнены условия на q в доказываемой лемме.

Обратно, при этих условиях не могут существовать в G максимальные подгруппы из [14, табл. 8.5, 8.6], не упомянутые выше (условие существования любого из них противоречит условию $q = 2^{2^m}$). $\square$

Лемма 1.8. *Для простой группы $G = PSU_n(q)$ при любом $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и любом q $m(G) \geq 5$.*

Доказательство. Пусть $G = PSU_4(q)$. Понятно, что $m(PSU_n(q)) = m(SU_n(q))$. Согласно [6, с. 26, 52] $m(G)$ равно 5 при $q = 2$ и равно 16 при $q = 3$. Если же $q \geq 4$, то по [14, табл. 8.10] группа $SU_4(q)$ имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов $E_q^{1+4} \leftthreetimes SU_2(q) \leftthreetimes Z_{q^2-1}$, $E_q^4 \leftthreetimes SL_2(q^2) \leftthreetimes Z_{q-1}$, $GU_3(q)$, $Z_{q+1}^3.S_4$, $Sp_4(q).Z_{(q+1,2)}$. Таким образом, $m(PSU_4(q)) \geq 5$ при любом q.

Далее, для $n \in \{5, 6, 7, 8\}$ в табл. 8.20, 8.26, 8.37, 8.46 и 8.56 из [14] для $SU_n(q)$ при произвольном q легко указать представителей пяти классов сопряженных максимальных подгрупп. Например,

для $SU_5(q)$ — $E_q^{1+6} \leftthreetimes SU_3(q) \leftthreetimes Z_{q^2-1}$, $E_q^{4+4} \leftthreetimes GL_2(q^2)$, $GU_4(q)$, $(SU_3(q) \times SU_2(q)) \leftthreetimes Z_{q+1}$, $Z_{q+1}^4.S_5$;

для $SU_6(q)$ — $E_q^{1+8} \leftthreetimes SU_4(q) \leftthreetimes Z_{q^2-1}$, $E_q^{4+8} \leftthreetimes (SL_2(q^2 \times SU_2(q)) \leftthreetimes Z_{q^2-1}$, $E_q^9 \leftthreetimes SL_3(q^2) \leftthreetimes Z_{q-1}$, $GU_5(q)$, $(SU_4(q) \times SU_2(q)) \leftthreetimes Z_{q+1}$;

для $SU_7(q)$ — $E_q^{1+10} \leftthreetimes SU_5(q) \leftthreetimes Z_{q^2-1}$, $E_q^{4+12} \leftthreetimes (SL_2(q^2) \times SU_3(q)) \leftthreetimes Z_{q^2-1}$, $E_q^{9+6} \leftthreetimes GL_3(q^2)$, $GU_6(q)$, $(SU_5(q) \times SU_2(q)) \leftthreetimes Z_{q+1}$;

для $SU_8(q)$ — $E_q^{1+12} \leftthreetimes SU_6(q) \leftthreetimes Z_{q^2-1}$, $E_q^{4+16} \leftthreetimes (SL_2(q^2) \times SU_4(q)) \leftthreetimes Z_{q^2-1}$, $E_q^{16} \leftthreetimes SL_4(q^2) \leftthreetimes Z_{q-1}$, $GU_7(q)$, $(SU_6(q) \times SU_2(q)) \leftthreetimes Z_{q+1}$;

для $SU_9(q)$ — $E_q^{1+14} \leftthreetimes SU_7(q) \leftthreetimes Z_{q^2-1}$, $E_q^{4+20} \leftthreetimes (SL_2(q^2) \times SU_5(q)) \leftthreetimes Z_{q^2-1}$, $E_q^{16+8} \leftthreetimes GL_4(q^2)$, $GU_8(q)$, $(SU_6(q) \times SU_2(q)) \leftthreetimes Z_{q+1}$. $\square$

Рассмотрим теперь группы п. (3) леммы 1.3. Пусть $G \cong PSp_{2n}(q) \cong C_n(q)$, где $n \in \{2, 3, 4\}$. Имеем: $PSp_2(q) \simeq PSL_2(q)$; $PSp_4(2) \simeq S_6$, при $q > 2$ группа $PSp_4(q)$ проста; группы $PSp_6(q)$ и $PSp_8(q)$ просты при любом q; $m(PSp_{2n}(q)) = m(Sp_{2n}(q))$.

Лемма 1.9. *Каждая из простых групп $PSp_4(q)$, $PSp_6(q)$ и $PSp_8(q)$ при любом q имеет более четырех классов сопряженных максимальных подгрупп.*

Доказательство. Пусть $G = PSp_4(q)$ и $q > 2$ (при $q = 2$ группа G не проста). Согласно [6, с. 26, 44] $m(G)$ равно 5 при $q = 3$ и равно 7 при $q = 4$. Пусть $q \geq 5$. Если q нечетно, то, как видно из [14, табл. 8.12], группа G имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов $E_q^{1+2} \leftthreetimes (Z_{q-1} \times Sp_2(q))$, $E_q{}^3 \leftthreetimes GL_2(q)$, $Sp_2(q)^2 \leftthreetimes Z_2$, $GL_2(q).Z_2$, $Sp_2(q^2) \leftthreetimes Z_2$).

Если же $q > 2$ четно, то согласно [14, табл. 8.14] группа G также имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов $E_q{}^3 \leftthreetimes GL_2(q)$ (2 класса), $Sp_2(q) \wr Z_2$, $Sp_2(q^2) \leftthreetimes Z_2$, $SO_4^+(q)$).

Пусть $G = Sp_6(q)$. Согласно [14, табл. 8.28] при любом q группа G имеет 4 класса сопряженных максимальных подгрупп с представителями типов $E_q^{3+4} \leftthreetimes (GL_2(q) \times Sp_2(q))$, $E_q^6 \leftthreetimes GL_3(q)$, $Sp_2(q) \times Sp_4(q)$, $Sp_2(q^3) \leftthreetimes Z_3$. Кроме того, в G имеется еще по крайней мере одна максимальная подгруппа, а именно, при нечетном q — подгруппа типа ${E_q}^{1+4} \leftthreetimes (Z_{q-1} \times Sp_4(q))$, а при четном q — подгруппа типа ${E_q}^5 \leftthreetimes (Z_{q-1} \times Sp_4(q))$.

Пусть $G = Sp_8(q)$. Согласно [14, табл. 8.48] при любом q группа G имеет 5 классов сопряженных максимальных подгрупп с представителями типов $E_q^{3+8} \leftthreetimes (GL_2(q) \times Sp_4(q))$, $E_q^{6+6} \leftthreetimes (GL_3(q) \times Sp_2(q))$, $E_q^{10} \leftthreetimes GL_4(q)$, $Sp_6(q) \times Sp_2(q)$, $Sp_4(q^2) \leftthreetimes Z_2$. □

Пусть теперь $G \cong P\Omega_{2n+1}(q) \cong B_n(q)$ с $n \in \{2,3,4\}$, как в п. (4) леммы 1.3. Мы можем считать здесь, что $n > 2$, так как $P\Omega_5(q) \simeq PSp_4(q)$.

Лемма 1.10. *Каждая из простых групп $P\Omega_7(q)$ и $P\Omega_9(q)$ при любом q имеет более четырех классов сопряженных максимальных подгрупп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $P\Omega_{2m+1}(2^n) \cong PSp_{2m}(2^n)$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$, то ввиду леммы 1.9 мы можем считать, что q нечетно. Тогда согласно [14, табл. 8.39] группа $\Omega_7(q)$ имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов ${E_q}^5 \leftthreetimes (Z_{\frac{q-1}{2}} \times \Omega_5(q).Z_2)$, $E_q^{1+6} \leftthreetimes (\frac{1}{2}GL_2(q) \times \Omega_3(q)).Z_2$, $E_q^{3+3} \leftthreetimes (\frac{1}{2}GL_3(q))$, $\Omega_6^+(q).Z_2$ и $\Omega_6^-(q).Z_2$).

Согласно [14, табл. 8.58] группа $\Omega_9(q)$ также имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов ${E_q}^7 \leftthreetimes (Z_{\frac{q-1}{2}} \times \Omega_7(q).Z_2)$, $E_q^{1+10} \leftthreetimes (\frac{1}{2}GL_2(q) \times \Omega_5(q)).Z_2$, $E_q^{6+4} \leftthreetimes (\frac{1}{2}GL_4(q))$, $\Omega_8^+(q).Z_2$ и $\Omega_8^-(q).Z_2$). □

Лемма 1.11. Группа $G = Sz(q)$ ($q = 2^{2m+1} > 2$) является $4M$-группой если и только если $q = 2^r$, где r — простое число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [15] (см. также [14, табл. 8.16]) группа G имеет 4 класса сопряженных максимальных подгрупп с представителями типов $E_q^{1+1} \leftthreetimes Z_{q-1}$, $D_{2(q-1)}$, $Z_{(q-\sqrt{2q}+1)} \leftthreetimes Z_4$, $Z_{(q+\sqrt{2q}+1)} \leftthreetimes Z_4$ и еще, возможно, лишь какие-либо подгруппы вида $G(q_0) \cong Sz(q_0)$, где $q = q_0^r$, $q_0 \mid q$ и r — простое число, делящее $2m+1$, причем $q_0 \neq 2$. Но отсюда непосредственно вытекает доказываемое утверждение. □

Рассмотрим группы пп. (6), (7) леммы 1.3. Заметим, что $P\Omega_6^+(q) \simeq PSL_4(q)$, $P\Omega_4^-(q) \simeq PSL_2(q^2)$ и $P\Omega_6^-(q) \simeq PSU_4(q)$. Следовательно, здесь нам остается рассмотреть лишь группы следующей леммы.

Лемма 1.12. Группы $P\Omega_8^+(q)$, $P\Omega_8^-(q)$ и $P\Omega_{10}^-(q)$ не являются $4M$-группами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [14, табл. 8.50] при любом q группа $\Omega_8^+(q)$ имеет, в частности, 4 класса сопряженных максимальных подгрупп с представителями типа $Z_2.\Omega_7(q)$ и 2 класса сопряженных максимальных подгрупп с представителями типа $Sp_6(q)$.

Согласно [14, табл. 8.52] группа $\Omega_8^-(q)$ имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов
${E_q}^6 \leftthreetimes (Z_{\frac{q-1}{(q-1,2)}} \times \Omega_6^-(q)).Z_{(q-1,2)}$, $E_q^{1+8} \leftthreetimes (\frac{1}{(q-1,2)}GL_2(q) \times \Omega_4^-(q)).Z_{(q-1,2)}$, $E_q^{1+6} \leftthreetimes (\frac{1}{(q-1,2)}GL_3(q) \times \Omega_2^-(q)).Z_{(q-1,2)}$, $(\Omega_2^-(q) \times \Omega_6^+(q)).E_{2(q-1,2)}$, $(\Omega_4^+(q) \times \Omega_4^-(q)).E_{2(q-1,2)}$).

Согласно [14, табл. 8.68] при любом q группа $\Omega_{10}^-(q)$ имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов
${E_q}^8 \leftthreetimes (Z_{\frac{q-1}{(q-1,2)}} \times \Omega_8^-(q)).Z_{(q-1,2)}$, $E_q^{1+12} \leftthreetimes (\frac{1}{(q-1,2)}GL_2(q) \times \Omega_6^-(q)).Z_{(q-1,2)}$,
$E_q^{3+12} \leftthreetimes (\frac{1}{(q-1,2)}GL_3(q) \times \Omega_4^-(q)).Z_{(q-1,2)}$, $(\Omega_2^-(q) \times \Omega_8^+(q)).E_{2(q-1,2)}$, $(\Omega_4^+(q) \times \Omega_6^-(q)).E_{2(q-1,2)}$.
□

В следующих леммах 1.3–1.16 мы рассмотрим группы пунктов (8)–(14) леммы 3.

Лемма 1.13. Группа ${}^3D_4(q)$ при любом q не является $4M$-группой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [14, табл. 8.50] группа ${}^3D_4(q)$ при любом q имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов ${E_q}^{1+8} \leftthreetimes (Z_{q-1} \circ SL_2(q^3)).Z_{(q-1,2)}$, $G_2(q)$, $Z_{q^4-q^2+1}.Z_4$, $Z^2_{q^4+q^2+1}.SL_2(3)$,

$Z^2_{q^4-q^2+1}.SL_2(3))$. $\square$

Лемма 1.14. Простые группы $G_2(q)$ и ${}^2G_2(q)$ не являются $4M$-группами.

Доказательство. Группа $G_2(2)$ непростая. Списки максимальных подгрупп простых групп $G = G_2(q)$, где q — степень простого числа p, имеют различный вид при $p = 2$, $p = 3$ и $p \geq 5$ (см. [10, табл. 4.1] или [14, табл. 8.30, 8.42, 8.41]. В любом случае G имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп. А именно, при любом p группа G имеет 4 класса подгрупп типов $A \leftthreetimes GL_2(q)$, где $|A| = q^5$, $B \leftthreetimes GL_2(q)$, где $|B| = q^5$ (с различными A и различными B), $SL_3(q) \leftthreetimes Z_2$ и $SU_3(q) \leftthreetimes Z_2)$. Но группа G имеет еще класс сопряженных максимальных подгрупп с представителем типа $SL_2(q) \circ SL_2(q)$ при $p = 2$, и с представителем типа $(SL_2(q) \circ SL_2(q)).Z_2$ при любом $p \geq 3$.

Группа $G = {}^2G_2(q)$ $(q = 3^{2n+1} > 3)$ согласно [16] (где впервые описаны максимальные подгруппы этих групп) или [14, табл. 8.43] имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов $E_q{}^{1+1+1} \leftthreetimes GL_2(q)$, $Z_2 \times L_2(q)$, $(E_4 \times D_{(q+1)/2}) \leftthreetimes Z_3$, $Z_{(q-\sqrt{3q}+1)} \leftthreetimes Z_6$, $Z_{(q+\sqrt{3q}+1)} \leftthreetimes Z_6)$ (при $q = 3$ группа G непростая, $G = {}^2G_2(3) \doteq L_2(8) \leftthreetimes Z_3)$. $\square$

Лемма 1.15. Простые группы $F_4(q)$, ${}^2F_4(q)$ и ${}^2F_4(2)'$ не являются $4M$-группами.

Доказательство. Пусть $G = F_4(q)$. Согласно табл. 2 лиев ранг группы G равен четырем и тогда, как уже отмечалось в лемме 1.3 (со ссылкой на [11, предложение 8.2.2, теорема 8.3.4, предложение 8.3.3] группа G имеет точно 4 класса сопряженных параболических максимальных подгрупп (порядок их силовских p-подгрупп равен q^{24}). Однако согласно [17, теорема, табл. 5.1] (см. также [10, секция 4.8.9]) G содержит еще по крайней мере одну непараболическую максимальную подгруппу: подгруппу типа ${}^3D_4(q) \leftthreetimes Z_3$ (порядок ее силовской p-подгруппы равен q^{12}). Таким образом, группа G имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп.

Пусть $G = {}^2F_4(q)$ $(q = 2^{2m+1} > 2)$. Согласно [10, теорема 4.5] группа G имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов $SU_3(q) \leftthreetimes Z_2$, $PGU_3(q) \leftthreetimes Z_2$, $Sz(q) \wr Z_2$, $Sp_4(q) \leftthreetimes Z_2$, $Z^2_{q+1} \leftthreetimes GL_2(3))$. (Группа ${}^2F_4(2)$ непроста.)

Группа ${}^2F_4(2)'$ согласно [6, p. 75] имеет 8 классов сопряженных максимальных подгрупп. $\square$

Наконец, нам остается рассмотреть группы последнего, 14-го, пункта леммы 1.3.

Лемма 1.16. Простая группа ${}^2E_6(q)$ не является $4M$-группой.

Доказательство. Пусть $G = {}^2E_6(q)$, где $q = p^m$ и p — простое число. Согласно табл. 2 лиев ранг группы G равен четырем и тогда, как уже отмечалось в лемме 1.3 (со ссылкой на [11, предложение 8.2.2, теорема 8.3.4, предложение 8.3.3] группа G имеет точно 4 класса сопряженных параболических максимальных подгрупп (порядок их силовских p-подгрупп равен q^{36}). подгрупп (порядок их силовских p-подгрупп равен q^{36}). Однако согласно [17, теорема, Table 5.1] G содержит еще по крайней мере одну непараболическую максимальную подгруппу: подгруппу типа $PSU_3(q^3).(Z_e \times Z_3)$, где $e = (3, q + 1)$ (порядок ее силовской p-подгруппы равен q^9). Таким образом, G имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп. $\square$

Из лемм 1.1–1.16 непосредственно вытекает теорема 1.

Теорема 1 доказана.

2. Лемма о непростых $4M$-группах

Пусть G — конечная $4M$-группа. Теорема 1 описывает строение фактор-группы $G/\Phi(G)$ в случае, когда она проста. Следующая лемма намечает две независимые части ее дальнейшего исследования в случае, когда она непроста.

Лемма 2.1. *Пусть G — конечная $4M$-группа и $G/\Phi(G)$ непроста. Пусть N — максимальная нормальная собственная подгруппа группы G, содержащая $\Phi(G)$. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

(1) $G/N \cong Z_p$, где p — простое число;

(2) G/N — простая $3M$-группа, изоморфная $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$, где r — простое число.

Доказательство. Так как N — максимальная нормальная собственная подгруппа в G, то группа G/N проста. Число m классов максимальных подгрупп группы G/N меньше четырех, так как $N > \Phi(G)$. Таким образом, $m \in \{1, 2, 3\}$. Если $m = 1$, то, очевидно, выполнено условие (1) леммы.

Если $m = 2$, то по результату Г. Паздерского [1, теорема 6] порядок G/N есть произведение степеней двух различных простых чисел, но это противоречит тому, что группа G/N проста.

Следовательно, $m = 3$ и, значит, G/N — простая группа с точно тремя классами максимальных подгрупп. Но отсюда по теореме 1 из [2] (процитированной на первой стр. настоящей статьи) следует справедливость условия (2) леммы. □

3. Доказательство теоремы 2

Пусть выполнено условие теоремы 2. Поскольку по условию группа G не имеет нормальных подгрупп простого индекса, то G неразрешима и каждая ее максимальная подгруппа не нормальна в G.

(1) $\Rightarrow$ (2): Пусть G — $4M$-группа и $\Phi(G) = 1$. Пусть N — максимальная нормальная собственная подгруппа в G. Согласно лемме 2.1 и теореме 1 из [2] группа G имеет точно 3 класса $\{M_1\}^G$, $\{M_2\}^G$, $\{M_3\}^G$ максимальных подгрупп, содержащих N, и один класс $\{M_4\}^G$ максимальных подгрупп, не содержащих N, причем

$G = NM_4$ и G/N изоморфна $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$, где r — простое число.

Пусть P — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в N (в частности, $P \subseteq M_1 \cap M_2 \cap M_3$). Тогда, очевидно, $G = PM_4$ (иначе $P \subseteq \Phi(G) = 1$).

Покажем, что подгруппа P примарна.

Предположим от противного, что $\pi(P) = \{p_1, \dots, p_k\}$, где $k \geq 2$, и пусть P_i — некоторая силовская p_i-подгруппа в P. Тогда при любом $i \in \{1, \dots, k\}$ согласно аргументу Фраттини (см. [4, теорема 1.3.7]) $G = N_G(P_i)P$ и, следовательно,

либо (а) $P_i \trianglelefteq G$,

либо (б) $N_G(P_i)$ (а потому и P_i) содержится в максимальной подгруппе $M_4^{g_i}$ при некотором $g_i \in G$.

Если для всех номеров i выполнено условие (б), то M_4 содержит некоторую силовскую p_i-подгруппу из P (именно, подгруппу $P_i^{g_i^{-1}}$) при любом $i \in \{1, \dots, k\}$. Но тогда $M_4 \supseteq P$, что противоречиво (тогда $P \subseteq \Phi(G) = 1$). Следовательно, существует номер i со свойством (а), т. е. $P_i \trianglelefteq G$. Но этот факт противоречит тому, что P — минимальная нормальная подгруппа группы G.

Поэтому подгруппа P *примарна*. Но тогда, будучи минимальной нормальной подгруппой группы G, она является элементарной абелевой группой. Так как $P \trianglelefteq G$ и $G = PM_4$, то $P \cap M_4 \trianglelefteq M_4$. Но отсюда и из абелевости P получаем, что $N_G(P \cap M_4) \supseteq \langle M_4, P \rangle = G$, т. е. $P \cap M_4 \trianglelefteq G$ и, следовательно, $P \cap M_4 \leq \Phi(G) = 1$. Таким образом, $G = P \rtimes M_4$, $M_4 \cong G/P$ имеет точно 3 класса сопряженных максимальных подгрупп и M_4 неразрешима. Теперь по [2, теорема 1] $M_4/\Phi(M_4)$ изоморфна $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$, где r — простое число.

Так как, $(M_4)_G$ является нормальной подгруппой в группе G (и в M_4), то, очевидно, $(M_4)_G \subseteq \Phi(M_4)$ и, следовательно, $(M_4)_G$ содержится в пересечении трех максимальных подгрупп группы G, содержащих P. Кроме того, $(M_4)_G$, будучи нормальной подгруппой в группе G, содержится также в каждой подгруппе, сопряженной с M_4. Следовательно, $(M_4)_G \subseteq \Phi(G)$ и потому $(M_4)_G = 1$.

Понятно, что любое дополнение K к P в G является максимальной подгруппой в G и, следовательно, K должно быть сопряжено с M_4.

Утверждение (1) $\Rightarrow$ (2) доказано.

(2) $\Rightarrow$ (1): Пусть выполнено утверждение (2). По [2, теорема 1] группа M имеет точно 3 класса максимальных подгрупп. Следовательно, G имеет точно 3 класса максимальных подгрупп, содержащих P; пусть это будут классы $\{M_1\}^G$, $\{M_2\}^G$, $\{M_3\}^G$. Если же K — максимальная подгруппа в G, не содержащая P, то, очевидно, $G = P \rtimes K$, т. е. K есть дополнение к P в G, а тогда K сопряжена с M по утверждению (1). Таким образом, G есть $4M$-группа.

Понятно также, что $\Phi(G) = M_G$, и потому $\Phi(G) = 1$. Утверждение (2) $\Rightarrow$ (1) доказано.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pazderski G.** *Ü*ber maximal Untergruppen endlicher gruppen // Math. Nachr. 1964. Vol. 26, no. 6. P. 307–319.
2. **Белоногов В. А.** Конечные группы с тремя классами максимальных подгрупп // Мат. сб. 1986. Т. 131, № 2. С. 225–239.
3. **Холл М.** Теория групп. М.: Изд. иностр. лит. 1962. 468 р.
4. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper & Row, 1968. 527 p.
5. **Huppert B.** Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967. 793 S. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
6. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norten, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press., 1985. 252 p.
7. **Belonogov V.** Finite groups with four classes of conjugate maximal subgroups // Groups and Graphs, Metrics and Manifolds : Intern. Conf. and PhD-Master Summer School (Yekaterinburg, July 22-30, 2017): Abstracts. Yekaterinburg, 2017. P. 40. SBN: 978-5-8295-0529-5 .
8. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. N. Y.: Amer. Math. Soc., 1994, 165 p. (Math. Surveys and Monographs; vol. 40, no. 1.) ISBN: 0821803344 .
9. **Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.** The classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. Vol. 111, no. 2. P. 365–383. doi: 10.1016/0021-8693(87)90223-7 .
10. **Wilson R. A.** The finite simple groups. London: Springer, 2009. 298 p. doi: 10.1007/978-1-84800-988-2 .
11. **Carter R. W.** Simple groups of Lie type. London: John Willey and Sons. 1972. 331 p. ISBN: 0471137359 .
12. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. Москва: Мир, 1985. 352 с.
13. **King O.** The subgroup structure of finite classical groups interms of geometric configurations // Surveys in Combinatorics. 2005. P. 29–56. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; vol. 327.) doi: 10.1017/CBO9780511734885.003 .
14. **Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser., 407.) ISBN: 9780521138604 .
15. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. of Math. 1962. Vol. 75. P. 105—145.
16. **Левчук В. М., Нужин Я. Н.** О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. 24, № 1. С. 26–41.
17. **Liebeck M. W., Saxl J., Seitz G. M.** Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. Vol. 65, no. 2. P. 297–325.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 1.09.2017

REFERENCES

1. Pazderski G. Über maximal Untergruppen endlicher gruppen. *Math. Nachr.*, 1964, vol. 26, no. 6, pp. 307–319.
2. Belonogov V.A. Finite groups with three classes of maximal subgroups. *Math. USSR-Sb.*, 1988, vol. 59, no. 1, pp. 223–236. doi: 10.1070/SM1988v059n01ABEH003132 .
3. Hall M. *The theory of groups.* New York, The Macmillan Co., 1959, 434 p. Translated to Russian under the title *Teoriya grupp*, Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1962. 468 p.
4. Gorenstein D. *Finite groups.* New York: Harper & Row., 1968, 642 p.
5. Huppert B. *Endliche Gruppen.* I. Berlin, Springer, 1967, 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
6. Conway J. H., Curtis R. T., Norten S. P., Parker R. A., Wilson R. A. *Atlas of finite groups.* Oxford, Clarendon Press. 1985. 252 p. ISBN: 9780198531999 .
7. Belonogov V. Finite groups with four classes of conjugate maximal subgroups. *Groups and Graphs, Metrics and Manifolds : Intern. Conf. and PhD-Master Summer School* (Yekaterinburg, July 22-30, 2017) : Abstracts, Yekaterinburg, 2017, pp. 40. ISBN: 978-5-8295-0529-5 .
8. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups.* N. Y.: Amer. Math. Soc., 1994. 165 p. ISBN: 0821803344 .
9. Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J. The classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups. *J. Algebra*, 1987, vol. 111, no. 2, pp. 365–383. doi: 10.1016/0021-8693(87)90223-7 .
10. Wilson R. A. *The finite simple groups.* London: Springer, 2009, 298 p. doi: 10.1007/978-1-84800-988-2 .
11. Carter R. W. *Simple groups of Lie type.* London, John Willey and Sons, 1972, 331 p. ISBN: 0471137359 .
12. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification.* N. Y., Plenum Publishing Corp., 1982, University Series in Mathematics, 333 p. ISBN: 0-306-40779-5 . Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu*, Moscow, Mir Publ., 1985, 52 p.
13. King O. The subgroup structure of finite classical groups interms of geometric configurations. *Surveys in Combinatorics*, 2005, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 327, pp. 29–56. doi: 10.1017/CBO9780511734885.003 .
14. Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups.* London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2013, 438 p. ISBN: 9780521138604 .
15. Suzuki M. On a class of doubly transitive groups. *Ann. of Math.*, 1962, vol. 75, pp. 105—145.
16. Levchuk V.M., Nuzhin Ya. N. Structure of Ree groups. *Algebra i Logika*, 1985, vol. 24, pp. 26–41 (in Russian).
17. Liebeck M. W., Saxl J., Seitz G. M. Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type. *Proc. London Math. Soc.* (3), 1992, vol. 65, no. 2, pp. 297–325.

The paper was received by the Editorial Office on September 1, 2017.

Vyacheslav Aleksandrovich Belonogov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: belonogov@imm.uran.ru .