ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ ЛОМАНЫМИ В L_p

А. А. Шабозова

В статье рассматривается класс $H^{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_m}$ параметрически заданных кривых в m-мерном евклидовом пространстве, координатные функции которых принадлежат классам $H^{\omega_i}[0,L]$ $(i=\overline{1,m})$ соответственно, т. е. имеют модуль непрерывности, мажорируемый функцией ω_i. Решена задача отыскания верхней грани взаимного отклонения в норме пространства $L_p[0,L]$ $(1\le p<\infty)$ двух кривых из этого класса при условии обязательного их пересечения в N $(N\ge 2)$ точках отрезка $[0,L]$. Также найдено точное значение верхней грани уклонения в метрике L_p кривой Γ из класса $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$, заданного выпуклыми вверх модулями непрерывности $\omega_i(t), i=\overline{1,m}$, от вписанной в нее интерполяционной ломаной с N $(N\ge 2)$ точками интерполяции. Полученные результаты являются обобщением результата В. Ф. Сторчая о приближении непрерывных функций интерполяционными ломаными в метрике пространства $L_p[0,L]$ $(1\le p<\infty)$.

Ключевые слова: параметрически заданные кривые, модуль непрерывности, интерполяционные ломаные.

A. A. Shabozova. Approximation of space curves by polygonal lines in L_p.

We consider the class $H^{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_m}$ of parametric curves in the m-dimensional Euclidean space whose coordinate curves belong to the classes $H^{\omega_i}[0,L]$ $(i=\overline{1,m})$, respectively; i.e., their moduli of continuity are dominated by the functions ω_i. We solve the problem of finding an upper bound for the mutual deviation in the norm of the space $L_p[0,L]$ $(1\le p<\infty)$ of two curves from this class under the condition that they intersect at N $(N\ge 2)$ points of the interval $[0,L]$. We also find the exact value for the upper bound of the deviation in the L_p metric of a curve Γ belonging to a class $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ defined by upper convex moduli of continuity $\omega_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, from an interpolation polygonal line inscribed in this curve with N $(N\ge 2)$ interpolation nodes. The obtained results generalize V. F. Storchai's result on the approximation of continuous functions by interpolation polygonal lines in the metric of the space $L_p[0,L]$ $(1\le p\le\infty)$.

Keywords: parametric curves, modulus of continuity, interpolation broken lines.

MSC: 41A63

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-311-318

1. Введение

В работе рассматривается вопрос о точном значении оценки погрешности приближения кривых, лежащих в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, вписанными в них ломаными в метрике $L_p, 1\le p<\infty$. Некоторые проблемы, связанные с приближением параметрически заданных кривых вписанными в них ломаными и сплайн-кривыми в различных пространствах ранее изучались, например, в монографиях [1; 2] и работах [3–9]. Точные оценки отклонения кривых от параметрических эрмитовых сплайнов в хаусдорфовой метрике найдены в работах [4–6]. Отметим, что в большинстве, посвященной этой тематике работ, получены порядковые оценки погрешности приближения. В [9] рассмотрен вопрос о точной верхней грани оценки погрешности приближения кривых $\Gamma\subset\mathbb{R}^m$, заданных параметрическими уравнениями

$$x_i=\varphi_i(t),\quad 0\le t\le L,\quad i=\overline{1,m}, \tag{1.1}$$

вписанными в них ломаными на некоторых классах кривых, задаваемых модулями непрерывности, в метрике пространства $C[a,b]$. Здесь мы изучаем аналогичную экстремальную задачу в норме пространства $L_p[0,L],\ 1\le p<\infty$.

Приведем нужные для дальнейшего обозначения и определения. Пусть $H^{\omega}[a,b]$ — класс функций $f(t)\in C[a,b]$, для любых двух точек $t',t''\in[a,b]$ удовлетворяющих условию

$$|f(t')-f(t'')|\le\omega(|t'-t''|),$$

где $\omega(t)$ — заданный на отрезке $[0,b-a]$ модуль непрерывности, т. е. непрерывная, неубывающая и полуаддитивная на $[0,b-a]$ функция, в нуле равная нулю. Если $\omega(t)=Kt^{\alpha}$ $(0<\alpha\le 1, K>0)$, то класс $H^{\omega}[a,b]$ называют классом Липщица порядка α с константой K и обозначают $KH^{(\alpha)}[a,b]$.

Через $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ обозначим класс кривых $\Gamma\subset\mathbb{R}^m$, заданных параметрическими уравнениями (1.1) и таких, у которых координатные функции $\varphi_i(t)\in H^{\omega_i}[0,L], (i=\overline{1,m})$. В случае, когда $\omega_i(t)\equiv\omega(t), i=\overline{1,m}$, соответствующий класс кривых обозначим через $H^{\omega,m}[0,L]$. Как обычно, $L_p[a,b], 1\le p<\infty$, — пространство суммируемых на $[a,b]$ в p-й степени функций f с конечной нормой

$$\|f\|_p:=\|f\|_{L_p[a,b]}=\left(\int\limits_a^b|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}<\infty,\quad 1\le p<\infty.$$

2. Формулировка задач

Пусть кривая Γ задана параметрическими уравнениями (1.1), а кривая G — параметрическими уравнениями

$$y_i=\psi_i(t),\quad i=\overline{1,m},\quad 0\le t\le L,$$

причем всюду далее будем предполагать, что функции $\varphi_i,\psi_i\in L_p[0,L]\cap C[0,L]$, $1\le p<\infty$.

Определим расстояние между кривыми Γ и G равенством

$$\rho(\Gamma,G)_p:=\left(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L|\varphi_i(t)-\psi_i(t)|^p\,dt\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty. \tag{2.1}$$

Убедимся, что формула (2.1) обладает всеми необходимыми свойствами расстояния:

а) $\rho(\Gamma,G)_p\ge 0$, причем $\rho(\Gamma,G)_p=0$ тогда и только тогда, когда $\Gamma\equiv G$;

б) $\rho(\Gamma,G)_p=\rho(G,\Gamma)_p$;

в) Если $\Gamma\colon\ x_i=\varphi_i(t),\ G\colon y_i=\psi_i(t),\ \mathcal{T}\colon z_i=\chi_i(t),\ i=\overline{1,m},\ 0\le t\le L,$ — параметрически заданные кривые, у которых координатные функции $\varphi_i,\ \psi_i,\ \chi_i\in L_p[0,L]$, $i=\overline{1,m},\ 1\le p<\infty$, то

$$\rho(\Gamma,\mathcal{T})_p\le\rho(\Gamma,G)_p+\rho(G,\mathcal{T})_p.$$

В самом деле, свойства а) и б) сразу вытекают из формулы (2.1), а последнее неравенство следует из нижеприведенной леммы (формулы (3.1)), согласно которой запишем

$$\rho(\Gamma,\mathcal{T})_p:=\left(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L|\varphi_i(t)-\chi_i(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L|\varphi_i(t)-\psi_i(t)|^p dt\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L|\psi_i(t)-\chi_i(t)|^p dt\right)^{1/p}=\rho(\Gamma,G)_p+\rho(G,\mathcal{T})_p.$$

Пусть $\Delta_N:0\le t_1<t_2<\ldots<t_N\le L$ $(N\ge 1)$ — произвольное разбиение отрезка $[0,L]$ и для координатных функций кривых Γ и G выполнены равенства

$$\varphi_i(t_k)=\psi_i(t_k),\quad i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,N}. \tag{2.2}$$

Видно, что при выполнении равенств (2.2) кривые Γ и G в точках t_k $(k=\overline{1,N})$ пересекаются. Мы будем обозначать условие (2.2) через $\Gamma|_{\Delta_N}=G|_{\Delta_N}$.

Равномерное разбиение отрезка $[0,L]$ обозначим через $\overline{\Delta}_{N+1}=\{\overline{t}_k:\overline{t}_k=kL/N\}_{k=0}^{N}$, а через Δ_N^0 — разбиение отрезка $[0,L]$ точками $t_k^0:=(2k-1)L/(2N),\ k=\overline{1,N}$.

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\rho)_p:=\inf_{\Delta_N}\mathcal{E}(H^{\omega_1,\dots,\omega_m},\Delta_N;\rho)_p,$$

где

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\Delta_N;\rho)_p:=\sup\left\{\rho(\Gamma,G)_p:\Gamma,G\in H^{\omega_1,\dots,\omega_m},\ \Gamma|_{\Delta_N}=G|_{\Delta_N}\right\}.$$

Последнее соотношение означает, что верхняя грань берется только по тем кривым Γ и G из класса $H^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$, которые совпадают на сетке узлов Δ_N.

3. Основные результаты

Имеет место следующее утверждение.

Лемма. *Пусть функции $\varphi_i,\psi_i\in L_p[a,b]$ $(i=\overline{1,m},\ 1\le p<\infty)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\int_a^b|\varphi_i(t)+\psi_i(t)|^pdt\right)^{1/p}\le\left(\sum_{i=1}^{m}\int_a^b|\varphi_i(t)|^pdt\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{m}\int_a^b|\psi_i(t)|^pdt\right)^{1/p}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вполне вероятно, что неравенство (3.1) известно, однако мы в существующей литературе его не обнаружили, а потому приводим доказательство.

Так как $\varphi_i,\psi_i\in L_p[a,b]$, то в силу неравенства Минковского для интегралов запишем

$$\int_a^b|\varphi_i(t)+\psi_i(t)|^pdt\le\left[\left(\int_a^b|\varphi_i(t)|^pdt\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|\psi_i(t)|^pdt\right)^{1/p}\right]^p.$$

Пользуясь этим неравенством и неравенством Минковского для конечных сумм, имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\int_a^b|\varphi_i(t)+\psi_i(t)|^pdt\right)^{1/p}=\left(\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i+\psi_i\|_{L_p(a,b)}^p\right)^{1/p}$$

$$\le\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\|\varphi_i\|_{L_p(a,b)}+\|\psi_i\|_{L_p(a,b)}\right)^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{i=1}^{m}\|\varphi_i\|_{L_p(a,b)}^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{m}\|\psi_i\|_{L_p(a,b)}^p\right)^{1/p}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}\int_a^b|\varphi_i(t)|^pdt\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{m}\int_a^b|\psi_i(t)|^pdt\right)^{1/p},$$

чем и завершаем доказательство леммы.

Теорема 1. *Какими бы ни были модули непрерывности $\omega_i(t)(i=\overline{1,m},0\le t\le L)$ при всех $1\le p<\infty$, имеют место равенства*

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\rho)_p:=\inf_{\Delta_N}\mathcal{E}(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\Delta_N;\rho)_p$$

$$=\mathcal{E}(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\Delta_N^0;\rho)_p=2\left(2N\sum_{i=1}^{m}\int_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь формулой расстояния (2.1) между кривыми $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, имеем

$$\rho(\Gamma, G)_p = \Big(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}. \tag{3.2}$$

Возведя обе части неравенства (3.2) в степень p $(1 \le p < \infty)$, запишем

$$[\rho(\Gamma, G)_p]^p = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p\,dt. \tag{3.3}$$

Докажем, что

$$[\rho(\Gamma, G)_p]^p \le 2^p\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L \Big[\min_{1\le k\le N}\omega_i^p(|t-t_k|)\Big]dt. \tag{3.4}$$

Разложим интеграл в формуле (3.3) по отдельным отрезкам

$$[\rho(\Gamma, G)_p]^p = \sum_{i=1}^{m}\Big[\int\limits_0^{t_1}|\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt + \sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt + \int\limits_{t_N}^{L}|\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt\Big].$$

Оценим сверху одно слагаемое $\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt$. Положим $\varphi_i(t) - \psi_i(t) = h_i(t)$ $(i = \overline{1,m}$, $0 \le t \le L)$. Тогда ясно, что $h_i \in L_p[0,L] \cap C[0,L]$ $(1 \le p < \infty)$, $h_i \in H^{2\omega_i}[0,L]$. Кроме того, $h_i(t_j) = 0$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{0,N+1})$. Пусть $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Поскольку $h_i(t_k) = 0$ и $h_i(t_{k+1}) = 0$, то получаем $|h_i(t)| \le 2\omega_i(|t-t_k|)$ и $|h_i(t)| \le 2\omega_i(|t-t_{k+1}|)$, а потому в силу монотонности ω_i имеем $|h_i(t)| \le \min\limits_{j=k,k+1} 2\omega_i(|t-t_j|) = 2\omega_i(\min\limits_{j=k,k+1}|t-t_j|)$. Так как все остальные точки t_j лежат дальше от t, чем t_k и t_{k+1}, то можно брать минимум и по этим точкам тоже, т. е. $|h_i(t)| \le 2\omega_i(\min\limits_{1\le j\le N}|t-t_j|)$. Но тогда получаем

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|h_i(t)|^p dt \le \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\Big[2\omega_i\Big(\min_{1\le j\le N}|t-t_j|\Big)\Big]^p dt, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к таким же неравенствам для двух других слагаемых

$$\int\limits_0^{t_1}|\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \le \int\limits_0^{t_1}\Big[2\omega_i\Big(\min_{1\le j\le N}|t-t_j|\Big)\Big]^p dt,$$

$$\int\limits_{t_N}^{L}|\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \le \int\limits_{t_N}^{L}\Big[2\omega_i\Big(\min_{1\le j\le N}|t-t_j|\Big)\Big]^p dt.$$

Используя все эти оценки, в итоге мы получим, что

$$[\rho(\Gamma, G)_p]^p \le 2^p\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^L\Big[\omega_i\Big(\min_{1\le k\le N}|t-t_k|\Big)\Big]^p dt,$$

и тем самым неравенство (3.4) доказано.

Неравенство (3.4) точно на классе кривых $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$, в чем легко убедиться, если рассмотреть кривые Γ_0 и G_0 из этого класса с координатными функциями соответственно

$$\varphi_i^0(t) = -\psi_i^0(t) = \omega_i\Big(\min_{1\le k\le N}|t-t_k|\Big), \quad i=\overline{1,m}, \quad 0\le t\le L.$$

Таким образом, мы нашли точную верхнюю грань уклонения для произвольной сетки Δ_N:

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\Delta_N;\rho) = 2\Big[\sum_{i=1}^m \int_0^L \omega_i^p\Big(\min_{1\le k\le N}|t-t_k|\Big)dt\Big]^{1/p}. \tag{3.5}$$

Далее нам понадобится следующее утверждение (см. [10, с. 178]):

Пусть $\psi(t)$ — неубывающая и неотрицательная для $0\le t\le b-a$ функция. При фиксированном $N=1,2,\dots,$ вектору $T=\{t_1,t_2,\dots,t_N\}$ $(a\le t_1<t_2<\dots<t_N\le b)$ сопоставим функцию $\phi(T,t)=\min\limits_{1\le k\le N}\psi(|t-t_k|)$, $a\le t\le b$. Тогда

$$\int_a^b \phi(T,t)dt \ge \int_a^b \phi(T_0,t)dt, \tag{3.6}$$

где вектор T_0 определяется координатами $t_k^0 = a+(2k-1)(b-a)/(2N)$, $k=\overline{1,N}$.

Продолжим доказательство теоремы 1. Положив $\psi(t)=[\omega_i(t)]^p$ $(1\le p<\infty,\ 0\le t\le L,$ $i=\overline{1,m})$ и заметив, что

$$\omega_i^p\Big(\min_{1\le k\le N}|t-t_k^0|\Big) = \omega_i^p\Big(\Big|t-\frac{(2k-1)L}{2N}\Big|\Big) \ \text{ для } \ \frac{(k-1)L}{N}\le t\le\frac{kL}{N} \ \ (k=\overline{1,N}),$$

из соотношения (3.5) в силу (3.6) получаем

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\rho)_p = \inf_{\Delta_N}\mathcal{E}(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\Delta_N;\rho)_p$$

$$= \mathcal{E}(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\Delta_N^0;\rho)_p = 2\Big[\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \omega_i^p\Big(\Big|t-\frac{(2k-1)L}{2N}\Big|\Big)dt\Big]^{1/p}$$

$$= 2\Big\{\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^N\Big[\int_{(k-1)L/N}^{(2k-1)L/(2N)} \omega_i^p\Big(\frac{(2k-1)L}{2N}-t\Big)dt + \int_{(2k-1)L/(2N)}^{kL/N}\omega_i^p\Big(t-\frac{(2k-1)L}{2N}\Big)dt\Big]\Big\}^{1/p}$$

$$= 2\Big[\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^N\Big(2\int_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\Big)\Big]^{1/p} = 2\Big(2N\sum_{i=1}^m\int_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\Big)^{1/p},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_N(H^{m,\omega};\rho)_p = 2\Big(2mN\int_0^{L/(2N)}\omega^p(t)dt\Big)^{1/p}, \quad 1\le p<\infty.$$

В частности, если $\omega(t)=Kt^\alpha (K>0,\ 0<\alpha\le 1)$, то

$$\mathcal{E}_N(H^{m,\alpha};\rho)_p = \frac{2\sqrt[p]{m}KL^{\alpha+1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p+1}(2N)^\alpha}.$$

Теорема 2. *Пусть дана кривая $\Gamma \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$. Пусть Γ_N есть вписанная в кривую Γ ломаная с вершинами в точках $P_k := P(\varphi_1(kh),\dots,\varphi_m(kh)), k=\overline{0,N}, h=L/N$, соответствующих точкам равномерного разбиения отрезка $[0,L]$ $\overline{\Delta}_{N+1}=\{\overline{t}_k : \overline{t}_k = kL/N\}_{k=0}^N$, $N\geq 1$. В предположении, что $\omega_i(t)$ $(i=\overline{1,m}, 0\leq t\leq L)$ — выпуклые вверх модули непрерывности, справедливо равенство*

$$E(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\overline{\Delta}_{N+1};\rho)_p := \sup\left\{\rho(\Gamma,\Gamma_N)_p\colon \Gamma\in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\right\}$$

$$= \left(2N\sum_{i=1}^m \int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}, \quad 1\leq p<\infty. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Параметрическое уравнение звена ломаной Γ_N, соединяющее точки P_k и P_{k+1}, имеет вид

$$s(\varphi_i;t) := \varphi_i(\overline{t}_k) + (t-\overline{t}_k)h^{-1}\left[\varphi_i(\overline{t}_{k+1})-\varphi_i(\overline{t}_k)\right],\ i=\overline{1,m}, \quad \text{где} \quad \overline{t}_k\leq t\leq \overline{t}_{k+1}.$$

В [11] доказано, что при любом $t\in[\overline{t}_k,\overline{t}_{k+1}]$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\overline{t}_k}^{\overline{t}_{k+1}} |\varphi_i(t)-s(\varphi_i;t)|^p\,dt \leq 2\int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t)dt, \quad 1\leq p<\infty,$$

воспользовавшись которым получаем

$$\rho(\Gamma,\Gamma_N)_p = \left(\sum_{i=1}^m \int\limits_0^L |\varphi_i(t)-s(\varphi_i;t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^m\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\overline{t}_k}^{\overline{t}_{k+1}} |\varphi_i(t)-s(\varphi_i;t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leq \left(2N\sum_{i=1}^m\int\limits_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}.$$

Пользуясь последним неравенством, запишем

$$E(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\overline{\Delta}_{N+1};\rho)_p$$

$$:= \sup\left\{\rho(\Gamma,\Gamma_N)_p :\ \Gamma\in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\right\} \leq \left(2N\sum_{i=1}^m\int\limits_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}. \tag{3.8}$$

Докажем, что существует кривая $\Gamma\in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$, для которой неравенство (3.8) обращается в равенство. Пусть Γ^* — кривая, у которой координатные функции определены на отрезке $[0,L]$ равенствами

$$\varphi_i^*(t) := \begin{cases} \omega_i(t-\overline{t}_k), & \overline{t}_k\leq t\leq \overline{t}_k + L/(2N), \\ \omega_i(\overline{t}_{k+1}-t), & \overline{t}_k + L/(2N)\leq t\leq \overline{t}_{k+1},\ k=\overline{0,N-1}, \end{cases}$$

где $\omega_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$ — выпуклые вверх модули непрерывности на отрезке $[0,L]$.

Очевидно, что кривая $\Gamma^*\in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$. Поскольку $\varphi_i^*(\overline{t}_k)=0$, $k=\overline{0,N-1}$, $i=\overline{1,m}$, то $S(\varphi_i^*,\overline{t}_k)\equiv 0, k=\overline{0,N-1}, i=\overline{1,m}$, а потому имеем

$$\rho(\Gamma^*, \Gamma_N^*)_p := \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^L \left|\varphi_i(t) - s(\varphi_i^*; \bar{t}_k)\right|^p dt \right)^{1/p}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^L |\varphi_i^*(t)|^p \, dt \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} |\varphi_i^*(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_k + L/(2N)} \omega_i^p \left(t - \bar{t}_k\right) dt + \int_{\bar{t}_k + L/(2N)}^{\bar{t}_{k+1}} \omega_i^p \left(\bar{t}_{k+1} - t\right) dt \right) \right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} \left(2 \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right) \right]^{1/p} = \left(2N \sum_{i=1}^{m} \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

откуда и следует равенство (3.7). Теорема 2 доказана.

Отметим, что равенство (3.7) в определенном смысле является распространением известного результата В. Ф. Сторчая [11] об отклонении ломаных в метрике $L_p[0,1] (1 \le p < \infty)$ на случай отклонения пространственных кривых от вписанных в них интерполяционных ломаных в метрике $L_p[0, L]$ $(1 \le p < \infty)$.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 2 *имеет место равенство*

$$E(H^{m,\omega}; \overline{\Delta}_N; \rho)_p = \left(2mN \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

и в частности, когда $\omega(t) = Kt^\alpha$ $(0 < \alpha \le 1, K > 0)$, *имеет место равенство*

$$E(KH^{m,\alpha}; \overline{\Delta}_N; \rho)_p = \frac{\sqrt[p]{m} K L^{\alpha + 1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p + 1} (2N)^\alpha}.$$

В завершение отметим, что интерполяционные ломаные, хорошо приближая кривую, одновременно могут хорошо приближать и производные ее координатных функций [12].

Автор благодарит рецензента за сделанные им ценные замечания в процессе подготовки статьи к печати.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сендов Бл.** Хаусдорфовые приближения. София: Изд-во Болгарской АН, 1979. 372 с.
2. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
3. **Мартынюк В.Т.** О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями, в хаусдорфовой метрике // Укр. мат. журн. 1976. Т 28б № 1. С. 87–92.
4. **Назаренко Н.А.** О локальном восстановление кривых с помощью параметрических сплайнов // Геометрическая теории функций и топология: сб. тр. Киев, 1981. С. 55–62.
5. **Вакарчук С.Б.** О приближении кривых, заданных параметрическом виде, при помощи сплайн-функций // Укр. мат. журн. 1983. Т 35, № 3. С. 352–355.
6. **Вакарчук С.Б.** Точные константы приближения плоских кривых полиномиальными кривыми и ломаными // Изв. Вузов. Математика. 1988. № 2. С. 14–19.
7. **Корнейчук Н.П.** Об оптимальном кодирования вектор-функций // Укр. мат. журн. 1988. Т 40, № 6. С. 737–743.
8. **Корнейчук Н.П.** Приближение и оптимальное гладких плоских кривых // Укр. мат. журн. 1989. Т 41, № 4. С. 492–499.

9. **Шабозов М.Ш., Шабозова А.А.** Приближение кривых ломаными // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2013. Вып 2. Сер. 1. С. 68–76.
10. **Никольский С.М.** Квадратурные формулы. М.: Наука, 1986. 256 с.
11. **Сторчай В.Ф.** Об отклонении ломаных в метрике L_p. // Мат. заметки. 1969. Т. 5, № 1. С. 31–37.
12. **Шабозова А.А.** К полигональной интерполяции кривых в пространстве $\mathbb{R}^m$ // Изв. ТулГУ. 2015. Вып. 4. С. 107–112.

Шабозова Адолат Азамовна
математик, аспирант
Таджикский национальный университет
e-mail: shabozova91@mail.ru

Поступила 10.05.2017

REFERENCES

1. Sendov Bl. *Haussdorff Approximation.* NY etc., Springer Publ., 1990, 388 p.
2. Zavyalov Yu. S, Kvasov B. I., Miroshnichencko V. L. *Metodi splain funksiy* [Methods of Spline-Functions], Moscow, Nauka Publ., 1980, 352 p.
3. Martynyuk V.T. Approximation by polygonal lines of curves given by parametric equations in the Hausdorff metric. *Ukr. Math. J.*, 1976, vol. 28, no. 1, pp. 68–72.
4. Nazarenko N. A. Local recovery curves by parametric splines. *Geometric theory of functions and topology*, Kiev, 1981, pp. 55–62 (in Russian).
5. Vakarchuk S. B. Approximation by spline-curves of curves given in parametric form. *Ukr. Math. J.*, 1983, vol. 35, no. 3, pp. 303–306.
6. Vakarchuk S. B. Exact constants for the approximation of plane curves by polynomial curves and polygonal lines. *Izvestiya VUZ. Mathematika.*, 1988, vol. 32, no. 2, pp. 19–26.
7. Korneichuk N. P. Optimal coding of vector-functions. *Ukr. Math. J.*, 1988, vol. 40, no. 6, pp. 621–627.
8. Korneichuk N. P. Approximation and optimal coding of smooth plane curves. *Ukr. Math. J.*, 1989, vol. 41, no. 4, pp. 429–435.
9. Shabozov M. Sh., Shabozova A. A. Approximating curves by broken lines. *Vestkin St. Petersburg University*, ser. 1, iss. 2, pp. 68–76 (in Russian).
10. Nikolskiy S. M. *Kvadraturnie formuli* [Quadrature Formulae]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 256 p.
11. Storchai V.F. The diviation of polygonal functions in the L_p metric. *Math. Notes*, 1969, vol. 5, no. 1, pp. 21–25.
12. Shabozova A.A. Polygonal interpolation of curves in the space $\mathbb{R}^m$. *Izvestiya TSU*, 2015, iss. 4, pp.107–112 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on May 10, 2017.

Adolat Azamovna Shabozova, doctoral student, Tajik National University, Dushanbe, 734025 Tajikistan, e-mail: shabozova91@mail.ru .